УДК 512.552.4

Н. Д. Попова, Ю. С. Самойленко, О. В. Стрілець
(Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО $*$-ЗОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ АЛГЕБР, ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ ГРАФАМИ КОКСТЕРА*

We study $*$-representations of a class of algebras that are factor-algebras of the Hecke algebras related to the Coxeter graphs. We give a description of all unitarily nonequivalent irreducible $*$-representations of finite-dimensional algebras. We prove that only trees that have at most one edge of type $s > 3$ define algebras of the finite Hilbert type for all the values of parameters.

Исследуются $*$-представления класса алгебр, являющихся фактор-алгебрами алгебр Гекке, которые связаны с графами Кокстера. Приведено описание всех унитарно неэквивалентных неприводимых $*$-представлений конечномерных алгебр. Доказано, что только деревья с не больше чем одним ребром типа $s > 3$ задают алгебры конечного гильбертова типа при всех значениях параметров.

Вступ. У роботі [1] досліджувалися породжені проекторами алгебри типу Темперлі – Ліба, пов'язані з графами Кокстера.

В роботі [2] ми вивчали їх фактор-алгебри $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ (а саме, їх розмірності та ріст), вважаючи проектори ортогональними, якщо вони не з'єднані ребром у графі $\mathbb{G}$. У пункті 1 ми наведемо означення алгебр $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ та результати з [2].

У цій роботі будемо вивчати їх $*$-зображення в гільбертовому просторі. У пункті 2 для скінченновимірних алгебр $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ описано (з точністю до унітарної еквівалентності) всі незвідні $*$-зображення (в цьому випадку їх кількість скінченна і всі вони скінченновимірні). В пункті 3 доведено, що тільки графи-дерева з не більш ніж одним ребром типу $s > 3$ задають алгебри скінченного гільбертового типу (тобто алгебри, у яких число незвідних $*$-зображень у гільбертовому просторі є скінченним) при всіх значеннях параметрів.

1. Попередні означення та приклади. *Графом Кокстера* $\mathbb{G}$ називають скінченний неорієнтований позначений граф без кратних ребер та петель. Будемо писати $\mathbb{G} = (V, R)$, де $V = \{1, \ldots, n\}$ — множина вершин, R — множина ребер. Ребро між вершинами i і j будемо позначати γ_{ij} (вважаючи при цьому, що $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$). Всі ребра графа Кокстера $\mathbb{G}$ поділяються на типи

$$R = \coprod_{s=3}^{\infty} R_s.$$

Відповідні ребра будемо називати R_3-, R_4-ребрами і т. д., або будемо говорити, що ребро має тип 3, 4 і т. д. Позначимо через $s_{\mathbb{G}}$ такий номер, що $R_{s_{\mathbb{G}}} \neq \varnothing$ і $R_s = \varnothing$, якщо $s > s_{\mathbb{G}}$.

Шлях довжини m у графі $\mathbb{G}$

$$l = l(i_0) = (i_0, i_1, \ldots, i_m), \quad \gamma_{i_{k-1}, i_k} \in R$$

будемо називати *шляхом без повторів*, якщо $i_k \neq i_j$, для довільних $k \neq j$, тобто якщо він є ін'єктивним. Шлях $l = (i_0)$ будемо розглядати як шлях без повторів довжини 0, а шлях $l = (\ )$ — як „порожній" шлях. Для шляху $l = (i_0, i_1, \ldots, i_m)$ означимо $l^* = (i_m, i_{m-1}, \ldots, i_0)$. Під *об'єднанням шляхів* $l_1 =$

* Виконано в рамках проекту № 0107U002333 цільової програми НАН України „Сучасні методи дослідження математичних моделей в задачах природознавства та суспільних наук".

$= (i_0, \ldots, i_{k-1}, i_k)$ і $l_2 = (i_k, i_{k+1}, \ldots, i_t)$ будемо розуміти шлях $l_1 \bigcup l_2 = (i_0, \ldots$ $\ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_t)$. Довільному шляхові $l = (i_0, i_1, \ldots, i_m)$ можна співставити добуток $\Pi_l = p_{i_0} \ldots p_{i_m}$ в алгебрі, для „порожнього" шляху $\Pi_l = e$.

Алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ задається твірними та визначальними співвідношеннями. Твірних стільки, скільки вершин у графі $\mathbb{G}$, всі вони є ідемпотентами. А співвідношення між твірними p_i та p_j визначаються ребром між відповідними вершинами i і j. Якщо ребра між вершинами i і j немає, то p_i і p_j ортогональні ($p_i p_j = p_j p_i = 0$).

Перш ніж навести означення алгебр $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$, розглянемо деякі приклади графів Кокстера та співвідношень, що виникають.

1. Граф $\mathbb{G}$ є таким: $1 \circ\!\overset{3}{\text{—}}\!\circ 2$.

Відповідна алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ породжена двома ідемпотентами p_1 і p_2 зі співвідношеннями $p_1p_2p_1 = \tau p_1$, $p_2p_1p_2 = \tau p_2$ для деякого $\tau \in \mathbb{R}$.

2. Граф $\mathbb{G}$ є таким: $1 \circ\!\overset{4}{\text{—}}\!\circ 2$.

Відповідна алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ породжена двома ідемпотентами p_1 і p_2 зі співвідношеннями $(p_1p_2)^2 = \tau p_1p_2$, $(p_2p_1)^2 = \tau p_2p_1$ для деякого $\tau \in \mathbb{R}$.

3. Граф $\mathbb{G}$ є таким: $1 \circ\!\overset{5}{\text{—}}\!\circ 2$.

Відповідна алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ породжена двома ідемпотентами p_1 і p_2 зі співвідношеннями $(p_1p_2)^2 p_1 = \tau_1 p_1p_2p_1 + \tau_2 p_1$, $(p_2p_1)^2 p_2 = \tau_1 p_2p_1p_2 + \tau_2 p_2$ для деяких $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$.

4. Граф $\mathbb{G}$ є таким: $1 \circ\!\overset{6}{\text{—}}\!\circ 2$.

Відповідна алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ породжена двома ідемпотентами p_1 і p_2 зі співвідношеннями $(p_1p_2)^3 = \tau_1 (p_1p_2)^2 + \tau_2 p_1p_2$, $(p_2p_1)^3 = \tau_1 (p_2p_1)^2 + \tau_2 p_2p_1$ для деяких $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$.

5. Граф $\mathbb{G}$ є таким: $1 \circ\!\overset{7}{\text{—}}\!\circ 2$.

Відповідна алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ породжена двома ідемпотентами p_1 і p_2 зі співвідношеннями $(p_1p_2)^3 p_1 = \tau_1 (p_1p_2)^2 p_1 + \tau_2 p_1p_2p_1 + \tau_3 p_1$, $(p_2p_1)^3 p_2 =$ $= \tau_1 (p_2p_1)^2 p_2 + \tau_2 p_2p_1p_2 + \tau_3 p_2$ для деяких $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathbb{R}$.

Дамо означення алгебр $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$. Нехай g — деяке відображення, яке кожному ребру $\gamma_{ij} \in R_s$, $s = 2k + \sigma \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \{0,1\}$, ставить у відповідність поліном g_{ij} такий, що $\deg g_{ij} \leq k - 1$ і $g_{ij}(0) = 0$, якщо $\sigma = 0$,

$$g\colon\ R \to \mathbb{R}[x]: \quad \gamma_{ij} \mapsto g_{ij}(x) = \sum_{m=1-\sigma}^{k-1} \tau_{ij}^{(m)} x^m \in \mathbb{R}[x].$$

Означення 1. $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ — *асоціативна алгебра над* $\mathbb{C}$ *з одиницею* e, *задана твірними та співвідношеннями, які визначаються графом* $\mathbb{G}$ *та відображенням* g:

$$TL_{\mathbb{G},g,\perp} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n \,\Big|\, p_i^2 - p_i = 0; \quad p_ip_j = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma_{ij} \notin R;$$
$$(p_ip_j)^k p_i^\sigma - g_{ij}(p_ip_j)p_i^\sigma = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma_{ij} \in R_s, \quad s = 2k + \sigma \geq 3, \quad \sigma \in \{0,1\}\Big\rangle. \quad (1)$$

Для ребра $\gamma_{ij} \in R_s$, $s = 2k + \sigma$, разом з поліномом g_{ij} будемо розглядати поліном $f_{ij}(x) = x^k - g_{ij}(x)$. Тоді співвідношення (1) можна переписати у вигляді $f_{ij}(p_i p_j)\, p_i^{\sigma} = 0$.

Відмітимо, що оскільки ми покладаємо $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, то за означенням 1 для p_i і p_j ми завжди маємо на увазі виконання обох співвідношень: $f_{ij}(p_i p_j) p_i^{\sigma} = 0$ і $f_{ij}(p_j p_i) p_j^{\sigma} = 0$.

Далі будемо розглядати $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ як $*$-*алгебру*, маючи на увазі інволюцію, при якій твірні стають проекторами, тобто $p_i^* = p_i = p_i^2$ для всіх $i \in V$. Для цього з необхідністю вважаємо, що всі поліноми g_{ij} мають дійсні коефіцієнти.

Наведемо одне просте твердження.

Твердження 1. *Нехай для двох графів Кокстера* $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ *і двох відображень* $g\colon R \to \mathbb{R}[x]$, $\tilde{g}\colon \tilde{R} \to \mathbb{R}[x]$ *виконано умови*:

1) *множини вершин графів збігаються*: $V = \tilde{V}$;

2) *якщо будь-які дві вершини* $i, j \in V$ *не з'єднані ребром у графі* $\mathbb{G}$, *то вони не з'єднані ребром і у графі* $\tilde{\mathbb{G}}$;

3) *якщо* $i, j \in V$ *з'єднані ребром у графі* $\mathbb{G}$ *і не з'єднані ребром у* $\tilde{\mathbb{G}}$, *то правильною є рівність* $g_{ij}(0) = 0$;

4) *для довільного ребра* $\gamma_{ij} \in R_s$, $s = 2k + \sigma$, *і відповідного ребра* $\tilde{\gamma}_{ij} \in \tilde{R}_{\tilde{s}}$, $\tilde{s} = 2\tilde{k} + \tilde{\sigma}$, *виконується нерівність* $\tilde{s} \le s$ *і поліном* $\tilde{f}_{ij}(x)$ *ділить поліном* $f_{ij}(x)$.

Тоді $*$-*алгебра* $TL_{\tilde{\mathbb{G}},\tilde{g},\perp}$ *є фактор-алгеброю* $*$-*алгебри* $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ *і довільне* $*$-*зображення* $\tilde{\pi}$ *алгебри* $TL_{\tilde{\mathbb{G}},\tilde{g},\perp}$ *піднімається до* $*$-*зображення* $\pi = \tilde{\pi}\varphi$ *алгебри* $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$, *де* $\varphi\colon TL_{\mathbb{G},g,\perp} \to TL_{\tilde{\mathbb{G}},\tilde{g},\perp}$ — *фактор-відображення*.

В теоремі 1 стверджується, що алгебра, асоційована з графом-деревом з умовою $|R \setminus R_3| = 1$, не має інших незвідних $*$-зображень, крім тих, до яких піднімаються $*$-зображення її фактор-алгебр $TL_{\tilde{\mathbb{G}},\tilde{g},\perp}$, де граф Кокстера $\tilde{\mathbb{G}}$ є звичайним графом. *Звичайним* графом будемо називати граф Кокстера, всі ребра якого мають тип 3. Якщо $\mathbb{G}$ — дерево з умовою $|R \setminus R_3| > 1$, то подібна теорема, взагалі кажучи, не має місця, оскільки завжди існує розстановка поліномів g_{ij} на ребрах така, що алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ має нескінченне число унітарно нееквівалентних незвідних $*$-зображень (див. лему 1).

2. Про $*$-зображення скінченновимірних алгебр $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$. В роботі [2] ми показали, що скінченновимірними серед алгебр $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ є лише ті алгебри, що визначаються графом Кокстера $\mathbb{G}$, який не містить циклів і містить не більше одного ребра типу $s > 3$ у кожній компоненті зв'язності. Далі ми будемо розглядати тільки зв'язні графи Кокстера. $*$-Зображення алгебр $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$, асоційованих з деякими звичайними графами, вивчалися в роботах [3 – 5]. В роботі [4] знайдено умови, при яких існують ненульові $*$-зображення, і дано опис усіх незвідних $*$-зображень.

Наведемо необхідні для подальшого результати з цих робіт.

Нехай граф $\mathbb{G}$ — дерево з n вершинами і всі ребра мають тип 3. За означенням 1 співвідношення між будь-якими твірними-проекторами p_i і p_j алгебри $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ будуть наступними: якщо між вершинами i, j у графі $\mathbb{G}$ є ребро, то виконуються співвідношення

$$p_i p_j p_i = \tau_{ij} p_i, \quad p_j p_i p_j = \tau_{ij} p_j, \quad \tau_{ij} \in \mathbb{R};$$

якщо ребра немає, то

$$p_i p_j = p_j p_i = 0.$$

Розглянемо самоспряжену $(n \times n)$-матрицю $M(\mathbb{G}, g) = (m_{i,j})_{i,j=1}^n$, де

$$m_{i,i} = 1 \quad \forall\, i; \quad m_{i,j} = \sqrt{\tau_{ij}}, \quad \text{якщо} \quad \gamma_{ij} \in R,$$
$$\text{і} \quad m_{i,j} = 0 \quad \text{в протилежному випадку.}$$

В наступному твердженні, доведеному в [4], наведено необхідну і достатню умову, при якій алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ має ненульові $*$-зображення, а також опис усіх незвідних $*$-зображень.

Твердження 2. *Нехай граф* $\mathbb{G}$ *— дерево, всі ребра якого мають тип* 3. *Алгебра* $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ *має ненульові* $*$*-зображення тоді і тільки тоді, коли матриця* $M(\mathbb{G}, g)$ *є невід'ємно визначеною. Незвідне ненульове* $*$*-зображення єдине з точністю до унітарної еквівалентності, і його розмірність дорівнює рангу матриці* $M(\mathbb{G}, g)$.

Далі, розглянемо граф Кокстера $\mathbb{G}_u$, який є деревом, і всі ребра, крім одного, мають тип 3. Вважаємо, що вершини графа $\mathbb{G}_u$ занумеровано так, що $\gamma_{12} \in R_s$, $s > 3$. Зрозуміло, що якщо витерти ребро γ_{12}, то граф Кокстера $\mathbb{G}_u$ розпадеться на два звичайних дерева: $\Gamma_{(d)} = \left(V_{(d)}, R_{(d)}\right)$, $d \in V_{(d)}$, $d = 1, 2$.

Мета цього пункту — одержати опис незвідних ненульових $*$-зображень алгебри $TL_{\mathbb{G}_u,g,\perp}$ у термінах $*$-зображень її фактор-алгебр $TL_{\breve{\mathbb{G}}_u,\breve{g},\perp}$. Цю задачу для частинного випадку, а саме, коли $f_{12}(x) = (x - \tau_{12})x^{k-1}$, було розв'язано в роботі [6]. У цьому пункті ми досліджуємо випадок довільного полінома $f_{12}(x)$, використовуючи результати роботи [2].

Позначимо через π деяке $*$-зображення алгебри $TL_{\mathbb{G}_u,g,\perp}$ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, а через $P_i = \pi(p_i)$ відповідні твірним ортопроектори у просторі $\mathcal{H}$. Зауважимо, що, як і у випадку звичайних графів, будемо вважати, що $g_{ij}(x) = \tau_{ij} \neq 0$ для $\gamma_{ij} \in R_3$, тому що інакше з рівності $P_i P_j P_i = 0$ буде випливати $P_i P_j = 0$. Позначимо через

$$\mathcal{H}_i = \{x \in \mathcal{H} \mid P_i x = x\}$$

підпростір, який є образом P_i.

Як і в роботі [2], твірні впорядковуємо за зростанням індексу: $p_1 < \ldots < p_n$, на словах розглядаємо однорідно-лексикографічний порядок, а через $\mathcal{N}$ позначаємо множину всіх нормальних слів в алгебрі $TL_{\mathbb{G}_u,g,\perp}$. Алгебра $TL_{\mathbb{G}_u,g,\perp}$ є скінченновимірною, отже, множина $\mathcal{N}$ скінченна. Нехай $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}$ — множина всіх таких нормальних слів, що довільний $w \in \mathcal{N}_i$ або є одиницею, або закінчується на деякий p_j, з'єднаний ребром γ_{ij} із вершиною i.

Твердження 3. *Нехай* $\mathcal{H}_i \ni x_0 \neq 0$. *Тоді лінійна оболонка* $L_i(x_0)$ *скінченної множини векторів* $\pi(\mathcal{N}_i)x_0 = \{\pi(w)x_0\}_{w \in \mathcal{N}_i}$ *є інваріантним відносно* $*$*-зображення* π *ненульовим підпростором* $\mathcal{H}$.

Доведення. Довільне нормальне слово v, яке не належить множині $\mathcal{N}_i$, є таким, що воно закінчується або на p_i $(v \in \mathcal{N}_{i0} = \mathcal{N}_i p_i)$, або на p_j такий, що

$p_j p_i = p_i p_j = 0 \left(v \in \overline{\mathcal{N}_i}\right)$.

Таким чином, для будь-якого елемента a алгебри $TL_{\mathbb{G}_u, g, \perp}$ та будь-якого $w_0 \in \mathcal{N}_i$ маємо

$$\pi(a)\pi(w_0)x_0 = \pi(aw_0)x_0 = \sum_{v\in\mathcal{N}} \mu_v \pi(v) x_0 =$$

$$= \sum_{w\in\mathcal{N}_i} \mu_w \pi(w) x_0 + \sum_{w\in\mathcal{N}_i} \mu_{wp_i} \pi(w p_i) x_0 + \sum_{v\in\overline{\mathcal{N}_i}} \mu_v \pi(v) x_0 =$$

$$= \sum_{w\in\mathcal{N}_i} (\mu_w + \mu_{wp_i}) \pi(w) x_0 \in L_i(x_0).$$

Отже, $L_i(x_0)$ є інваріантним відносно $*$-зображення π підпростором $\mathcal{H}$. Враховуючи те, що x_0 є ненульовим і $x_0 \in L_i(x_0)$, одержуємо, що $L_i(x_0)$ — ненульовий підпростір.

Твердження доведено.

Легко бачити (див. [2]), що

$$\mathcal{N}_1 = \left\{\Pi_{l_1}(p_1p_2)^{m_1}\right\}_{l_1\in\Lambda_1, 0\le m_1<k+\sigma} \cup \left\{\Pi_{l_2}(p_2p_1)^{m_2} p_2\right\}_{l_2\in\Lambda_2, 0\le m_2<k},$$

$$\mathcal{N}_2 = \left\{\Pi_{l_2}(p_2p_1)^{m_2}\right\}_{l_2\in\Lambda_2, 0\le m_2<k+\sigma} \cup \left\{\Pi_{l_1}(p_1p_2)^{m_1} p_1\right\}_{l_1\in\Lambda_1, 0\le m_1<k},$$

де Λ_d — множина таких шляхів без повторів, що або шлях є „порожнім" (тобто $\Pi_{l_d} = e$), або всі його вершини належать $V_{(d)}$, а кінець сполучено з вершиною d $(d = 1, 2)$.

Для доведення двох наступних тверджень нам потрібна така рівність:

$$(P_1P_2P_1 - \lambda P_1)(P_2P_1)^m = P_1(P_2P_1)^{m+1} - \lambda P_1(P_2P_1)^m =$$

$$= (P_1P_2)^{m+1}P_1 - \lambda(P_1P_2)^m P_1 = (P_1P_2)^m(P_1P_2P_1 - \lambda P_1).$$

Твердження 4. *Нехай π є незвідним $*$-зображенням алгебри $TL_{\mathbb{G}_u, g, \perp}$, $P_1P_2 \neq 0$ і справджується рівність*

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_1 P_1) \ldots (P_1P_2P_1 - \lambda_m P_1) = 0. \tag{2}$$

Тоді існує $l \in \{1, \ldots, m\}$ таке, що $\lambda_l \in (0, 1]$ і виконуються рівності

$$P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1 = 0 \quad і \quad P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2 = 0.$$

Доведення. Оскільки $P_1 \neq 0$, то існують ненульові елементи $\mathcal{H}_1$. Припустимо, що для довільного $l \in \{1, \ldots, m\}$ і довільного ненульового $x \in \mathcal{H}_1$

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)x \neq 0.$$

Візьмемо деякий ненульовий елемент з $\mathcal{H}_1$ і позначимо його x_{m+1}. Визначимо x_l, $l = m, \ldots, 1$, за допомогою рекурентної формули $x_l = (P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)x_{l+1}$. Очевидно, що так визначені x_l належать $\mathcal{H}_1$, отже, всі вони не дорівнюють нулеві. Але, це означає, що

$$x_1 = (P_1P_2P_1 - \lambda_1 P_1) \ldots (P_1P_2P_1 - \lambda_m P_1)x_{m+1} \neq 0.$$

Прийшли до суперечності з (2).

Значить, існують ненульовий $x_0 \in \mathcal{H}_1$ та деякий $l \in \{1, \ldots, m\}$ такі, що

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)x_0 = 0.$$

$*$-Зображення π є незвідним, а простір $L_1(x_0)$ за твердженням 3 — інваріантним відносно π ненульовим підпростором $\mathcal{H}$. Таким чином, $\mathcal{H} = L_1(x_0)$. Отже, для завершення доведення слід показати, що для довільного $w \in \mathcal{N}_1$ виконуються рівності

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)\pi(w)x_0 = 0 \quad \text{і} \quad (P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)\pi(w)x_0 = 0.$$

Доведемо першу рівність. Очевидно, що $P_1\pi\left(\Pi_{l_2}(p_2p_1)^{m_2}p_2\right) \neq 0$, тільки якщо l_2 є „порожнім". В цьому випадку

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)\pi\left((p_2p_1)^{m_2}p_2\right)x_0 = (P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)(P_2P_1)^{m_2+1}x_0 =$$
$$= (P_1P_2)^{m_2+1}(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)x_0 = 0.$$

Далі, $P_1\pi\left(\Pi_{l_1}(p_1p_2)^{m_1}\right) \neq 0$, якщо l_1 „порожній" або починається з вершини j, яка сполучена ребром з вершиною 1. З іншого боку, кінець l_1 також сполучено з вершиною 1, а це можливо в дереві, тільки якщо $l_1 = (j)$. У першому випадку маємо

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)\pi\left((p_1p_2)^{m_1}\right)x_0 = (P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)(P_1P_2)^{m_1}x_0 =$$
$$= (P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)(P_2P_1)^{m_1}x_0 = (P_1P_2)^{m_1}(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)x_0 = 0,$$

у другому

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)\pi\left(p_j(p_1p_2)^{m_1}\right)x_0 = (P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)P_j(P_1P_2)^{m_1}x_0 =$$
$$= \tau_{1j}(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)(P_1P_2)^{m_1}x_0 = 0.$$

Тепер доведемо другу рівність. Очевидно, що $P_2\pi\left(\Pi_{l_1}(p_1p_2)^{m_1}\right) \neq 0$, тільки якщо l_1 є „порожнім". У цьому випадку

$$(P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)\pi\left((p_1p_2)^{m_1}\right)x_0 = (P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)(P_1P_2)^{m_1}x_0 =$$
$$= \left(P_2(P_1P_2)^{m_1+1}P_1 - \lambda_l P_2(P_1P_2)^{m_1}P_1\right)x_0 = P_2(P_1P_2)^{m_1}(P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1)x_0 = 0.$$

Далі, $P_2\pi\left(\Pi_{l_2}(p_2p_1)^{m_2}p_2\right) \neq 0$, якщо l_2 „порожній" або починається з вершини j, яка сполучена ребром з вершиною 2. З іншого боку, кінець l_2 також сполучено з вершиною 2, а це можливо в дереві, тільки якщо $l_2 = (j)$. У першому випадку маємо

$$(P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)\pi\left((p_2p_1)^{m_2}p_2)\right)x_0 = (P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)(P_2P_1)^{m_2}P_2x_0 =$$
$$= (P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)(P_1P_2)^{m_2}x_0 = 0,$$

у другому

$$(P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)\pi\left(p_j(p_2p_1)^{m_2}p_2)\right)x_0 = (P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)P_j(P_2P_1)^{m_2}P_2x_0 =$$
$$= \tau_{2j}(P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2)(P_1P_2)^{m_2}x_0 = 0.$$

Покажемо, що $\lambda_l \in \mathbb{R}$. Дійсно, якщо $\lambda_l \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, то також $P_1P_2P_1 - \overline{\lambda}_l P_1 = 0$, отже, $(\lambda_l - \overline{\lambda}_l)P_1 = 0$. Прийшли до суперечності з $P_1 \neq 0$.

Легко показати, що якщо $\lambda_l < 0$ або $\lambda_l > 1$, то $P_1 = 0$. Знову прийшли до суперечності. Якщо $\lambda_l = 0$, то $P_2P_1P_2 = 0$, звідки $P_1P_2 = 0$. Таким чином, ми довели, що $\lambda_l \in (0, 1]$.

Твердження доведено.

Твердження 5. *Нехай* π *є незвідним* $*$*-зображенням алгебри* $TL_{\mathbb{G}_u,g,\perp}$, $P_1P_2 \neq 0$ *і справджується рівність*

$$(P_1P_2P_1-\lambda_1P_1)\,\ldots\,(P_1P_2P_1-\lambda_mP_1)P_2 \;=\; 0. \qquad (3)$$

Тоді виконується рівність (2).

Доведення. Позначимо через Λ ліву частину (2). Тоді (3) можна записати у вигляді $\Lambda P_2 = 0$.

Внаслідок того, що P_2 є ненульовим, оскільки $P_1P_2 \neq 0$, існує ненульовий $x_0 \in \mathcal{H}_2$. $*$-Зображення π є незвідним, а простір $L_2(x_0)$ за твердженням 3 — інваріантним відносно π ненульовим підпростором $\mathcal{H}$. Таким чином, $\mathcal{H} = L_2(x_0)$. Отже, для завершення доведення слід показати, що для довільного $w \in \mathcal{N}_2$ виконується рівність

$$\Lambda\pi(w)x_0 \;=\; 0.$$

Очевидно, що $P_1\pi\Big(\Pi_{l_2}(p_2p_1)^{m_2}\Big) \neq 0$, тільки якщо l_2 є „порожнім". В цьому випадку

$$\Lambda\pi\Big((p_2p_1)^{m_2}\Big)x_0 \;=\; \Lambda(P_2P_1)^{m_2}\,P_2\,x_0 \;=\; (P_1P_2)^{m_2}\,\Lambda P_2\,x_0 \;=\; 0.$$

Далі, $P_1\pi\Big(\Pi_{l_1}(p_1p_2)^{m_1}\,p_1\Big) \neq 0$, якщо l_1 „порожній" або починається з вершини j, яка сполучена ребром з вершиною 1. З іншого боку, кінець l_1 також сполучено з вершиною 1, а це можливо в дереві, тільки якщо $l_1 = (j)$. У першому випадку маємо

$$\Lambda\pi\Big((p_1p_2)^{m_1}\,p_1\Big)x_0 \;=\; \Lambda\,P_1(P_2P_1)^{m_1}\,P_2\,x_0 \;=\; (P_1P_2)^{m_1}\,\Lambda P_2\,x_0 \;=\; 0,$$

у другому

$$\Lambda\pi\Big(p_j(p_1p_2)^{m_1}\,p_1\Big)x_0 \;=\; \Lambda\,P_1P_jP_1(P_2P_1)^{m_1}\,P_2\,x_0 \;=\; \tau_{1j}\Lambda\,P_1(P_2P_1)^{m_1}\,P_2\,x_0 \;=\; 0.$$

Твердження доведено.

Твердження 6. *Якщо* π *є ненульовим незвідним* $*$*-зображенням і* $P_1P_2 = 0$, *то* $P_i = 0$ *для всіх* $i \in V_{(d)}$, $P_j \neq 0$ *для всіх* $j \in V_{(3-d)}$, *де або* $d = 1$, *або* $d = 2$, *причому* $f_{12}(0) = 0$.

Доведення. Легко бачити, що з рівності $P_1P_2 = 0$ випливає також рівність $P_2P_1 = 0$.

Покажемо, що якщо дві вершини i та j пов'язані шляхом $l = (i_0 = i,\ i_1, \ldots$ $\ldots,\ i_m = j)$, ребра якого $\gamma_{i_k, i_{k+1}}$ належать R_3, то $P_i = 0$ тоді і тільки тоді, коли $P_j = 0$. Це випливає з рівностей

$$P_{i_{k+1}} \;=\; \frac{1}{\tau_{i_k\,i_{k+1}}}P_{i_{k+1}}\,P_{i_k}\,P_{i_{k+1}}, \qquad P_{i_k} \;=\; \frac{1}{\tau_{i_k\,i_{k+1}}}P_{i_k}\,P_{i_{k+1}}\,P_{i_k}.$$

Значить, якщо π є ненульовим незвідним $*$-зображенням, то хоча б один з P_1 і P_2 повинен бути ненульовим.

Припустимо, що $P_1 \neq 0$. Тоді існує ненульовий $x_0 \in \mathcal{H}_1$. Лінійний простір $L_1(x_0)$ (за твердженням 3) є інваріантним відносно незвідного $*$-зображення π ненульовим підпростором $\mathcal{H}$, отже, $\mathcal{H} = L_1(x_0)$. Покажемо, що $P_2\,\pi(\mathcal{N}_1)\,x_0 = 0$. Дійсно, $\pi\Big(\Pi_{l_2}(p_2p_1)^{m_1}\,p_2\Big)x_0 = \pi\Big(\Pi_{l_2}(p_2p_1)^{m_1}\Big)P_2P_1x_0 = 0$, а $\pi\Big(\Pi_{l_1}(p_1p_2)^{m_1}\Big)$ не дорівнює нулеві, тільки якщо $m_1 = 0$. В цьому випадку $P_2\pi(\Pi_{l_1}) \neq 0$, тільки якщо l_1 є „порожнім", але $P_2x_0 = P_2P_1x_0 = 0$. Таким чином, ми довели, що $P_2 = 0$. Якщо припустити, що $P_2 \neq 0$, то аналогічно можна показати, що $P_1 = 0$.

Якщо $\sigma = 0$, то $f_{12}(0) = 0$. Покажемо, що $f_{12}(0) = 0$ у випадку, коли

$P_1P_2 = 0$ і $\sigma = 1$. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — всі корені f_{12}, отже, маємо рівності

$$(P_1P_2 - \lambda_1) \ldots (P_1P_2 - \lambda_k)P_1 = 0,$$
$$(P_2P_1 - \lambda_1) \ldots (P_2P_1 - \lambda_k)P_2 = 0.$$

Якщо $P_1 \neq 0$, то $P_2 = 0$, але з першої рівності маємо $\lambda_1 \ldots \lambda_k P_1 = 0$, отже, один із коренів дорівнює нулю. Якщо $P_2 \neq 0$, то $P_1 = 0$, і тепер вже з другої рівності маємо $\lambda_1 \ldots \lambda_k P_2 = 0$, отже, один із коренів дорівнює нулю і в цьому випадку.

Твердження доведено.

Теорема 1. *Нехай* $\mu_1, \ldots, \mu_m$ — *всі різні дійсні корені полінома* $f_{12}(x)$ *з інтервалу* $[0, 1]$. *Тоді для довільного ненульового незвідного* $*$*-зображення* π *знайдеться єдиний* $l \in \{1, \ldots, m\}$ *такий, що* $\pi = \breve{\pi}_l \varphi_l$, *де* φ_l *є* $*$*-епіморфізмом алгебри* $TL_{\mathbb{G}_u, g, \perp}$ *на її фактор-алгебру* $TL_{\breve{\mathbb{G}}_u, \breve{g}, \perp}$ *по ідеалу* I_l, *який породжений*

а) *парою елементів* $p_1p_2p_1 - \mu_l p_1$ *і* $p_2p_1p_2 - \mu_l p_2$, *якщо* $\mu_l \neq 0$;

б) *одним з елементів* p_1 *або* p_2, *якщо* $\mu_l = 0$,

а $\breve{\pi}_l$ *є єдиним ненульовим незвідним* $*$*-зображенням алгебри* $TL_{\breve{\mathbb{G}}_u, \breve{g}, \perp}$.

Доведення. Припустимо, що $P_1P_2 = 0$. Тоді за твердженням 6 справджується рівність $f_{12}(0) = 0$ і $P_i = 0$ для всіх $i \in V_{(d)}$, де або $d = 1$, або $d = 2$. Тоді $*$-зображення π є продовженням єдиного ненульового незвідного $*$-зображення алгебри $TL_{\Gamma_{(3-d)}, \tau, \perp}$, де $\tau_{ij} = g_{ij}(x)$ для $\gamma_{ij} \in R_{(3-d)}$.

Нехай тепер $P_1P_2 \neq 0$.

Розглянемо спочатку випадок $s = 2k + 1$. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$ — всі корені f_{12}, отже, маємо рівність

$$(P_1P_2 - \lambda_1) \ldots (P_1P_2 - \lambda_k)P_1 = 0.$$

Її можна переписати у вигляді

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_1 P_1) \ldots (P_1P_2P_1 - \lambda_k P_1) = 0.$$

Тоді за твердженням 4 знайдеться l такий, що $\lambda_l \in (0, 1]$ і справджуються рівності

$$P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1 = 0 \quad \text{і} \quad P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2 = 0.$$

Тепер розглянемо випадок $s = 2k$. Тоді $f_{12}(0) = 0$. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k = 0$ — всі корені f_{12}, отже, маємо рівність

$$(P_1P_2 - \lambda_1) \ldots (P_1P_2 - \lambda_{k-1})P_1P_2 = 0.$$

Її можна переписати у вигляді

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_1 P_1) \ldots (P_1P_2P_1 - \lambda_{k-1} P_1)P_2 = 0.$$

Тоді за твердженням 5 виконується також

$$(P_1P_2P_1 - \lambda_1 P_1) \ldots (P_1P_2P_1 - \lambda_{k-1} P_1) = 0,$$

а отже, за твердженням 4 знайдеться l такий, що $\lambda_l \in (0, 1]$ і виконуються рівності

$$P_1P_2P_1 - \lambda_l P_1 = 0 \quad \text{і} \quad P_2P_1P_2 - \lambda_l P_2 = 0.$$

Таким чином, $*$-зображення π є підняттям єдиного незвідного ненульового $*$-зображення алгебри $TL_{\Gamma, \tau, \perp}$, де граф Γ одержуємо, якщо замінити ребро γ_{12} типу s графа $\mathbb{G}$ на ребро типу 3, $\tau_{12} = \lambda_l$ і $\tau_{ij} = g_{ij}(x)$ для інших ребер $\gamma_{ij} \in R_3$.

Теорему доведено.

3. Про $*$-алгебри $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ скінченного гільбертового типу.

Означення 2. *Будемо називати $*$-алгебру $*$-алгеброю скінченного гільбертового типу, якщо вона має тільки скінченну кількість унітарно нееквівалентних незвідних $*$-зображень у гільбертовому просторі.*

Теорема 2. *Алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ є $*$-алгеброю скінченного гільбертового типу для довільних значень параметрів g_{ij} тоді і тільки тоді, коли зв'язний граф $\mathbb{G}$ є деревом і всі ребра, за винятком не більш ніж одного ребра, мають тип* 3.

Доведення. Якщо в дереві немає ребер типу $s > 3$ або є рівно одне ребро типу $s > 3$, то множина незвідних $*$-зображень відповідної алгебри є скінченною (див. [4] та попередній пункт).

Якщо граф містить цикл, то існує набір параметрів $g_{ij} = \tau_{ij}$, при якому існує нескінченна сім'я незвідних $*$-зображень $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ (див. [3, 4]).

Для завершення доведення слід показати, що для дерева, всі ребра якого, за винятком двох, є ребрами типу 3, а виняткові ребра мають тип 4, знайдеться набір параметрів g_{ij}, при якому відповідна $*$-алгебра не є $*$-алгеброю скінченного гільбертового типу. Тоді для довільного дерева $\tilde{\mathbb{G}}$, в якому кількість ребер типу $s > 3$ більша або дорівнює 2, можна підібрати параметри g_{ij} так, що певна $*$-алгебра, задана деяким деревом, яке має в точності два виняткових ребра, тип яких є 4, буде фактор-алгеброю $*$-алгебри $TL_{\tilde{\mathbb{G}},g,\perp}$ (див. твердження 1).

Лема 1 доводить, що для довільного дерева, всі ребра якого, за винятком двох, є ребрами типу 3, а виняткові ребра мають тип 4, знайдеться набір параметрів g_{ij}, при якому відповідна $*$-алгебра не є $*$-алгеброю скінченного гільбертового типу.

Теорему доведено.

В подальшому будемо розглядати граф Кокстера $\mathbb{G}_{4,4}$, який є деревом, ребра $\gamma_{0,1}$, $\gamma_{m-1,m}$ є ребрами типу 4, а інші — ребрами типу 3, крім того, вершини 1, $m-1$ поєднано шляхом $(1, 2, \ldots, m-1)$. Множина вершин графа природним чином розпадається на три частини: $V = V_0 \cup V_{in} \cup V_m$ (а саме, довільні дві різні вершини кожної з частин поєднано шляхом, що складається з ребер типу 3). Позначимо через $\hat{l}$ шлях $(m, m-1, \ldots, 1, 0)$, а через $\mathcal{P}$ множину всіх шляхів $l = (i_0, i_1, \ldots, 0)$ таких, що Π_l є нормальним словом, яке не містить в якості підслова $\Pi_{\hat{l}^* \cup \hat{l}}$. У цьому пункті будемо розглядати випадок, коли $g_{i,j}(x) = \tau$, для всіх ребер типу 3, і $g_{0,1}(x) = g_{m-1,m}(x) = \tau x$, де $\tau \in (0,1)$.

Очевидно, що множина $\mathcal{P}$ складається з двох частин у відповідності з тим, чи $l \in \mathcal{P}$ є шляхом без повторів (позначимо $\mathcal{S}$), чи шляхом з повторами (позначимо $\mathcal{L}'$). Множину $\mathcal{L}'$, у свою чергу, можна розділити ще на дві частини у відповідності з тим, чи містить слово Π_l в якості підслова $\Pi_{\hat{l}}$ (позначимо $\mathcal{L}$), чи ні (позначимо $\mathcal{L}_0$).

Твердження 7. 1. *Для кожного $l \in \mathcal{L}$ існують єдиний $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ та єдиний набір шляхів без повторів*

$$l_s = (i_0, i_1, \ldots, j), \qquad l_e = (j, j-1, \ldots, 0), \qquad \tilde{l} = (j, j+1, \ldots, m)$$

таких, що $l = l_s \cup \tilde{l} \cup \hat{l}$ і $\tilde{l}^* \cup l_e = \hat{l}$. Рівність

$$\omega(l) = l_s \cup l_e$$

визначає ін'єктивне відображення $\omega : \mathcal{L} \to \mathcal{S}$.

2. *Існують природні бієктивні відображення* $\psi : V \to \mathcal{S}$ *і* $\varphi : V_{in} \to \mathcal{L}$. *Крім того, правильною є рівність* $\omega(\varphi(j)) = \psi(j)$ *для всіх* $j \in V_{in}$.

Доведення очевидне.

Нехай $\mathcal{H}$ — лінійний простір, який отримано як множину всіх формальних лінійних комбінацій шляхів із множини $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{S} \bigcup \mathcal{L}$. Для довільного $l = (i_0, i_1, \ldots, 0) \in \hat{\mathcal{P}} \setminus \{\psi(0)\}$ визначимо операцію скорочення шляху η формулою

$$\eta(l) = (i_1, \ldots, 0).$$

Візьмемо деяке $\nu \in (0,1)$ і визначимо півторалінійну форму $B_{\tau,\nu}$ на формальному лінійному базисі $\hat{\mathcal{P}}$ формулами

$$B_{\tau,\nu}(l,l) = 1, \quad l \in \hat{\mathcal{P}},$$

$$B_{\tau,\nu}(l,\eta(l)) = B_{\tau,\nu}(\eta(l),l) = \sqrt{\tau}, \quad l \in \hat{\mathcal{P}} \setminus \{\psi(0), \psi(m), \varphi(m-1)\},$$

$$B_{\tau,\nu}(l,\eta(l)) = B_{\tau,\nu}(\eta(l),l) = \sqrt{\nu\tau}, \quad l = \psi(m),$$

$$B_{\tau,\nu}(l,\eta(l)) = B_{\tau,\nu}(\eta(l),l) = \sqrt{(1-\nu)\tau}, \quad l = \varphi(m-1).$$

Для решти пар l_1, l_2 покладемо $B_{\tau,\nu}(l_1,l_2) = 0$.

Твердження 8. *Існує* $\tau_0 \in (0,1]$ *такий, що для довільних* $\tau \in (0,\tau_0)$, $\nu \in (0,1)$ *форма* $B_{\tau,\nu}$ *визначає скалярний добуток у лінійному просторі* $\mathcal{H}$.

Доведення. Введемо на $\hat{\mathcal{P}}$ довільний лінійний порядок і розглянемо $(|\hat{\mathcal{P}}| \times |\hat{\mathcal{P}}|)$-матрицю

$$G_{\tau,\nu} = \left(B_{\tau,\nu}(l_1,l_2)\right)_{l_1,l_2 \in \hat{\mathcal{P}}}.$$

Знайдемо такі τ, що для довільного $\nu \in (0,1)$ матриця $G_{\tau,\nu}$ є додатно визначеною.

Для довільного $l \in \hat{\mathcal{P}}$ введемо l-й діагональний мінор формулою

$$G_{\tau,\nu,l} = \left(B_{\tau,\nu}(l_1,l_2)\right)_{l_1,l_2 \in \hat{\mathcal{P}}_l}, \quad \hat{\mathcal{P}}_l = \left\{l' \in \hat{\mathcal{P}} \,\middle|\, l' \le l\right\}.$$

Легко зрозуміти, що для довільного $l \in \hat{\mathcal{P}}$ і для довільного $\nu \in (0,1)$

$$\lim_{\tau \to 0+} G_{\tau,\nu,l} \to I_l.$$

Отже, $\det G_{\tau,\nu,l} = 1 + \sqrt{\tau}\, F_l(\tau,\nu)$, де $F_l(\tau,\nu) = f_l(\sqrt{\tau}, \sqrt{\nu}, \sqrt{1-\nu})$, а f_l — деякий поліном трьох змінних. Очевидно, що $F_l(\tau,\nu)$ є неперервною функцією на квадраті $[0,1] \times [0,1]$. Таким чином, існують m_l, $M_l \in \mathbb{R}$ такі, що $m_l \le F_l(\tau,\nu) \le M_l$ для довільного $\tau \in (0,1)$, $\nu \in (0,1)$. Покладемо

$$m = \min\left\{m_l \,\middle|\, l \in \hat{\mathcal{P}}\right\},$$

$$\tau_0 = \begin{cases} m^{-2}, & m < 0, \\ 1, & m \ge 0. \end{cases}$$

Тоді для довільних $\tau \in (0,\tau_0)$, $\nu \in (0,1)$ і довільного $l \in \hat{\mathcal{P}}$ виконуються нерівності $\det G_{\tau,\nu,l} > 0$, а отже, $G_{\tau,\nu}$ є додатно визначеною.

Твердження доведено.

Зафіксуємо деякий $\tau \in (0,\tau_0)$. Для довільного $\nu \in (0,1)$ позначимо через $\mathcal{H}_\nu$ гільбертів простір зі скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_\nu = B_{\tau,\nu}(\cdot,\cdot)$. Для довільного $i \in V_{in}$ оператор $P_{\nu,i}$ означимо як ортогональний проектор на лінійну оболонку пари векторів $\psi(i)$, $\varphi(i)$, а для довільного $i \in V \setminus V_{in}$ оператор $P_{\nu,i}$ — як ортогональний проектор на лінійну оболонку вектора $\psi(i)$.

Твердження 9. *Для довільного* $x \in \mathcal{H}_\nu$ *є правильною формула*

$$P_{\nu,i}\, x \;=\; \begin{cases} \langle x, \psi(i)\rangle_\nu\, \psi(i) + \langle x, \varphi(i)\rangle_\nu\, \varphi(i), & i \in V_{in}, \\ \langle x, \psi(i)\rangle_\nu\, \psi(i), & i \in V \backslash V_{in}. \end{cases}$$

Для доведення достатньо зазначити, що $\langle P_{\nu,i}\, x, \psi(i)\rangle_\nu = \langle x, \psi(i)\rangle_\nu$ для довільного $i \in V$ та $\langle P_{\nu,i}\, x, \varphi(i)\rangle_\nu = \langle x, \varphi(i)\rangle_\nu$ для довільного $i \in V_{in}$.

Лема 1. *Для кожного* $\nu \in (0,1)$ *відображення*

$$\pi_\nu\colon\; TL_{\mathbb{G}_{4,4,g,\perp}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\nu)\colon p_i \mapsto P_{\nu,i}$$

є незвідним $*$*-зображенням, причому для різних* ν *так означені* $*$*-зображення не є унітарно еквівалентними.*

Доведення. Для скорочення запису доозначимо φ на $V \backslash V_{in}$ формулою $\varphi(i) = 0$. Тоді для довільного $i \in V$, $x \in \mathcal{H}_\nu$ є правильною рівність

$$P_{\nu,i}\, x \;=\; \langle x, \psi(i)\rangle_\nu\, \psi(i) \;+\; \langle x, \varphi(i)\rangle_\nu\, \varphi(i).$$

Покажемо, що π_ν є $*$-зображенням.

Очевидно, що для довільного $x \in \mathcal{H}_\nu$ правильною є рівність $P_{\nu,i}^2\, x \;=\; P_{\nu,i}\, x$. Далі, якщо i та j не пов'язані ребром, то для довільного $x \in \mathcal{H}_\nu$

$$\begin{aligned} P_{\nu,i}P_{\nu,j}\, x \;&=\; P_{\nu,i}\big(\langle x, \psi(j)\rangle_\nu \psi(j) + \langle x, \varphi(j)\rangle_\nu \varphi(j)\big) \;= \\ &=\; \langle x, \psi(j)\rangle_\nu \big(\langle \psi(j), \psi(i)\rangle_\nu \psi(i) + \langle \psi(j), \varphi(i)\rangle_\nu \varphi(i)\big) \;+ \\ &+\; \langle x, \varphi(j)\rangle_\nu \big(\langle \varphi(j), \psi(i)\rangle_\nu \psi(i) + \langle \varphi(j), \varphi(i)\rangle_\nu \varphi(i)\big) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Далі, нехай i та j поєднано ребром типу 3, тоді можна вважати, що $\psi(i) = \eta(\psi(j))$. Більш того, або i, $j \in V \backslash V_{in}$, в цьому випадку $\varphi(i) = \varphi(j) = 0$, або i, $j \in V_{in}$, в цьому випадку виконується одна з двох рівностей: якщо $j \in \{2, \ldots, m-1\}$, то $\varphi(j) = \eta(\varphi(i))$, інакше $\varphi(i) = \eta(\varphi(j))$. Отже, для довільного $x \in \mathcal{H}_\nu$ маємо рівності

$$\begin{aligned} P_{\nu,j}P_{\nu,i}P_{\nu,j}\, x \;&=\; P_{\nu,j}P_{\nu,i}\big(\langle x, \psi(j)\rangle_\nu \psi(j) + \langle x, \varphi(j)\rangle_\nu \varphi(j)\big) \;= \\ &=\; \sqrt{\tau}\, P_{\nu,j}\big(\langle x, \psi(j)\rangle_\nu \psi(i) + \langle x, \varphi(j)\rangle_\nu \varphi(i)\big) \;= \\ &=\; \tau\big(\langle x, \psi(j)\rangle_\nu \psi(j) + \langle x, \varphi(j)\rangle_\nu \varphi(j)\big) \;=\; \tau P_{\nu,j}\, x. \end{aligned}$$

Залишилось перевірити співвідношення для ортопроекторів, що відповідають вершинам, які поєднано ребрами типу 4. Для довільного $x \in \mathcal{H}_\nu$ маємо

$$\begin{aligned} P_{\nu,0}P_{\nu,1}P_{\nu,0}\, x \;&=\; P_{\nu,0}P_{\nu,1}\langle x, \psi(0)\rangle_\nu\, \psi(0) \;=\; \sqrt{\tau}\, P_{\nu,0}\langle x, \psi(0)\rangle_\nu\, \psi(1) \;= \\ &=\; \tau\langle x, \psi(0)\rangle_\nu\, \psi(0) \;=\; \tau P_{\nu,0}\, x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\nu,m}P_{\nu,m-1}P_{\nu,m}\, x \;&=\; P_{\nu,m}P_{\nu,m-1}\langle x, \psi(m)\rangle_\nu\, \psi(m) \;= \\ &=\; \langle x, \psi(m)\rangle_\nu\, P_{\nu,m}\big(\sqrt{\nu\tau}\,\psi(m-1) + \sqrt{(1-\nu)\tau}\,\varphi(m-1)\big) \;= \\ &=\; \langle x, \psi(m)\rangle_\nu (\nu\tau + (1-\nu)\tau)\psi(m) \;=\; \tau\langle x, \psi(m)\rangle_\nu\, \psi(m) \;=\; \tau P_{\nu,m}\, x. \end{aligned}$$

Як наслідок отримаємо, що виконуються співвідношення

$$P_{\nu,0}P_{\nu,1}P_{\nu,0}P_{\nu,1} \;=\; \tau P_{\nu,0}P_{\nu,1}, \qquad P_{\nu,1}P_{\nu,0}P_{\nu,1}P_{\nu,0} \;=\; \tau P_{\nu,1}P_{\nu,0},$$

$$P_{\nu,m}P_{\nu,m-1}P_{\nu,m}P_{\nu,m-1} \;=\; \tau P_{\nu,m}\, P_{\nu,m-1}, \qquad P_{\nu,m-1}P_{\nu,m}P_{\nu,m-1}P_{\nu,m} \;=\; \tau P_{\nu,m-1}P_{\nu,m}.$$

Доведемо незвідність $*$-зображення. Припустимо, що деякий оператор A комутує з усіма $P_{\nu,i}$, $i \in V$, тоді $A(\operatorname{Im} P_{\nu,i}) \subset \operatorname{Im} P_{\nu,i}$. Отже, існує деякий $\lambda \in \mathbb{C}$ такий, що $A\psi(0) = \lambda\psi(0)$. Тоді $\lambda\sqrt{\tau}\,\psi(1) = \lambda P_{\nu,1}\psi(0) = P_{\nu,1}A\psi(0) =$

$= A\sqrt{\tau}\,\psi(1)$. Аналогічним чином показується, що якщо $A\psi(i) = \lambda\psi(i)$ і j поєднано з i ребром, то $A\psi(j) = \lambda\psi(j)$.

Покажемо, що $A\varphi(m-1) = \lambda\varphi(m-1)$. Ми вже показали, що $A\psi(m) = \lambda\psi(m)$, тоді

$$P_{\nu,m-1}A\psi(m) = A\big(\sqrt{\nu\tau}\,\psi(m-1) + \sqrt{(1-\nu)\tau}\,\varphi(m-1)\big) =$$
$$= \lambda\sqrt{\nu\tau}\,\psi(m-1) + \sqrt{(1-\nu)\tau}\,A\varphi(m-1) =$$
$$= \lambda P_{\nu,m-1}\psi(m) = \lambda\big(\sqrt{\nu\tau}\,\psi(m-1) + \sqrt{(1-\nu)\tau}\,\varphi(m-1)\big).$$

Далі, для будь-яких вершин $i,\ j \in V_{in}$, поєднаних ребром, зі справедливості рівності $A\varphi(i) = \lambda\varphi(i)$ випливає рівність $A\varphi(j) = \lambda\varphi(j)$. Дійсно, $P_{\nu,j}A\varphi(i) = \lambda P_{\nu,j}\varphi(i) = \lambda\sqrt{\tau}\varphi(j) = AP_{\nu,j}\varphi(i) = \sqrt{\tau}A\varphi(j)$.

Таким чином, ми показали, що $A = \lambda I$, отже, $*$-зображення є незвідним.

Для того щоб довести, що для різних ν $*$-зображення не є унітарно еквівалентними, розглянемо оператор

$$W_\nu = U^\nu_{0,1}U^\nu_{1,2}\ldots U^\nu_{m-1,m}U^\nu_{m,m-1}\ldots U^\nu_{2,1}U^\nu_{1,0}, \quad \text{де} \quad U^\nu_{i,j} = \frac{P_{\nu,i}P_{\nu,j}}{\sqrt{\tau}}.$$

Легко бачити, що якщо $i,\ j \in V_{in}$ пов'язані ребром, то

$$U^\nu_{i,j}\big(\mu_1\psi(j) + \mu_2\varphi(j)\big) = \mu_1\psi(i) + \mu_2\varphi(i),$$

отже,

$$W_\nu\psi(0) = U^\nu_{0,1}U^\nu_{1,2}\ldots U^\nu_{m-1,m}U^\nu_{m,m-1}\ldots U^\nu_{2,1}\psi(1) =$$
$$= U^\nu_{0,1}U^\nu_{1,2}\ldots U^\nu_{m-1,m}U^\nu_{m,m-1}\,\psi(m-1) = \sqrt{\nu}\,U^\nu_{0,1}U^\nu_{1,2}\ldots U^\nu_{m-1,m}\,\psi(m) =$$
$$= \sqrt{\nu}\,U^\nu_{0,1}U^\nu_{1,2}\ldots U^\nu_{m-2,m-1}\big(\sqrt{\nu}\,\psi(m-1) + \sqrt{1-\nu}\,\varphi(m-1)\big) =$$
$$= \sqrt{\nu}\,U^\nu_{0,1}\big(\sqrt{\nu}\,\psi(1) + \sqrt{1-\nu}\,\varphi(1)\big) = \nu\psi(0).$$

Нехай π_ν і $\pi_{\nu'}$ унітарно еквівалентні, тобто існує унітарний оператор V: $\mathcal{H}_\nu \to \mathcal{H}_{\nu'}$ такий, що $V\pi_\nu(a) = \pi_{\nu'}(a)V$ для будь-якого $a \in TL_{\mathbb{G}_{4,4},g,\perp}$. Тоді $\nu V\psi(0) = VW_\nu\psi(0) = W_{\nu'}V\psi(0)$, тобто $V\psi(0)$ є власним вектором $W_{\nu'}$ з власним значенням ν, але цей вектор належить $\operatorname{Im}P_{\nu',0}$, отже, $V\psi(0) = \beta\psi(0)$ для деякого $\beta \neq 0$. Тоді $W_{\nu'}V\psi(0) = \beta W_{\nu'}\psi(0) = \beta\nu'\psi(0) = \beta\nu\psi(0)$, звідки отримуємо $\nu = \nu'$. Таким чином, ми показали, що для різних ν і ν' $*$-зображення π_ν та $\pi_{\nu'}$ не є унітарно еквівалентними.

Лему доведено.

Автори висловлюють щиру подяку С. А. Кругляку і В. І. Рабановичу за корисні поради і обговорення питань, що досліджувалися в роботі.

1. *Graham J. J.* Modular representations of Hecke algebras and related algebras: Ph. D. thesis. – Sydney, 1995. – 117 p.
2. *Попова Н. Д., Самойленко Ю. С., Стрілець О. В.* Про ріст деформацій алгебр, пов'язаних з графами Кокстера // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 826 – 837.
3. *Popova N.* On one algebra of Temperley – Lieb type // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. – 2002. – **43**, Pt 2. – P. 486 – 489.
4. *Власенко М. А., Попова Н. Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 606 – 615.
5. *Popova N. D., Samoilenko Yu. S.* On the existence of configurations of subspaces in a Hilbert space with fixed angles // J. Symmetry, Integrab. and Geom.: Meth. and Appl. – 2006. – **2**, № 55. – P. 1 – 5.
6. *Иванов С. В., Попова Н. Д.* О представлениях некоторых алгебр, связанных с графами Кокстера // Учен. зап. ТНУ им. В. И. Вернадского. Сер. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2005. – **19** (**58**), № 1. – С. 1 – 11.

Одержано 19.03.07