УДК 517.925

І. І. Король (Ужгород. нац. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

We investigate existence conditions and a numerical-analytic method of the approximate construction of the periodic solutions of nonlinear autonomous differential systems in a critical case.

Исследуются условия существования и численно-аналитический метод приближенного построения периодических решений нелинейных автономных дифференциальных систем в критическом случае.

Теорія періодичних крайових задач має широке застосування при дослідженні різноманітних технічних та природничих процесів. Саме тому питанням існування і наближеної побудови періодичних розв'язків диференціальних рівнянь приділялася значна увага у працях багатьох математиків, зокрема в [1 – 4]. При цьому важливе місце займають дослідження автономних систем диференціальних рівнянь [5 – 7].

Дана робота є продовженням досліджень, розпочатих у роботах [8, 9]. У ній запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка для дослідження існування і наближеної побудови періодичних розв'язків автономних нелінійних систем

$$\frac{dx}{dt} = Px + g(x) \tag{1}$$

у критичному випадку. При цьому обмеження на матрицю Ліпшиця стосуються не всієї правої частини, а лише нелінійності.

1. Побудова періодичних розв'язків нелінійних автономних систем. Розглянемо нелінійну автономну систему звичайних диференціальних рівнянь (1), де x, $g \in \mathbb{R}^n$, P — стала $(n \times n)$-вимірна дійсна матриця, причому

А) відповідна (1) лінійна однорідна система

$$\frac{dx}{dt} = Px \tag{2}$$

має k, $1 \le k \le n$, періодичних розв'язків, які мають спільний період $T = 2\Pi/\nu$.

Без обмеження загальності будемо вважати, що матриця P має вигляд $P = \operatorname{diag}(A, B)$, де A — $(k \times k)$-вимірна жорданова канонічна кососиметрична матриця:

$$A = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & \nu_1 \\ -\nu_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \nu_q \\ -\nu_q & 0 \end{pmatrix}, \ldots, 0, \ldots, 0\right\}, \tag{3}$$

така, що всі розв'язки лінійної диференціальної системи

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$$

є періодичними зі спільним періодом $T = 2\Pi/\nu$.

Таким чином, систему (1) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= A\bar{x} + \bar{g}(x), \\ \frac{d\tilde{x}}{dt} &= B\tilde{x} + \tilde{g}(x), \end{aligned} \tag{4}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\bar{x}\colon \mathbb{R} \to D_1 \subset \mathbb{R}^k$, $\tilde{x}\colon \mathbb{R} \to D_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$, $\bar{g}\colon D \to \mathbb{R}^k$, $\tilde{g}\colon D \to \mathbb{R}^{n-k}$, $x = \operatorname{col}(\bar{x}, \tilde{x})$, $g = \operatorname{col}(\bar{g}, \tilde{g})$, $D = D_1 \times D_2$ — замкнена обмежена область в $\mathbb{R}^n$.

З будови матриці P випливає, що відповідна (4) лінійна однорідна система

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x},$$
$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = B\tilde{x}$$

має k-параметричну сім'ю T-періодичних розв'язків вигляду

$$\bar{x}(t) = e^{At}\xi,$$
$$\tilde{x}(t) = 0.$$

Нашим завданням є дослідити наявність та запропонувати метод відшукання періодичних по t розв'язків нелінійної автономної системи (1), період яких збігається з періодом розв'язків відповідної лінійної автономної системи (2).

У просторі T-періодичних функцій $T(\mathbb{R}, D) \subset C(\mathbb{R}, D)$ розглянемо сім'ю k-параметричних відображень $L_\xi x\colon\ T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ і функціонал $\mu(x)$: $C(\mathbb{R}^n) \to D$:

$$(L_\xi x)(t) = e^{Pt}x_0 + \int_0^t U(t,s)\,g(x(s))\,ds - \int_t^T V(t,s)\,g(x(s))\,ds,$$

$$U(t,s) = \begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)e^{A(t-s)} & 0 \\ 0 & \left(I_{n-k} - \left(I_{n-k} - e^{-BT}\right)^{-1}\right)e^{B(t-s)} \end{pmatrix},$$

$$V(t,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{T}\,e^{A(t-s)} & 0 \\ 0 & \left(I_{n-k} - e^{-BT}\right)^{-1} e^{B(t-s)} \end{pmatrix},$$

$$\mu(x) = \int_0^T e^{-As}\,\bar{g}(x(s))\,ds,$$

$$x_0 = \operatorname{col}(\bar{x}_0, \tilde{x}_0), \qquad \bar{x}_0 = \xi, \quad \tilde{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^k, \quad \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Через I_j будемо позначати одиничну матрицю порядку j. До системи (1) застосуємо чисельно-аналітичний метод [8, 9], і її T-періодичний розв'язок будемо шукати як границю послідовності T-періодичних функцій

$$x_{m+1}(t,\xi) = x_0(t,\xi) + \int_0^t U(t,s)\,g\big(x_m(s,\xi)\big)\,ds - \int_t^T V(t,s)\,g\big(x_m(s,\xi)\big)\,ds,$$
$$x_0(t,\xi) = e^{Pt}x_0, \qquad m = \{0\} \cup \mathbb{N}. \tag{5}$$

***Зауваження* 1.** Оператор $L_\xi x$ можемо записати таким чином:

$$(L_\xi x)(t) = e^{Pt}\begin{pmatrix} \xi \\ \left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1} e^{BT}\displaystyle\int_0^T e^{-Bs}\,\tilde{g}(x(s))\,ds \end{pmatrix} +$$
$$+ \int_0^t e^{P(t-s)} g(x)\,ds - \begin{pmatrix} \dfrac{t}{T}\,e^{At}\mu(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Зауваження 2. При практичній побудові наближених розв'язків члени послідовності (5) зручно подати у вигляді

$$\bar{x}_{m+1}(t,\xi) = \bar{x}_0(t,\xi) + \int_0^t e^{A(t-s)}\,\bar{g}(x_m(s,\xi))\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T e^{A(t-s)}\,\bar{g}(x_m(s,\xi))\,ds,$$

$$\tilde{x}_{m+1}(t,\xi) = \int_0^t e^{B(t-s)}\,\tilde{g}(x_m(s,\xi))\,ds +$$

$$+ \left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1} e^{BT}\int_0^T e^{B(t-s)}\tilde{g}(x_m(s,\xi))\,ds,$$

$$\bar{x}_0(t,\xi) = e^{At}\xi, \qquad \tilde{x}_0(t,\xi) = 0, \qquad x_m = (\bar{x}_m, \tilde{x}_m).$$

Припускаємо, що в області $(t,x) \in \mathbb{R}\times D$ система (1) задовольняє наступні умови:

B) вектор-функція $g(x)$ є визначеною, неперервною і задовольняє умови обмеженості і Ліпшиця з невід'ємними сталими вектором M і матрицею K:

$$|g(x)| \le M, \qquad \left|g(x') - g(x'')\right| \le K\left|x' - x''\right|, \tag{7}$$

причому $M = (M_1, \ldots, M_n)$, $K = \{K_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,n}$, $|x| = (x_1, \ldots, x_n)$ і всі нерівності розуміємо покомпонентно;

C) існує непорожня множина точок $\xi \in D_\beta$ така, що вектор-функція $x_0(t,\xi)$ належить області D разом із своїм β-околом, де $\beta = \max\limits_{t\in[0,T]}(SM)(t)$, $Sx\colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — лінійний оператор:

$$(Sx)(t) = \int_0^t |U(t,s)|\,x(s)\,ds + \int_t^T |V(t,s)|\,x(s)\,ds;$$

D) $r(Q) < 1$, де $r(Q)$ — спектральний радіус оператора $Qx = S(Kx)$, який є композицією оператора S із множенням на матрицю K:

$$(Qx)(t) = \int_0^t |U(t,s)|\,Kx(s)\,ds + \int_t^T |V(t,s)|\,Kx(s)\,ds.$$

Дослідимо умови існування і метод наближеної побудови періодичного розв'язку заданого періоду T системи (1). Наступне твердження містить необхідні умови існування T-періодичного розв'язку системи (1).

Теорема 1. *Нехай виконується умова* A *і автономна диференціальна система* (1) *має* T*-періодичний розв'язок* $\varphi(t) = \varphi(t,\xi^*)$. *Тоді його початковим значенням є* $\varphi(0) = \varphi_0 = (\bar{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_0)$, *де*

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= \xi^*, \\ \tilde{\varphi}_0 &= \left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1} e^{BT}\int_0^T e^{-Bs}\tilde{g}(\varphi(s))\,ds \end{aligned} \tag{8}$$

і ξ^* *таке, що*

$$\mu(\varphi) = 0. \tag{9}$$

Доведення. Нехай $\varphi(t)$ є розв'язком системи (1), тоді має місце тотожність

$$\varphi(t) \equiv e^{Pt}\varphi(0) + \int_0^t e^{P(t-s)}\, g(\varphi(s))\, ds. \tag{10}$$

З T-періодичності $\varphi(t)$ одержуємо лінійну алгебраїчну систему

$$\left(I_n - e^{PT}\right)\varphi(0) = e^{PT}\int_0^T e^{-Ps}\, g(\varphi(s))\, ds.$$

Беручи до уваги структуру матриці P, отримуємо систему для знаходження $\varphi(0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-k} - e^{BT} \end{pmatrix}\varphi(0) = \begin{pmatrix} \int_0^T e^{A(T-s)}\, \bar{g}(\varphi(s))\, ds \\ \int_0^T e^{B(T-s)}\, \tilde{g}(\varphi(s))\, ds \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Зрозуміло, що система (11) є сумісною тоді і тільки тоді, коли виконується умова (9) і при цьому $\varphi(0) = \varphi_0$.

Теорему доведено.

Вкажемо достатні умови існування T-періодичного розв'язку системи (1).

Теорема 2. *Нехай виконується умова* A. *Якщо при цьому* $\xi = \xi^*$ *і функція* $\varphi(t) = \varphi(t, \xi^*)$ *такі, що виконується система рівнянь*

$$\varphi = L_\xi \varphi, \tag{12}$$

$$\mu(\varphi) = 0, \tag{13}$$

то $\varphi(t)$ *є* T*-періодичним розв'язком автономної диференціальної системи* (1), *а його початкове значення визначається згідно з* (8).

Доведення. Нехай функція $\varphi(t)$ і векторний параметр $\xi = \xi^* \in \mathbb{R}^k$ задовольняють рівняння (12). З (6) випливає

$$\varphi(t, \xi) \equiv e^{Pt}\begin{pmatrix} \xi \\ \left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1}\int_0^T e^{B(T-s)}\tilde{g}(\varphi(s, \xi))\, ds \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t e^{P(t-s)} g(\varphi(s, \xi))\, ds - \begin{pmatrix} \frac{t}{T}\, e^{At}\mu(\varphi(s, \xi)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\xi = \xi^*$ і $\varphi(t) = \varphi(t, \xi^*)$ задовольняють рівняння (13), з останньої тотожності випливає

$$\varphi(t) \equiv e^{Pt}\varphi_0 + \int_0^t e^{P(t-s)} g(\varphi(s))\, ds,$$

а тому $\varphi(t)$ є розв'язком системи (1) з початковим значенням (8). Покажемо, що $\varphi(t)$ є T-періодичною функцією:

$$\varphi(T) \equiv e^{PT}\varphi_0 + e^{PT}\int_0^T e^{-Ps} g(\varphi(s))\,ds =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{AT}\xi^* \\ e^{BT}\left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1} e^{BT}\int_0^T e^{-Bs}\tilde{g}(\varphi(s))\,ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{AT}\mu(\varphi) \\ e^{BT}\int_0^T e^{-Bs}\tilde{g}(\varphi(s))\,ds \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi^* \\ \left[\left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1} e^{BT} + I_{n-k}\right] e^{BT}\int_0^T e^{-Bs}\,\tilde{g}(\varphi(s))\,ds \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1} e^{BT} + I_{n-k} = \left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1},$$

то $\varphi(T) = \varphi_0$.

Теорему доведено.

Враховуючи умови B і C, отримуємо оцінку

$$\left|(L_\xi x)(t) - x_0(t,\xi)\right| \le \int_0^t |U(t,s)|M\,ds + \int_t^T |V(t,s)|M\,ds = (SM)(t) \le \beta. \tag{14}$$

Отже, при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in D_\beta$ всі члени послідовності (5) належать області D. Крім того, з (5), (7) одержуємо

$$\left|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)\right| = \left|\left(L_\xi\left(x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)\right)\right)(t)\right| \le$$

$$\le \left(Q\left|x_m(\cdot,\xi) - x_{m-1}(\cdot,\xi)\right|\right)(t) \le \left(Q^2\left|x_{m-1}(\cdot,\xi) - x_{m-2}(\cdot,\xi)\right|\right)(t) \le \ldots$$

$$\ldots \le \left(Q^m|x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|\right)(t) \le Q^m\beta,$$

з чого випливає, що при всіх m, $j \in \mathbb{N}$

$$\left|x_{m+j}(t,\xi) - x_m(t,\xi)\right| \le \sum_{i=0}^{j-1}\left|x_{m+i+1}(t,\xi) - x_{m+i}(t,\xi)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{j-1}\left(Q^{m+i}|x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi)|\right)(t) \le \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\beta. \tag{15}$$

З (14) і умови D випливає, що, згідно з принципом стиснутих відображень, рівняння $x = L_\xi x$ має єдиний розв'язок в $T(\mathbb{R}, D)$, який при всіх $\xi \in D_\beta$ збігається з граничною функцією $x^*(t,\xi)$ послідовності (5). При цьому параметр $\xi = \xi^*$ будемо вибирати так, щоб $\mu\left(x^*(\cdot,\xi)\right) = 0$. Тоді за теоремою 2 функція $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, $x^*(0) = \varphi_0$, є T-періодичним розв'язком системи (1). Переходячи в (15) до границі при $j \to \infty$, одержуємо оцінку збіжності послідовності (5):

$$\left|x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi)\right| \le (I_n - Q)^{-1} Q^m \beta. \tag{16}$$

Таким чином, можна сформулювати наступний результат.

Теорема 3. *Нехай система* (1) *задовольняє умови* A – D. *Тоді*:

1) *послідовність функцій* $x_m(t,\xi)$ *вигляду* (5) *при* $m \to \infty$ *рівномірно збігається відносно* $(t,\xi) \in \mathbb{R} \times D_\beta$ *до граничної функції* $x^*(t,\xi)$ *і при всіх натуральних* m *справджуються оцінки збіжності* (16);

2) *для того щоб функція* $x^*(t) = x^*(t,\xi)$ *була* T*-періодичним розв'язком диференціальної системи* (1), *необхідно і достатньо, щоб точка* $\xi = \xi^*$ *була розв'язком рівняння*

$$\Delta(\xi) \overset{\text{df}}{=} \int_0^T e^{-As} g\big(x^*(s,\xi)\big)ds = 0;$$

3) *початкове значення* $x^*(0) = \big(\bar{x}^*(0), \tilde{x}^*(0)\big)$ T*-періодичного розв'язку* $x^*(t)$ *визначається за формулою*

$$\begin{aligned} \bar{x}^*(0) &= \xi^*, \\ \tilde{x}^*(0) &= \left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1} e^{BT} \int_0^T e^{-Bs}\,\tilde{g}\big(x^*(s)\big)ds. \end{aligned} \tag{17}$$

Сформулюємо конструктивні достатні умови існування періодичних розв'язків, для перевірки яких не потрібно шукати граничну функцію $x^*(t,\xi)$, а досить знайти послідовні наближення $x_m(t,\xi)$.

Теорема 4. *Нехай система* (1) *задовольняє умови* A – D *і, крім того*:

1) *існує опукла замкнена область* $D'_\beta \subset D_\beta \subset R^k$ *така, що при деякому фіксованому натуральному* m *відображення* $\Delta_m(\xi)\colon D_\beta \to R^k$:

$$\Delta_m(\xi) \overset{\text{df}}{=} \mu(x_m(\cdot,\xi)) = \int_0^T e^{-As}\,\bar{g}(x_m(s,\xi))ds,$$

містить в області D'_β *єдину особливу точку* ξ_{0m} *ненульового індексу*;

2) *на границі* $\partial D'_\beta$ *області* D'_β *виконується нерівність*

$$\inf_{\xi \in \partial D'_\beta} |\Delta_m(\xi)| > H(I_n - Q)^{-1} Q^m \beta,$$

де $H = \int_0^T \left|e^{-As}\right| ds\, K$.

Тоді система (1) *має* T*-періодичний розв'язок* $x = x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, $\xi^* \in D'_\beta$, *з початковим значенням* $x^*(0)$ *вигляду* (17).

Доведення. З означення відображень $\Delta(\xi)$, $\Delta_m(\xi)$, беручи до уваги умову Ліпшиця (7) і оцінку (16), отримуємо

$$|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| \le \int_0^T \left|e^{-As}\right| \left|g\big(x^*(s,\xi)\big) - g(x_m(s,\xi))\right| ds \le$$

$$\le \int_0^T \left|e^{-As}\right| K \left|x^*(s,\xi) - x_m(s,\xi)\right| ds \le H(I_n - Q)^{-1} Q^m \beta.$$

З останньої оцінки, як і при доведенні теореми 3 [8], можна показати гомотопність полів $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$, що завершує доведення теореми.

Таким чином, якщо лінійна автономна система (2) має p періодичних по t

розв'язків з періодами відповідно $T_1, \ldots, T_p$, то, застосовуючи наведені вище міркування при $T = T_i$, $i = \overline{1, p}$, можемо дослідити наявність і побудувати розв'язки нелінійної системи для кожного з періодів T_i.

2. Квазілінійні автономні системи. Дослідимо питання існування і наближеної побудови T-періодичного розв'язку квазілінійної автономної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = Py + \varepsilon g(y, \varepsilon), \tag{18}$$

де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ — малий додатний параметр, $y = (\bar{y}, \tilde{y})$, $\bar{y} \in D_1 \subset \mathbb{R}^k$, $\tilde{y} \in D_2 \subset \subset \mathbb{R}^{n-k}$, $D = D_1 \times D_2$, y, $g \in \mathbb{R}^n$, $P = \operatorname{diag}(A, B)$ — стала $(n \times n)$-вимірна матриця, A — $(k \times k)$-матриця вигляду (3), причому

A_1) породжуюча для (18) лінійна система

$$\frac{dy}{dt} = Py, \tag{19}$$

яка одержується з (18) при $\varepsilon = 0$, має k-параметричну сім'ю T-періодичних розв'язків;

B_1) в області $D \times [0, \varepsilon_0]$ функція $g(y, \varepsilon)$ є визначеною, неперервною і виконуються умови обмеженості і Ліпшиця

$$|g(y, \varepsilon)| \le M, \qquad |g(y', \varepsilon) - g(y'', \varepsilon)| \le K|y' - y''|.$$

Розглянемо задачу знаходження періодичного з заданим фіксованим періодом T розв'язку автономної системи (18), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на один із T-періодичних розв'язків

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= e^{At}\xi, \\ \tilde{y}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

породжуючої системи (19).

З метою відшукання T-періодичного розв'язку системи (18) побудуємо рекурентну послідовність

$$\begin{gathered} \bar{y}_{m+1}(t, \xi, \varepsilon) = \\ = \bar{y}_0(t, \xi, \varepsilon) + \varepsilon \left\{ \int_0^t e^{A(t-s)} \bar{g}(y_m(s, \xi, \varepsilon), \varepsilon) ds - \frac{t}{T} \int_0^T e^{A(t-s)} \bar{g}(y_m(s, \xi, \varepsilon), \varepsilon) ds \right\}, \\ \tilde{y}_{m+1}(t, \xi, \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \int_0^t e^{B(t-s)} \tilde{g}(y_m(s, \xi, \varepsilon), \varepsilon) ds + \right. \\ \left. + \left(I_{n-k} - e^{BT}\right)^{-1} e^{BT} \int_0^T e^{B(t-s)} \tilde{g}(y_m(s, \xi, \varepsilon), \varepsilon) ds \right\}, \\ \bar{y}_0(t, \xi, \varepsilon) = e^{At}\xi, \qquad \tilde{y}_0(t, \xi) = 0, \qquad y_m = (\bar{y}_m, \tilde{y}_m). \end{gathered} \tag{21}$$

Якщо ε_0 є достатньо малим, то наведені вище твердження є справедливими для системи (18), послідовних наближень (21) і виконуються оцінки

$$\left| y^*(t, \xi, \varepsilon) - y_0(t, \xi, \varepsilon) \right| \le \varepsilon\beta, \tag{22}$$

$$\left| y^*(t,\xi,\varepsilon) - y_m(t,\xi,\varepsilon) \right| \le \varepsilon (I_n - \varepsilon Q)^{-1} (\varepsilon Q)^m \beta,$$

$$\inf_{\xi \in \partial D'_\beta} \left| \Gamma_m(\xi,\varepsilon) \right| > \varepsilon H (I_n - \varepsilon Q)^{-1} (\varepsilon Q)^m \beta, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

де $y^*(t,\xi,\varepsilon) = \lim\limits_{m\to\infty} y_m(t,\xi,\varepsilon)$, $\Gamma_m(\xi,\varepsilon) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^T e^{-As} \bar{g}(y_m(s,\xi,\varepsilon),\varepsilon)\, ds$. При $m = 0$ для системи (18) мають місце наступні достатні умови існування розв'язку.

Теорема 5. *Нехай для системи* (18) *виконуються умови* A_1, B_1 *і при всіх* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ *відображення* $\Gamma_0(\xi,\varepsilon)$ *має в області* $D'_\beta \subset D_\beta$ *ізольовану особливу точку* $\xi = \xi_0$ *ненульового індексу.*

Тоді існує таке ε_0, *що при всіх* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *система* (18) *має* T*-періодичний розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в* T*-періодичний розв'язок* (20) *породжуючої лінійної системи* (18).

Доведення. З (22) випливає, що при $m = 0$ нерівність (23) набирає вигляду

$$\inf_{\xi \in \partial D'_\beta} \left| \Gamma_0(\xi,\varepsilon) \right| > \varepsilon H \beta. \tag{24}$$

В якості області D'_β візьмемо коло радіуса δ з центром у точці ξ_0. Оскільки ξ_0 є ізольованою особливою точкою, то при достатньо малих δ область D'_β не буде містити інших особливих точок відображення $\Gamma_0(\xi,\varepsilon)$, а тому

$$\inf_{|\xi - \xi_0| = \delta} \left| \Gamma_0(\xi,\varepsilon) \right| = \eta > 0. \tag{25}$$

З (24) і (25) випливає, що $\eta > \varepsilon H \beta$, отже, при всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, де $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ і $\varepsilon_2 H \beta < \eta$, існує T-періодичний розв'язок $y = y^*(t,\varepsilon)$ системи (18) такий, що

$$\left| y^*(0,\varepsilon) - \varphi_0 \right| < \delta,$$

$$\left| y^*(t,\varepsilon) - y_0(t,\varepsilon) \right| < \varepsilon \beta.$$

З (21) випливає, що при всіх $\xi^* \in \mathbb{R}^k$, $m \in 0 \cup \mathbb{N}$ функції $y_m(t,\xi,0)$ є розв'язками породжуючої лінійної системи (19), а отже, $y^*(t,0)$ теж є розв'язком системи (19).

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 180 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
6. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 320 p.
7. *Чуйко С. М.* Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 3. – С. 416 – 432.
8. *Король І. І., Перестюк М. О.* Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А. М. Самойленка // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 4. – С. 472 – 489.
9. *Король І. І.* Про періодичні розв'язки одного класу систем диференціальних рівнянь // Там же. – 2005. – **57**, № 4. – С. 483 – 495.

Одержано 23.10.07