УДК 517.9

**Я. А. Прикарпатський**
(Ін-т математики НАН України, Київ; Пед. ун-т, Краків, Польща)

# ГАМІЛЬТОНОВА ГЕОМЕТРИЧНА ЗВ'ЯЗНІСТЬ, АСОЦІЙОВАНА З АДІАБАТИЧНО ЗБУРЕНИМИ ГАМІЛЬТОНОВИМИ СИСТЕМАМИ, ТА ІСНУВАННЯ АДІАБАТИЧНИХ ІНВАРІАНТІВ

Differential-geometric properties of the Hamiltonian connections on symplectic manifolds for the adiabatically perturbed Hamiltonian system are studied. Namely, the associated Hamiltonian connection on the main foliation is constructed and its description is given in terms of covariant derivatives and the curvature form of the corresponding connection.

Изучаются дифференциально-геометрические свойства гамильтоновых связностей на симплектических многовидах для адиабатически возмущенной гамильтоновой системы. В частности, сконструирована ассоциированная гамильтоновая связность на главном расслоении и приведено ее описание в терминах ковариантных производных и формы кривизны соответствующей связности.

**1. Гамільтонова зв'язність.** Розглянемо симплектичний многовид $(M^{2n}, \omega^{(2)})$, на якому задано гладку гамільтонову дію $G \times M \to M$ групи Лі $G$. Продовжимо природним чином цю дію на многовид $P := M \times A$, де $A$ є так званим многовидом адіабатичних параметрів, тобто:

i) кожне волокно $M \times \{a\}$, $a \in A$, є інваріантним;

ii) дія $G \times (M \times \{a\}) \to M \times \{a\}$ є симплектичною;

iii) існує гладка сім'я відображень моменту $l: \ M \times A \to \mathcal{G}^*$, де $\mathcal{G}^*$ — спряжений простір до алгебри Лі $G$.

Оскільки многовид $P := M \times A$ є тривіальним розшаруванням $P \xrightarrow{p_A} A$, на ньому можна визначити класичну зв'язність $\Gamma$ (так звану зв'язність Картана – Ересмана) [1, 2] за допомогою горизонтальних розподілів $\mathrm{Hor}(P) \subset T(P)$.

**Означення**. *Гамільтоновою зв'язністю будемо називати зв'язність Картана – Ересмана* $\Gamma$ *на розшаруванні* $P \xrightarrow{p_A} A$, *асоційовану з відображенням моменту* $l: \ P \xrightarrow{p_a} \mathcal{G}^*$, *яка задовольняє такі умови*:

1) *паралельне перенесення вздовж будь-якого кусково-гладкого шляху в* $A$ *зберігає множини рівнів* $\{(u;A) \in P: \ l(u;A) = \xi \in \mathcal{G}^*\}$ *відображення моменту* $l: \ M \times A \to \mathcal{G}^*$;

2) *паралельне перенесення є гамільтоновим*;

3) *для кожного векторного поля* $K \in T(A)$ *усереднена величина* $\langle\langle hK \rangle\rangle$ *горизонтального ліфта* $hK \in \mathrm{Hor}(P)$ *є постійним векторним полем на* $M \times \{a\}$, $a \in A$.

Тут для будь-якого тензорного поля $\beta$ на $P$ визначено усереднену величину

$$\langle\langle \beta \rangle\rangle := \int_G g_* \circ \beta \, dg, \qquad \int_G dg = 1, \tag{1}$$

де $dg$, $g \in G$, є стандартною інваріантною мірою Хаара на групі Лі $G$, причому цю групу Лі вважаємо компактною і зв'язною.

Горизонтальний ліфт $hK \in \mathrm{Hor}(P)$ будь-якого векторного поля $K \in T(A)$

визначимо за допомогою усереднення (1) таким чином:

$$hK := \langle\langle i_{A,*}K \rangle\rangle = \int_G dg \left[ i_{A,*}K, \int_0^1 ds \left(\hat{u} \circ e^{s\bar{h}_g}\right)_* \left(\bar{h}_g\right) \right] + i_{A,*}K, \tag{2}$$

де $i_A : A \to P$ — відображення вкладення, $\bar{h}_g \in \mathcal{G}$ — такий елемент алгебри Лі $\mathcal{G}$ групи Лі $G$, що $\exp \bar{h}_g = g \in G$, а $(\hat{u}; \hat{a})$: $G \to P$ — гладке відображення, індуковане дією групи Лі $G$ на многовиді $P$ згідно з комутативною діаграмою:

$$\begin{array}{ccccc} T(G) & \xrightarrow{(\hat{u},\hat{a})_*} & T(P) & \xleftarrow{g_*} & T(P) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{(\hat{u},\hat{a})} & P & \xleftarrow{g} & P. \end{array} \tag{3}$$

Легко переконатися, що вираз (2) параметрично не залежить від зображення $g = e^{\bar{h}_g}$ елемента групи $g \in G$, що важливо для побудови відповідної гамільтонової зв'язності $\Gamma$ на розшаруванні $P$. Дійсно, на основі (2) отримуємо

$$\begin{aligned} \langle\langle i_{A,*}K \rangle\rangle &= \int_G dg\, g_* i_{A,*}K = \int_G dg \frac{\partial u \circ g}{\partial a} i_{A,*}K + i_{A,*}K = \\ &= \int_G dg \int_0^1 ds \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{d}{ds}(u \circ e^{s\bar{h}_g})\right) \circ i_{A,*}K + i_{A,*}K = \\ &= \int_G dg \int_0^1 ds \frac{\partial}{\partial a}\left(u \,\hat{\circ}\, e^{s\bar{h}_g}\right)_* \left(\bar{h}\right) i_{A,*}K + i_{A,*}K = \\ &= \int_G dg \left[ i_{A,*}K, \int_0^1 ds \left(u \,\hat{\circ}\, g^s\right)_* \left(\bar{h}_g\right) \right] + i_{A,*}K, \end{aligned} \tag{4}$$

де $g^s := \exp\left(\bar{h}_g s\right) \in G$ для довільних $s \in [0, 1]$, і звідси на підставі інваріантності міри Хаара отримуємо (2), а отже, і незалежність від вибраної параметризації.

***Зауваження* 1.** З точки зору застосувань описаної вище конструкції гамільтонової зв'язності $\Gamma$ до проблеми опису адіабатичних інваріантів адіабатично збурених гамільтонових систем відповідний многовид параметрів $A$ можна подати як орбіту деякого гладкого відображення $\sigma : \mathbf{R} \to A$ на свій образ $\operatorname{im}\sigma$. Тоді для неавтономної функції Гамільтона $H_\sigma : P \to \mathbf{R}$ можна визначити функцію $H$: $M \times \operatorname{im}\sigma \to \mathbf{R}$ таку, що $H_\sigma(u; t) = H(u; \sigma(t))$ для всіх $(u; t) \in M \times \mathbf{R}$. Функцію $H$: $M \times \operatorname{im}\sigma \to \mathbf{R}$ можна вважати генератором векторного поля $i_{M,*}K_H + i_{A,*}\dot{\sigma} \in T(P)$ на $P$, де $\dot{\sigma} := d\sigma/dt$, $t \in \mathbf{R}$.

Оскільки горизонтальне векторне гамільтонове поле $hK = \langle\langle i_{A,*}K \rangle\rangle \in T(P)$ є результатом усереднення (1) за дією групи $G$ на $P$, то очевидно, що відповідна функція Гамільтона $H_K \in \mathcal{D}(P)$ буде сталою на $M \times \{a\}$ для кожного $a \in A$, яку для зручності можна вважати рівною нулеві. Проінтерпретуємо умову 1, яка забезпечує інваріантність многовиду рівнів відображення моменту $l$: $P \to \mathcal{G}^*$ при паралельному перенесенні. Останнє задамо за допомогою коваріантної похідної

$$\nabla_{i_{A,*}K} f := df(hK) = df\left(\langle\langle i_{A,*}K \rangle\rangle\right) \tag{5}$$

для довільної функції $f \in \mathcal{D}(P)$. Тоді умову 1 можна записати так:

$$\nabla_{i_{A,*}K}\, l \;=\; 0 \tag{6}$$

для всіх $K \in T(A)$. Враховуючи умову еквіваріантності відображення моменту $l\colon\; P \to \mathcal{G}^*$, з (6) отримуємо

$$dl\Big(\big\langle\big\langle\, i_{A,*}K \,\big\rangle\big\rangle\Big) \;=\; \big\langle\big\langle\, d_A\, i_A^*\, l \,\big\rangle\big\rangle\,(K) \;=\; 0 \tag{7}$$

для всіх $K \in T(A)$. Таким чином, функція $\big\langle\big\langle\, i_A^*\, l \,\big\rangle\big\rangle\colon\; A \to \mathcal{G}^*$ є сталою на многовиді параметрів $A$, в (7) через $d_A$ позначено зовнішній диференціал відносно змінних $a \in A$.

***Зауваження* 2.** Легко переконатися, що з умови інваріантності (6), як наслідок, маємо єдиність гамільтонової зв'язності $\Gamma$ на розшаруванні $P \xrightarrow{p_A} A$.

**2. Адіабатично збурені гамільтонові системи.** Розглянемо довільний елемент $\xi(a) \in \mathcal{G}^*$, який параметрично залежить від змінної $a \in A$, оскільки задано нетривіальну гамільтонову дію $G \times (M \times \{a\}) \to M \times \{a\}$. Тоді вектору $V_\xi \in T(M)$ на $M$ відповідає на $P$ векторне поле $i_{M,*}V_\xi \in T(P)$. Якщо для будь-якого $K \in T(A)$ знайти дію комутатора $\big[\, i_{M,*}V_\xi\,,\; i_{A,*}K \,\big]$ на довільну гладку функцію $f \in \mathcal{D}(P)$, то отримаємо

$$\big[\, i_{M,*}V_\xi, i_{A,*}K \,\big] f \;=\; df\Big(\big[\, i_{M,*}V_\xi, i_{A,*}K \,\big]\Big) \;=\; -d_A\Big(d_M\, f\big(V_\xi\big)\Big)(K), \tag{8}$$

причому враховано, що виконується умова $V_\xi\big(d_M\, \tilde f\,\big)(K) = 0$ для кожної функції $\tilde f \in \mathcal{D}(A)$.

***Зауваження* 3.** Співвідношення (7) у формі

$$d_A \big\langle\big\langle\, i_A^*\, l \,\big\rangle\big\rangle \;=\; 0 \tag{9}$$

покладено в основу [3] аналізу важливої проблеми адіабатичної стабільності повільно змінних у часі повністю інтегровних гамільтонових систем. У випадку одного ступеня вільності умова (9) та умова $\dim A = 1$ збігаються з адіабатичним інваріантом. Це означає, що на часовому інтервалі $(0, 1/\varepsilon]$, де $\varepsilon \downarrow 0$, величина (9) змінюється на порядок величини $\varepsilon > 0$. Цей результат було встановлено класичним методом усереднення за дією абелевої групи $G = \mathbf{S}^1$. Відомо також [3], що через наявність багаточастотних резонансів на тороїдальних многовидах теорема про усереднення, на жаль, не має місця та інтеграли дії вже не є адіабатичними інваріантами, незважаючи на виконання умови (9).

У будь-якому випадку стандартна групова дія $h_*\colon\; T(P) \to T(P)$, $h \in G$, породжує базисне горизонтальне векторне поле $hK_a \in \mathrm{Hor}(P)$, де в змінних „дія-кут"

$$hK_a \;:=\; \left\langle\left\langle\, i_{A,*}\, \frac{\partial}{\partial a} \right\rangle\right\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left\langle\left\langle\, \frac{\partial \varphi_i}{\partial a} \right\rangle\right\rangle \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \;+\; \frac{\partial}{\partial a}, \tag{10}$$

причому $a$ — локальна координата на многовиді $A$. Якщо $\sigma\colon\; \mathbf{R} \to A$ є деякою гладкою замкненою кривою на $M$, то в локальних координатах „дія-кут" легко знайти вираз

$$h\dot\sigma \;=\; \sum_{i=1}^{n} \big(\langle\langle\, d_A\, \varphi_i \,\rangle\rangle(\dot\sigma)\big)\, \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \;+\; \dot\sigma. \tag{11}$$

Тоді відповідні рівняння паралельного перенесення мають вигляд

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \langle\langle d_A \varphi_i \rangle\rangle \dot{\sigma}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{12}$$

результатом яких є циклічна „фаза" $\psi_\sigma : M \to \mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z})^n$, де

$$\psi_\sigma := \oint_\sigma \langle\langle d_A \varphi \rangle\rangle. \tag{13}$$

Вираз (13) має зрозумілу геометричну інтерпретацію як елемента відповідної групи голономії $\mathrm{Hol}(\Gamma) \subset G$ відповідно побудованої гамільтонової зв'язності $\Gamma$ на $P$. При цьому, як видно з (13), група голономії $\mathrm{Hol}(\Gamma)$ є комутативною, ізоморфною до одновимірної групи гомологій $H_1(\mathbf{T}^n; \mathbf{Z})$ невиродженого тора $\mathbf{T}^n$ як компактного інтегрального многовиду цілком інтегровної гамільтонової системи на симплектичному многовиді $M^{2n}$.

Будемо вважати, що на $P$ виконується умова (9). Це означає, що на розшаруванні $P = M \times A \to A$ можна ввести зв'язність Картана – Ересмана $\Gamma$ таку, що відповідний простір горизонтальних векторних полів $\mathrm{Hor}(P) \subset T(P)$ задається виразом (2). Тоді має місце таке твердження.

**Твердження.** *Нехай групова дія $G \times P \to P$ є такою, що відповідне відображення моменту $l : P \to \mathcal{G}^*$ задовольняє умову $d_A \langle\langle i_{A,*} l \rangle\rangle = 0$, причому група Лі $G$ є компактною і зв'язною. Тоді на розшаруванні $P \xrightarrow{p_A} A$ існує єдина гамільтонова зв'язність $\Gamma$. Крім цього, на $P$ існує 1-форма $\theta \in \Lambda^1(P)$ така, що для будь-якого векторного поля $K \in T(A)$ горизонтальний ліфт $hK \in \mathrm{Hor}(P)$ задається виразом*

$$hK = V_{\theta(i_{A,*}K)} + i_{A,*}K, \tag{14}$$

*де $i_{V_{\theta(i_{A,*}K)}} \omega^{(2)} = -d_M \theta(i_{A,*}K)$, причому, згідно з (2),*

$$-d_M \theta(i_{A,*}K) := -\langle\langle \omega^{(2)}(i_{A,*}K, \cdot) \rangle\rangle = \int_G dg \int_0^1 ds\, d_M d_A H_g(u \circ g^s)(K) =$$

$$= -d_M(d_A \overline{H}(K)), \qquad \overline{H} := \int_G dg \int_0^1 ds\, H_g(u \circ g^s), \tag{15}$$

*функції $H_g : P \to \mathbf{R}$ існують завдяки гамільтоновості дії групи Лі $G$ на многовиді $M$ і визначаються з рівностей*

$$-i_{\hat{u}_*(\bar{h}_g)} \omega^{(2)} = dH_g(u). \tag{16}$$

*Відповідна коваріантна похідна $\nabla_{i_{A,*}K} : \mathcal{D}(P) \to \mathcal{D}(P)$ вздовж горизонтального векторного поля (2) задається як*

$$\nabla_{i_{A,*}K} f = df(i_{A,*}K) + \{\theta(i_{A,*}K), f\}, \tag{17}$$

*де $\{\cdot,\cdot\}$ є відповідною до симплектичної структури $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ дужкою Пуассона, а функція $f \in \mathcal{D}(P)$. Кривина $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ зв'язності $\Gamma$ задається як*

$$\Omega^{(2)}(i_{A,*}K_1, i_{A,*}K_2) := \{\theta(i_{A,*}K_1), \theta(i_{A,*}K_2)\} \tag{18}$$

*для будь-яких векторних полів $K_1$ і $K_2 \in T(A)$.*

***Доведення.*** Необхідно встановити лише вирази (15) для 1-форми $\theta \in$

$\in \Lambda^1(P)$ та (18) для 2-форми кривини. На основі визначення горизонтального векторного поля $hK \in \mathrm{Hor}(P)$, $K \in T(A)$, знаходимо

$$i_{hK}\,\omega^{(2)} := \omega^{(2)}(hK,\cdot) = \omega^{(2)}\big(\big\langle\big\langle i_{A,*}K\big\rangle\big\rangle,\cdot\big) \Rightarrow \int_G\int_0^1 ds\, i_{\left[i_{A,*}K,(u\hat{\circ}g^s)_*(\bar{h}_g)\right]}\omega^{(2)} =$$

$$= \int_G\int_0^1 ds\Big(L_{i_{A,*}K^i(u\hat{\circ}g^s)_*(\bar{h}_g)} - i_{(u\hat{\circ}g^s)_*}L_{i_{A,*}K}\Big)\omega^{(2)} =$$

$$= -\int_G dg\int_0^1 ds\, L_{i_{A,*}K}\big(d_M H_g(u\circ g^s)\big) = -d_M\int_G dg\int_0^1 ds\, L_{i_{A,*}K}H_g(u\circ g^s) =$$

$$= -\int_G dg\, d_M\int_0^1 ds\big(d_A H_g(u\circ g^s)(K)\big) = -d_M\big(d_A\bar{H}(K)\big), \tag{19}$$

де враховано позначення (16) і використано інваріантність симплектичної структури $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ відносно гамільтонової дії $G\times M \to M$, тобто $g^*\omega^{(2)} = \omega^{(2)}$ для будь-якого $g\in G$. Тепер на основі (19) отримуємо

$$d_M\big(d_A\bar{H}(K)\big) = d_M\,\theta(i_{A,*}K), \tag{20}$$

де враховано, що відображення $d\bar{H}\colon T(A)\to\mathbf{R}$,

$$d_A\bar{H}(K) = \theta(i_{A,*}K) \tag{21}$$

для $K\in T(A)$, є лінійним функціоналом на $T(A)\simeq T^*(A)$. Останнє на основі класичного твердження Рісса [4] означає, що існує (очевидно, не єдина) 1-форма $\theta\in\Lambda^1(P)$ така, що для всіх $K\in T(A)$ виконується (21). Таким чином, поєднуючи (19) та (21), отримуємо, що на $P$ існує таке гамільтонове векторне поле $V_{\theta(i_{A,*}K)}\in T(P)$ з функцією Гамільтона $\theta(i_{A,*}K)\in\mathcal{D}(P)$, що виконується (14). При доведенні формули (18) для 2-форми кривини зв'язності $\Gamma$ необхідно врахувати, що коваріантну похідну (17) можна записати в такій формі:

$$\nabla_{i_{A,*}K}f = \big\{\theta(i_{A,*}K), f\big\} + i_{A,*}K\,f \tag{22}$$

для будь-якого векторного поля $K\in T(A)$ і функцій $f\in\mathcal{D}(P)$. Тоді, використовуючи визначення [5 – 7] тензора кривини $\hat{\Omega}$ зв'язності $\Gamma$ на $P$ у вигляді

$$\hat{\Omega}\big(i_{A,*}K_1, i_{A,*}K_2\big)f := \big[\nabla_{i_{A,*}K_1},\nabla_{i_{A,*}K_2}\big]f - \nabla_{i_{A,*}[K_1,K_2]}f, \tag{23}$$

для довільних $K_1$ $i$ $K_2\in T(A)$ і $f\in\mathcal{D}(P)$ знаходимо

$$\hat{\Omega}\big(i_{A,*}K_1, i_{A,*}K_2\big)f = \big\{\theta(i_{A,*}K_1),\big\{\theta(i_{A,*}K_2),f\big\}\big\} +$$

$$+ \big\{\theta(i_{A,*}K_1), i_{A,*}K_2 f\big\} + (i_{A,*}K_1)(i_{A,*}K_2)f +$$

$$+ (i_{A,*}K_1)\big\{\theta(i_{A,*}K_2),f\big\} - \big\{\theta(i_{A,*}K_2),\big\{\theta(i_{A,*}K_1),f\big\}\big\} -$$

$$- \big\{\theta(i_{A,*}K_2),\theta(i_{A,*}K_1)f\big\} - (i_{A,*}K_2)(i_{A,*}K_1)f -$$

$$- i_{A,*}K_2\big\{\theta(i_{A,*}K_1),f\big\} - \big[i_{A,*}K_1, i_{A,*}K_2\big]f - \big\{\theta\big(i_{A,*}[K_1,K_2]\big),f\big\}, \tag{24}$$

де враховано функторіальну властивість [7] $i_{A,*}[K_1,K_2] = \big[i_{A,*}K_1,\ i_{A,*}K_2\big]$ дотичного відображення $i_{A,*}\colon\ T(A) \to T(P)$. Використовуючи тепер тотожність Якобі для дужки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ і рівність

$$i_{A,*}K_1\left\{\theta(i_{A,*}K_1), f\right\} - i_{A,*}K_2\left\{\theta(i_{A,*}K_2), f\right\} =$$

$$= \left\{\theta(i_{A,*}K_1), (i_{A,*}K_1)f\right\} - \left\{\theta(i_{A,*}K_2), (i_{A,*}K_2)f\right\} + \left\{\theta\big(i_{A,*}[K_1, K_2]\big), f\right\}, \quad (25)$$

з (24) і (25) отримуємо

$$\hat{\Omega}\big(i_{A,*}K_1, i_{A,*}K_2\big)f = \left\{\left\{\theta(i_{A,*}K_1), \theta(i_{A,*}K_2)\right\}, f\right\} = V_{\left\{\theta(i_{A,*}K_1), \theta(i_{A,*}K_2)\right\}} f. \quad (26)$$

Щоб надати сенс виразу (26), скористаємося відомою конструкцією з [7, 8]. А саме, нехай $P = M \times A \xrightarrow{p_A} A$ є симплектичним розшаруванням [6], структурна група $\mathrm{Sp}(P;G)$ якого є групою всіх таких симплектоморфізмів симплектичної 2-форми $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M\times\{a\})$ для всіх $a \in A$, які комутують з дією групи Лі $G\colon\ M\times\{a\} \to M\times\{a\}$, $a\in A$. Очевидно, що ця дія визначає природний гомоморфізм групи Лі $G$ в групу $\mathrm{Sp}(P;G)$. Алгебра Лі $\mathrm{sp}(P;G)$ групи $\mathrm{Sp}(P;G)$ визначається природним чином як алгебра Лі $C_G(M\times\{a\} \mid a\in A) \subset \mathcal{D}(P)$ всіх $G$-інваріантних функцій на $M\times\{a\}$, $a\in A$, відносно відповідної дужки Пуассона.

Таким чином, вираз (26) означає, що дії тензора кривини $\hat{\Omega}\big(i_{A,*}K_1, i_{A,*}K_2\big)f \in \mathcal{D}(P)$ на базисному многовиді $A$ зв'язності $\Gamma$ на $P = M \times A$ відповідає диференціальна 2-форма кривини $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(P) \otimes C_G(M\times\{a\} \mid a\in A)$ зі значенням в алгебрі Лі $\mathrm{sp}(P;G) \simeq C_G(M\times\{a\} \mid a\in A)$, причому

$$\Omega^{(2)}(i_{A,*}K_1, i_{A,*}K_2) := \left\{\theta(i_{A,*}K_1), (i_{A,*}K_2)\right\}$$

для всіх $K_1$ $i$ $K_2 \in T(A)$, що й доводить формулу (18).


1. *Blackmore D., Prykarpatsky Y. A., Samulyak R.* The integrability of Lie-invariant geometric objects generated by ideals in the Grassmann algebra // J. Nonlinear Math. Phys. – 1998. – **5**, № 1. – P. 54 – 67.
2. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. – New York: John Wiley and Sons, 1963, 1969. – Vol. 1, 2.
3. *Арнольд В. И.* Нестабильность динамических систем с многими степенями свободы // Докл. АН СССР. – 1964. – **156**. – С. 9 – 12.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 740 с.
5. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. – New York: Springer, 1978. – 806 p.
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1984. – 560 с.
7. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. – 344 с.
8. *Montgomery R.* The conection whose holonomy is the classical adiabatic angels of Hannay and Berry and its genetalization to the nonintegrable case // Communs Math. Phys. – 1988. – **120**. – P. 269 – 294.


Одержано 19.09.07