УДК 517.958+517.95

С. В. Янчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев;
Ин-т Вейерштрасса прикл. анализа и стохастики, Берлин, Германия;
Ин-т математики, Гумбольдт-ун-т, Берлин, Германия),
К. Р. Шнайдер (Ин-т Вейерштрасса прикл. анализа и стохастики, Берлин, Германия),
О. Б. Лыкова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АМПЛИТУДНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРОВ

We consider a system of ordinary differential equations describing the dynamics of two coupled single-mode semiconductor lasers. In particular, we investigate solutions corresponding to amplitude synchronization. We show that the set of these solutions forms a three-dimensional invariant manifold in the phase space. We investigate the stability of trajectories on this manifold in the tangential direction and in the direction transversal to it. We obtain conditions for the existence of globally asymptotically stable solutions of equations on the manifold that are synchronized with respect to the amplitude.

Розглядається система звичайних диференціальних рівнянь, що описують динаміку двох взаємозв'язаних одномодових напівпровідникових лазерів. Зокрема, вивчаються розв'язки, що відповідають амплітудній синхронізації. Показано, що множина таких розв'язків утворює в фазовому просторі тривимірний інваріантний многовид. Досліджується стійкість траєкторій на цьому многовиді як у тангенціальному, так і в трансверсальному до нього напрямках. Встановлено умови існування глобально асимптотично стійких розв'язків рівнянь на многовиді, що синхронізовані за амплітудою.

1. Введение. Полупроводниковые лазеры[1] успешно применяются во многих приложениях [1]. Особый интерес представляют задачи синхронизации взаимодействующих лазеров [2 – 12]. Такие задачи возникают, в частности, в связи с необходимостью увеличения мощности излучения с помощью лазерных решеток [13], а также построения оптических систем для передачи защищенной информации. Математической моделью данной задачи является система взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= i\delta E_1 + (1+i\alpha)N_1E_1 + \beta e^{-i\varphi}E_2, \\ \frac{dN_1}{dt} &= \varepsilon\left[J - N_1 - (2N_1+1)|E_1|^2\right], \\ \frac{dE_2}{dt} &= (1+i\alpha)N_2E_2 + \beta e^{-i\varphi}E_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \varepsilon\left[J - N_2 - (2N_2+1)|E_2|^2\right], \end{aligned} \tag{1}$$

где переменные E_1, E_2 — комплексные амплитуды оптического поля, N_1, N_2 — вещественные переменные (плотности носителей зарядов в активной зоне лазера), δ задает расстройку частот лазеров, J обозначает величину накачки, β, $0 < \beta < 1/2$, характеризует силу взаимодействия лазеров, φ — фаза взаимодействия, ε — отношение среднего времени жизни фотона к среднему времени жизни носителей. Наличие малого параметра ε обусловливает медленно-быструю структуру системы (1).

Отметим некоторые важные свойства системы (1), связанные с симметриями.

Симметрия $SO(2)$:

[1] Лазер — это устройство, позволяющее генерировать когерентное электромагнитное излучение.

$$(E_1, N_1, E_2, N_2) \to (E_1 e^{i\mu}, N_1, E_2 e^{i\mu}, N_2)$$

влечет за собой существование инвариантных периодических решений (CW-решений [12, 3])

$$E_j(t) = a_j e^{i\omega t + iv_j}, \qquad N_j(t) = r_j, \tag{2}$$

где ω, a_j, v_j, $r_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. Такие решения называют также стационарными, так как они соответствуют режимам со стационарной интенсивностью $|E_j(t)|$. Более того, такая симметрия означает, что при соответствующих значениях параметров система (1) имеет модулированные волновые решения (MW-решения), т. е. квазипериодические решения вида

$$E_j(t) = a_j(t) e^{i\omega t + iv_j}, \quad N_j(t) = r_j(t), \quad a_j(t+T) = a_j(t), \quad r_j(t+T) = r_j(t), \tag{3}$$

где ω, T, $a_j(t)$, $r_j(t)$, $v_j \in \mathbb{R}$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Другую важную симметрию система (1) имеет при $\varphi = 0$. Это Z_2-симметрия:

$$(|E_1|, N_1, |E_2|, N_2) \to (|E_2|, N_2, |E_1|, N_1),$$

при которой система (1) инвариантна.

В дальнейшем полагаем, что $\varphi = 0$. Физически $\varphi = 0$ соответствует случаю, когда расстояние между лазерами равно целому числу длин оптических волн [3].

2. Редуцированная система. Наличие в системе (1) $SO(2)$-симметрии позволяет понизить размерность системы. Это можно осуществить посредством замены переменных $E_j \to (a_j, \mu_j)$:

$$E_1(t) = a_1(t) e^{i\mu_1(t)}, \qquad E_2(t) = a_2(t) e^{i\mu_2(t)},$$

где a_j и μ_j — новые вещественные переменные. При этом полагаем, что $a_1(t) > 0$, $a_2(t) > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Через $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$ обозначим разность фаз лазеров. В результате замены система (1) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= N_1 a_1 + \beta a_2 \cos\Delta\psi, \\
\frac{dN_1}{dt} &= \varepsilon\left[J - N_1 - (2N_1 + 1) a_1^2\right], \\
\frac{da_2}{dt} &= N_2 a_2 + \beta a_1 \cos\Delta\psi, \\
\frac{dN_2}{dt} &= \varepsilon\left[J - N_2 - (2N_2 + 1) a_2^2\right], \\
\frac{d\Delta\psi}{dt} &= \delta + (N_1 - N_2)\alpha - \beta\left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right)\sin\Delta\psi.
\end{aligned} \tag{4}$$

Система (4) уже не обладает $SO(2)$-симметрией и рассматривается в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4 \times S^1$. Поэтому в новых переменных все CW-решения вида (2) становятся стационарными, а все MW-решения вида (3) — периодическими. Для системы (4) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Подпространство*

$$M := \{(a_1, N_1, a_2, N_2) : a_1 = a_2,\ N_1 = N_2\}$$

инвариантно относительно потока, задаваемого системой (4).

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из того факта, что система (4) инвариантна относительно преобразования $T: (a_1, N_1, a_2, N_2) \to \to (a_2, N_2, a_1, N_1)$. Поскольку подпространство M является неподвижной точкой этого преобразования, оно инвариантно относительно потока, задаваемого системой (4).

Подпространство M в дальнейшем будем называть многообразием синхронизированных по амплитуде решений системы (4). Так как в общем случае $\Delta\psi \neq \neq 0$, фазы могут быть не синхронизированными. Это позволяет отметить наличие нового явления в системе взаимодействующих лазеров, которое характеризуется синхронизацией только некоторых из компонент двух взаимосвязанных неидентичных систем.

Легко убедиться, что на многообразии M система (4) сводится к рассмотрению системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, подставляя $N_1 = N_2 = N$, $a_1 = a_2 = a$ в (4), получаем

$$\frac{da}{dt} = Na + \beta a \cos\Delta\psi, \tag{5}$$

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon\left[J - N - (2N+1)a^2\right], \tag{6}$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = \delta - 2\beta\sin\Delta\psi. \tag{7}$$

Динамика системы (5) – (7) обусловливает динамику исходной системы скоростных уравнений, синхронизированных по амплитуде. Наша цель состоит в том, чтобы доказать существование устойчивых решений, например, глобально асимптотически устойчивого положения равновесия или периодического решения системы (5) – (7).

Система (5) – (7) имеет следующие особенности:

а) пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$ является фазовым;

б) уравнение (7) не зависит от других уравнений; существует явный общий интеграл $\Delta\psi(t, c)$ этого скалярного дифференциального уравнения;

в) подпространство $\{a = 0\} \times \mathbb{R} \times S^1$ инвариантно относительно потока, задаваемого системой (5) – (7);

г) система (5) – (7) инвариантна относительно преобразования $(a, N, \Delta\psi) \to \to (-a, N, \Delta\psi)$.

Согласно свойству б) систему (5) – (7) можно рассматривать как двумерную неавтономную систему. В частности, если параметр β мал — как двумерную автономную систему с неавтономным возмущением

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= a\left[N + \beta\cos\Delta\psi(t,c)\right], \\ \frac{dN}{dt} &= \varepsilon\left[J - N - (2N+1)a^2\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Если уравнение (7) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $\Delta\psi_0$, то в фазовом пространстве системы (5) – (7) существует притягивающее инвариантное подпространство $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{\Delta\psi_0\}$.

Учитывая свойства в) и г), достаточно рассмотреть поведение системы (5) – (7) в полуплоскости $a > 0$[2]. После замены $x = \ln a$ из (8) получим систему

$$\frac{dx}{dt} = N + \beta\cos\Delta\psi(t,c), \tag{9}$$

[2] Выбор $a > 0$ является также физически обоснованным.

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon\big[J - N - (2N+1)e^{2x}\big]. \tag{10}$$

Заметим, что полученная система эквивалентна уравнению Льенара

$$x'' + \varepsilon x'(1+2e^{2x}) + \beta\sin\Delta\psi(t,c)\frac{d}{dt}\Delta\psi(t,c) +$$
$$+ \varepsilon\big[(1-2\beta\cos\Delta\psi(t,c))e^{2x} - J - \beta\cos\Delta\psi(t,c)\big] = 0, \tag{11}$$

где штрих обозначает производную по t.

Следующая лемма описывает динамику уравнения (7).

Лемма 1. *Пусть* δ *и* β — *положительные параметры, причем* β *удовлетворяет неравенству*

$$0 < \beta < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Тогда:

i) *при* $\delta = 2\beta$ *уравнение* (7) *имеет на* S^1 *единственное негрубое неустойчивое положение равновесия* $\Delta\psi = \Delta\psi_m = \pi/2 \pmod{2\pi}$;

ii) *при* $0 < \delta < 2\beta$ *уравнение* (7) *имеет в точности два положения равновесия* $\Delta\psi = \Delta\psi_0 < \pi/2$ *и* $\Delta\psi = \Delta\psi_1 > \pi/2$; *положение равновесия* $\Delta\psi_0$ ($\Delta\psi_1$) *является асимптотически устойчивым* (*неустойчивым*);

iii) *при* $\delta > 2\beta > 0$ *уравнение* (7) *имеет периодическое решение*

$$\Delta\psi = \Delta\psi_p(t) = 2\arctan\left[\frac{2\beta}{\delta} + \tan\left(\frac{t}{2}\sqrt{\delta^2-4\beta^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2\beta}{\delta}\right)^2}\right] \tag{13}$$

с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta^2-4\beta^2}},$$

удовлетворяющее соотношению $\Delta\psi_p(0) = 2\arctan(2\beta/\delta)$ (*т. е.* $\Delta\psi_p(T) = \Delta\psi_p(0) + 2\pi$).

Из этой леммы следует, что при $0 < \delta < 2\beta$ существуют два положения равновесия и две гетероклинические траектории, соединяющие положения равновесия. При $\delta = 2\beta$ положения равновесия совпадают и существует одна гомоклиническая траектория. При $\delta > 2\beta$ существует периодическое решение, которое рождается из гомоклинической траектории, т. е. период этого решения стремится к бесконечности, если δ стремится к 2β.

3. Положения равновесия на многообразии M и их глобальная устойчивость. В данном пункте мы исследуем положения равновесия системы (5) – (7) и их устойчивость. Из леммы 1 следует, что система (5) – (7) может иметь устойчивое положение равновесия только при условии $0 < \delta < 2\beta$, при этом $\Delta\psi = \Delta\psi_0 < \pi/2$. Следовательно, система (5) – (7) на устойчивом подпространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\{\Delta\psi_0\}$ имеет вид

$$\frac{da}{dt} = aN + a\beta\cos\Delta\psi_0, \tag{14}$$

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon\big[J - N - (2N+1)e^{2x}\big]. \tag{15}$$

При условии (12) вследствие того, что $J > 0$, $\cos\Delta\psi_0 > 0$, эта система имеет положения равновесия

$$R_0: \ a = a_0 = \sqrt{\frac{J + \beta\cos\Delta\psi_0}{1 - 2\beta\cos\Delta\psi_0}}, \qquad N = -\beta\cos\Delta\psi_0, \tag{16}$$

а также

$$R_1: \ a = 0, \qquad N = J. \tag{17}$$

Собственные значения $\lambda_{1,2}$, соответствующие положению равновесия R_0, имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon(1+2J)}{2(1-2\beta\cos\Delta\psi_0)} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon(1+2J)}{2(1-2\beta\cos\Delta\psi_0)}\right)^2 - 2\varepsilon(J+2\beta\cos\Delta\psi_0)}.$$

При условиях (12) и $J > 0$ собственные значения λ_1, λ_2 имеют отрицательные действительные части. Это означает, что положение равновесия R_0 является (локально) асимптотически устойчивым. Чтобы исследовать область притяжения положения равновесия R_0, воспользуемся тем, что систему (14), (15) можно свести к уравнению Льенара (11) заменой $x = \ln a$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\frac{dx}{dt}(1+2e^{2x}) + \varepsilon\left[(1-2\beta\cos\Delta\psi_0)e^{2x} - J - \beta\cos\Delta\psi_0\right] = 0.$$

После замены

$$x = x_0 + \xi,$$

где $x_0 = \ln a_0$, получим

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + f(\xi)\frac{d\xi}{dt} + g(\xi) = 0.$$

Здесь

$$f(\xi) = \varepsilon\left[1 + 2e^{2x_0}e^{2\xi}\right],$$

$$g(\xi) = \varepsilon\left[(1-2\beta\cos\Delta\psi_0)e^{2x_0}e^{2\xi} - J - \beta\cos\Delta\psi_0\right].$$

Следовательно, имеют место соотношения

$$f(\xi) > 0 \quad \text{для всех} \quad \xi,$$

$$\left|\int_0^{\xi} f(\sigma)d\sigma\right| \to \infty \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty,$$

$$g(0) = 0, \quad g'(\xi) > 0 \quad \text{для всех} \quad \xi.$$

Применяя известный результат [14, с. 225], можем заключить, что положение равновесия R_0 является глобально асимптотически устойчивым относительно переменных x, N, а следовательно, область притяжения в переменных a, N включает $a > 0$, $N \in \mathbb{R}$. В результате имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\delta < 2\beta$, J, $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < 1/2$. *Тогда положение равновесия* R_0 *системы* (5) – (7) *асимптотически устойчиво с областью притяжения* $\{a > 0\} \times \mathbb{R} \times S^1$.

Заметим, что с учетом симметрии аналогичное утверждение имеет место для симметричного положения равновесия

$$R_0': \ a = -a_0, \qquad N = -\beta\cos\Delta\psi_0 \tag{18}$$

в полуплоскости $a < 0$.

4. Возникновение устойчивых периодических решений на многообра-

зии $\boldsymbol{M}$**.** В практически важном случае, когда взаимодействие между лазерами слабое, т. е. $\beta << 1$, можно установить существование устойчивых периодических решений системы на многообразии.

Теорема 3. *Если параметр* $\beta > 0$ *достаточно мал и, кроме того,* ε, $J > 0$, *то в системе* (5) – (7) *существует устойчивый предельный цикл, который при* $\beta \to 0$ *стремится к положению равновесия* $N = 0$, $a = \sqrt{J}$.

Доказательство. При $\beta = 0$ положение равновесия системы (5), (6) $N = 0$, $a = \sqrt{J}$ имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon(1+2J)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon(1+2J)}{2}\right)^2 - 2\varepsilon J}$$

с отрицательными действительными частями: $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$, т. е. является экспоненциально устойчивым. Далее, поскольку для каждого малого β имеет место неравенство $\delta > 2\beta$, то решение уравнения (7) имеет вид (13) и функция $\cos\Delta\psi(t)$ является периодической по t. Утверждение теоремы 3 следует из общей теоремы о периодическом возмущении экспоненциально устойчивого положения равновесия [15].

Одним из характерных свойств уравнений динамики полупроводниковых лазеров является малость параметра ε. Учитывая этот факт, докажем существование периодических решений в другом важном случае, когда не предполагается малость β.

Теорема 4. *Если параметр* $\varepsilon > 0$ *достаточно мал, а также* $J > 0$ *и* $\delta > 2\beta$, *то в системе* (5) – (7) *существует устойчивый предельный цикл.*

Для доказательства данной теоремы используем более общий результат, доказательство которого выходит за рамки данной работы. Здесь мы сформулируем этот результат.

Теорема 5. *Пусть задана периодическая краевая задача*

$$x'' + \varepsilon f(t,x,x') + g(t) = 0, \qquad x(0) = x(T), \qquad x'(0) = x'(T), \tag{19}$$

где $T > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $g \in C(\mathbb{R})$. *Если*

$$\int_0^T g(s)ds = 0, \tag{20}$$

то при $\varepsilon = 0$ *существует однопараметрическое семейство решений задачи* (19). *При достаточно малом* $\varepsilon \neq 0$ *существует единственное решение задачи* (19), *если выполнены следующие условия*:

1) *уравнение*

$$\int_0^T f(s, \zeta + \mu(s), \mu'(s))ds = 0 \tag{21}$$

имеет единственное решение ζ_0, *где*

$$\mu(t) = \frac{t}{T}\int_0^T\int_0^s g(\sigma)d\sigma ds - \int_0^t\int_0^s g(\sigma)d\sigma ds; \tag{22}$$

2) $\displaystyle\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, \zeta_0 + \mu(s), \mu'(s))ds \neq 0.$

Доказательство теоремы **4.** Учитывая (11), систему (5) – (7) можно записать в виде (19) с

$$f(t,x,x') = -J + x' + \beta\cos\Delta\psi(t) + \left(2x' - 2\beta\cos\Delta\psi(t) + 1\right)e^{2x},$$
$$g(t) = \beta\sin\Delta\psi(t)\Delta\psi'(t) = \beta\sin\Delta\psi(t)\left(\delta - 2\beta\sin\Delta\psi(t)\right),$$

где для краткости опущен параметр c в $\Delta\psi(t,c)$ и $\Delta\psi(t)$ — T-периодическое решение (7) согласно лемме 1. Для доказательства теоремы 4 достаточно проверить выполнение условий теоремы 5.

1. Проверим выполнение условия (20). Имеем

$$\int_0^T \beta\sin\Delta\psi(s)\Delta\psi'(s)ds = -\beta\left(\cos\Delta\psi(T) - \cos\Delta\psi(0)\right) = 0.$$

2. Проверим выполнение условия 1. Определим явный вид функции $\mu(t)$, заданной (22). Для этого используем следующие предварительные соотношения:

$$\int_0^s g(\sigma)d\sigma = \int_0^s \beta\sin\Delta\psi(\sigma)\Delta\psi'(\sigma)d\sigma = -\beta\left(\cos\Delta\psi(s) - \cos\Delta\psi(0)\right). \tag{23}$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\int_0^T \cos\Delta\psi(\sigma)d\sigma = 0. \tag{24}$$

Дифференцируя (7), получаем

$$(\Delta\psi)'' = -2\beta\cos\Delta\psi\,\Delta\psi',$$

откуда следует

$$(\ln\Delta\psi')' = -2\beta\cos\Delta\psi. \tag{25}$$

Далее, интегрируя (25) по периоду и учитывая периодичность $\Delta\psi(t)$, получаем (24).

Из соотношений (22), (24) и (25) следует выражение для μ:

$$\mu(t) = \beta\int_0^t \cos\Delta\psi(s)ds. \tag{26}$$

Учитывая (26), уравнение (21) записываем в виде

$$\int_0^T \left(-J + 2\beta\cos\Delta\psi(s) + e^{2\left(\zeta + \beta\int_0^s \cos\Delta\psi(\xi)d\xi\right)}\right)ds =$$
$$= -JT + 2\beta\int_0^T \cos\Delta\psi(s)ds + \int_0^T e^{2\left(\zeta + \beta\int_0^s \cos\Delta\psi(\xi)d\xi\right)}ds =$$
$$= -JT + e^{2\zeta}\int_0^T e^{2\beta\int_0^s \cos\Delta\psi(\xi)d\xi}ds = 0. \tag{27}$$

Уравнение (27) имеет единственное решение относительно ζ

$$\zeta_0 = -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{JT}\int_0^T e^{2\beta\int_0^s \cos\Delta\psi(\xi)d\xi}ds\right].$$

Следовательно, условие 1 теоремы 5 выполнено.

3. Проверим выполнение условия 2. Имеем

$$\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, \zeta_0 + \mu(s), \mu'(s))\, ds = 2\int_0^T e^{2\zeta_0 + 2\beta\int_0^s \cos\Delta\psi(\xi)d\xi} ds = 2JT \neq 0.$$

Таким образом, теорема 4 доказана.

5. Трансверсальная устойчивость стационарных решений на многообразии M. Исследуем трансверсальную устойчивость стационарных решений системы (4) на многообразии M. Для этого введем в системе (4) новые переменные:

$$\bar{x} = a_1 + a_2, \quad \bar{y} = N_1 + N_2, \quad \bar{\xi} = a_1 - a_2, \quad \bar{\eta} = N_1 - N_2. \tag{28}$$

В результате получим систему уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\bar{x}\bar{y} + \bar{\xi}\bar{\eta}\right) + \beta\bar{x}\cos\Delta\psi \equiv g_1\left(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}\right), \tag{29}$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \varepsilon\left[2J - \bar{y} - \frac{1}{2}(\bar{y}+1)\left(\bar{x}^2 + \bar{\xi}^2\right) - \bar{x}\bar{\xi}\bar{\eta}\right] \equiv g_2\left(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}\right), \tag{30}$$

$$\frac{d(\Delta\psi)}{dt} = \delta + \alpha\bar{\eta} - 2\beta\frac{\bar{x}^2 + \bar{\xi}^2}{\bar{x}^2 - \bar{\xi}^2}\sin\Delta\psi \equiv g_3\left(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}\right), \tag{31}$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}\right) - \beta\bar{\xi}\cos\Delta\psi \equiv f_1\left(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}\right), \tag{32}$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = -\left[\bar{\eta} + \frac{1}{2}\bar{\eta}\left(\bar{x}^2 + \bar{\xi}^2\right) + \bar{x}\bar{\xi}(\bar{y}+1)\right] \equiv f_2\left(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}\right), \tag{33}$$

в которой уравнения (29) – (31) описывают динамику исходной системы на многообразии M, а уравнения (32), (33) — динамику исходной системы в трансверсальном к M направлении. В новых координатах многообразие M примет вид

$$M := \left\{(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}) : \bar{\xi} = 0, \ \bar{\eta} = 0\right\}.$$

Легко убедиться, что в силу инвариантности M имеют место соотношения

$$f_j\left(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, 0, 0\right) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $\delta v = (\delta\bar{x}, \delta\bar{y}, \delta\Delta\psi)^T$ и $\delta w = \left(\delta\bar{\xi}, \delta\bar{\eta}\right)^T$ — вариации координат вдоль тангенциального и, соответственно, трансверсального к M направлений; $F = (f_1, f_2)^T$, $G = (g_1, g_2, g_3)^T$. Для решения $s(t) = \left(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \Delta\psi(t), 0, 0\right)$ на многообразии M составим соответствующие (29) – (33) уравнения в вариациях

$$\frac{d(\delta v)}{dt} = A(s(t))\delta v + B(s(t))\delta w, \tag{34}$$

$$\frac{d(\delta w)}{dt} = C(s(t))\delta w, \tag{35}$$

где

$$A(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\bar{y} + \beta\cos\Delta\psi & \frac{1}{2}\bar{x} & -\beta\bar{x}\sin\Delta\psi \\ -\varepsilon\bar{x}(\bar{y}+1) & -\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}\bar{x}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta\cos\Delta\psi \end{pmatrix},$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$C(s) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{y}}{2} - \beta\cos\Delta\psi & \frac{\bar{x}}{2} \\ -\varepsilon\bar{x}(\bar{y}+1) & -\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}\bar{x}^2\right) \end{pmatrix}.$$

Из (34), (35) следует, что уравнения в вариациях имеют треугольную матрицу коэффициентов, при этом, как видим, трансверсальное вариационное уравнение, т. е. уравнение для δw, отщеплено от уравнения для δv. Поэтому для определения трансверсальной устойчивости траекторий на многообразии M достаточно рассмотреть систему (35).

Определение. *Будем говорить, что решение* $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), 0, 0)$ *на многообразии* M *трансверсально асимптотически устойчиво* (*неустойчиво*), *если линейное уравнение в вариациях* (35) *экспоненциально асимптотически устойчиво* (*неустойчиво*).

Что касается локальной тангенциальной устойчивости стационарных решений на M, то соответствующие результаты вытекают из проведенного в предыдущем пункте анализа глобальной устойчивости на M.

Стационарные решения на M в новых координатах примут вид

$$R_0: \quad \bar{x}_1 = 2a_0, \quad \bar{y}_1 = -2\beta\cos\Delta\psi_0, \quad \Delta\psi_1 = \Delta\psi_0, \quad \bar{\xi}_1 = \bar{\eta}_1 = 0,$$

$$R_1: \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{y}_2 = 2J, \quad \Delta\psi_2 = \Delta\psi_0, \quad \bar{\xi}_2 = \bar{\eta}_2 = 0,$$

где $\Delta\psi_0 = \arcsin(\delta/2\beta)$.

Трансверсальную устойчивость стационарного решения R_0 определяем по знакам корней характеристического уравнения

$$\det\begin{pmatrix} -2\beta\cos\Delta\psi_0 - \lambda & \sqrt{\dfrac{J+\beta\cos\Delta\psi_0}{1-2\beta\cos\Delta\psi_0}} \\ -2\varepsilon\sqrt{\dfrac{J+\beta\cos\Delta\psi_0}{1-2\beta\cos\Delta\psi_0}}\,(1-2\beta\cos\Delta\psi_0) & -\varepsilon\dfrac{1+2J}{1-2\beta\cos\Delta\psi_0} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

или

$$(\lambda + 2\beta\cos\Delta\psi_0)\left(\lambda + \varepsilon\frac{1+2J}{1-2\beta\cos\Delta\psi_0}\right) + 2\varepsilon(J + 2\beta\cos\Delta\psi_0) = 0. \tag{36}$$

Решая уравнение (36), находим

$$\lambda_{1,2} = -\beta\cos\Delta\psi_0 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1+2J}{1-2\beta\cos\Delta\psi_0} \pm$$

$$\pm\ \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\beta\cos\Delta\psi_0 - \varepsilon\frac{1+2J}{1-2\beta\cos\Delta\psi_0}\right)^2 - 8\varepsilon(J+\beta\cos\Delta\psi_0)}.$$

При достаточно малом ε получим

$$\lambda_1 = -\varepsilon\left[\frac{1+2J}{1-2\beta\cos\Delta\psi_0} + \frac{J+\beta\cos\Delta\psi_0}{\beta\cos\Delta\psi_0}\right] + O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_2 = -2\beta\cos\Delta\psi_0 + \frac{J+\beta\cos\Delta\psi_0}{\beta\cos\Delta\psi_0} + O(\varepsilon^2).$$

Трансверсальную устойчивость стационарного решения R_1 определяем по знакам корней характеристического уравнения

$$\det\begin{pmatrix} J - \beta\cos\Delta\psi_0 - \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\varepsilon - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Имеем $\lambda_1 = J - \beta\cos\Delta\psi_0$ и $\lambda_2 = -\varepsilon$. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть* $0 < \delta < 2\beta$, $\beta < 1/2$. *Тогда*:

а) *существует такое* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta, J, \Delta\psi_0)$, *что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *положение равновесия* R_0 *системы* (29) – (33) *является трансверсально асимптотически устойчивым*;

б) *положение равновесия* R_1 *системы* (29) – (33) *трансверсально асимптотически устойчиво* (*неустойчиво*) *для всех достаточно малых* ε, *если выполняется условие* $J - \beta\cos\Delta\psi_0 < 0$ ($J - \beta\cos\Delta\psi_0 > 0$).

Для доказательства утверждения а) достаточно заметить, что $\beta\cos\Delta\psi_0 > 0$ согласно лемме 1 и при выполнении условий теоремы имеет место неравенство

$$\frac{1 + 2J}{1 - 2\beta\cos\Delta\psi_0} + \frac{J}{\beta\cos\Delta\psi_0} + 1 > 0.$$

В заключение отметим, что нами получены условия существования (теорема 1) и устойчивости (теоремы 2 – 4, 6) амплитудно синхронизированных решений системы (1) вида (2) и (3).

1. *Optoelectronic* devices / Ed. J. Piprek. – New York: Springer, 2005.
2. *Sieber J., Recke L., Schneider K. R.* Dynamics of multisection semiconductor lasers // J. Math. Sci. – 2004. – **124**. – P. 5298 – 5309.
3. *Yanchuk S., Schneider K. R., Recke L.* Dynamics of two mutually coupled semiconductor lasers: Instantaneous coupling limit // Phys. Rev. E. – 2004. – **69**. – P. 056221.
4. *Yanchuk S., Stefanski A., Kapitaniak T., Wojewoda J.* Dynamics of an array of coupled semiconductor lasers // Ibid. – 2006. – **73**.
5. *Koryukin I. V., Mandel Paul.* Two regimes of synchronization in unidirectionally coupled semiconductor lasers // Ibid. – 2002. – **65**. – P. 026201.
6. *Kozyreff G., Vladimirov A. G., Mandel Paul.* Global coupling with time delay in an array of semiconductor lasers // Phys. Rev. Lett. – 2000. – **85**. – P. 3809 – 3812.
7. *Samoilenko A. M., Recke L.* Conditions for synchronization of one oscillation system // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 7. – P. 1089 – 1119.
8. *Vicente Raúl, Shuo Tang, Mulet Josep, Mirasso Claudio R., Jia Ming Liu.* Synchronization properties of two self-oscillating semiconductor lasers subject to delayed optoelectronic mutual coupling // Phys. Rev. E. – 2006. – **73**.
9. *Wedekind I., Parlitz U.* Synchronization and antisynchronization of chaotic power drop-outs and jump-ups of coupled semiconductor lasers // Ibid. – 2002. – **66**. – P. 026218.
10. *White J. K., Matus M., Moloney J. V.* Achronal generalized synchronization in mutually coupled semiconductor lasers // Ibid. – 2002. – **65**. – P. 036229.
11. *Wille E., Peil M., Fischer I., Elsäßer W.* Dynamical scenarios of mutually delay-coupled semiconductor lasers in the short coupling regime // Semiconductor Lasers and Laser Dynamics: Proc. SPIE / D. Lenstra, G. Morthier, T. Erneux, M. Pessa. – 2004. – **5452**. – P. 41 – 50.
12. *Recke L., Wolfrum M., Yanchuk S.* Analysis and control of complex nonlinear processes // World Sci. Lect. Notes Complex Systems. – 2007. – **5**. – P. 185 – 212.
13. *Глова А. Ф.* Синхронизация излучения лазеров с оптической связью // Квант. электроника. – 2003. – **33**, № 4. – С. 283 – 306.
14. *Brauer F., Nohel J. A.* Qualitative theory of ordinary differential equations. – New York; Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc., 1969.
15. *Farkas M.* Periodic motions. – Springer, 1994.

Получено 07.11.07