УДК 517. 5

М. Ш. Шабозов, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШЕЕ И НАИЛУЧШЕЕ ОДНОСТОРОНЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЯДРА БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ

For the class B_p^ρ, $0 \le \rho < 1$, $1 \le p \le \infty$ of 2π-periodic functions of the type $f(t) = u(\rho, t)$, where $u(\rho, t)$ is a function which is biharmonic in the unit disk, we find exact values of the best and of the best one-sided approximations of the kernel $K_\rho(t)$ of the convolution $f = K_\rho * g$, $\|g\|_\rho \le 1$ with respect to the metric of L_1. We also consider the problem of recovering values of the convolution operator by using values of the boundary functions.

Для класу B_p^ρ, $0 \le \rho < 1$, $1 \le p \le \infty$, 2π-періодичних функцій вигляду $f(t) = u(\rho, t)$, де $u(\rho, t)$ — бігармонічна функція в одиничному колі, знайдено точні значення найкращого та найкращого односторонього наближень ядра $K_\rho(t)$ згортки $f = K_\rho * g$, $\|g\|_\rho \le 1$ у метриці L_1. Розглянута задача відновлення значень оператора згортки згідно з інформацією про значення граничних функцій.

1. Основная краевая задача для бигармонического уравнения ставится следующим образом: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\Delta^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

и граничным условиям

$$u\big|_\Gamma = g(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа, $\mathcal{D}$ — некоторая область из $\mathbb{R}^2$ с границей Γ, $g(s)$ — непрерывная функция на Γ.

Как известно [1, с. 398], бигармоническая в единичном круге $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \rho^2 < 1\}$ функция $u(\rho, t)$, для которой

$$u(\rho, t)\big|_{\rho=1} = g(t), \quad \frac{\partial u(\rho, t)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=1} = 0, \tag{2'}$$

задается формулой

$$f(t) = u(\rho, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_\rho(t-u) g(u)\, du, \quad 0 \le \rho < 1, \tag{3}$$

где ядро $K_\rho(t)$ имеет вид

$$K_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)^2(1-\rho\cos t)}{2(1-2\rho\cos t + \rho^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos kt. \tag{4}$$

Введем классы функций, рассматриваемых в дальнейшем. Пусть L_p, $1 \le \rho < \infty$, — пространство измеримых и суммируемых в p-й степени 2π-периодических функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p},$$

C (или L_∞) — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\|_\infty = \max_t |f(t)|;$$

$W^r L_p$, $r = 1, 2, \ldots$; $1 \le p \le \infty$, — множество всех 2π-периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна, а $\|f^{(r)}\|_p \le 1$, B_p^ρ, $0 \le \rho < 1$, $1 \le p \le \infty$, — класс 2π-периодических функций $f(t)$, представимых в виде $f(t) = u(\rho, t)$, где $u(\rho, t)$ — бигармоническая в круге радиуса 1 функция, нормальная производная которой на границе круга равна нулю и удовлетворяет неравенству $\| u(\rho, \cdot) \|_p \le 1$, $0 \le \rho < 1$. Класс функций B_p^ρ можно определить как множество всех функций $f(t)$, представимых в виде (3) с ядром, определяемым равенством (4).

В данной работе доказывается несколько утверждений о наилучшем и наилучшем одностороннем приближении ядра $K_\rho(t)$ тригонометричскими полиномами в метрике L_1, а также находятся наилучшее и наилучшее одностороннее приближения класса B_1^ρ функций $f(t)$, допускающих представление (3), для которых $\| g \|_1 \le 1$. При этом будем следовать схеме рассуждений из [2]. Кроме того, изучается задача восстановления значений оператора (3) по информации о значениях граничной функции $g(t)$.

2. Наилучшим приближением функций $f(t)$ множеством тригонометрических многочленов T_{n-1} порядка $\le n-1$ в метрике пространства L_p называется величина

$$E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_{n-1}\|_p : t_{n-1}(t) \in T_{n-1}\}.$$

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс 2π-периодических функций $f(t)$, то величина

$$E_n(\mathfrak{M})_p = \sup\{E_n(f)_p : f \in \mathfrak{M}\}$$

называется наилучшим приближением класса $\mathfrak{M}$ множеством тригонометрических многочленов порядка $\le n-1$. Величина

$$E_n^+(f)_p = \inf\{\|f - g\|_p : f(x) \le g(x), g \in T_{n-1}\}$$

называется наилучшим приближением сверху ограниченной функции $f(t)$ множеством T_{n-1}, а

$$E_n^+(\mathfrak{M})_p = \sup\{E_n^+(f)_p : f \in \mathfrak{M}\}$$

— наилучшим приближением сверху класса $\mathfrak{M}$ множеством тригонометрических многочленов T_{n-1}. Наилучшее приближение снизу функции $f(t)$ и класса функции $\mathfrak{M}$ определены аналогично. Обозначим их через $E_n^-(f)_p$ и $E_n^-(\mathfrak{M})_p$ соответственно.

3. Отметим некоторые свойства ядра $K_\rho(t)$.

а) Ядро $K_\rho(t)$ выражается через ядро Пуассона и его производную. В самом деле, в (4)

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)} = \chi_\rho(t) \tag{5}$$

— ядро Пуассона, а

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos kt = \frac{(\rho+\rho^3)\cos t-2\rho^2}{(1-2\rho\cos t+\rho^2)^2} = \rho\frac{d}{d\rho}\chi_\rho(t) := \chi_\rho^*(t). \tag{6}$$

Из (5) и (6) с учетом (4) имеем

$$K_\rho(t) = \chi_\rho(t) + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\chi_\rho^*(t). \tag{7}$$

б) Справедливо тождество

$$K_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)^2}{4(1-2\rho\cos t+\rho^2)} + \frac{(1-\rho^2)^3}{4(1-2\rho\cos t+\rho^2)^2}, \tag{8}$$

которое получается простым преобразованием ядра.

в) Функция $K_\rho(t)$ достигает максимума в точках $t = 2m\pi$ и минимума в точках $t = (2m+1)\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

4. Следуя [2, с. 67], положим

$$\varphi_n(f,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(t+\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Очевидно,

$$\varphi_n(\cos k\,\cdot, t) = \begin{cases} \cos kt, & k = nm, \\ 0, & k \neq nm. \end{cases} \tag{9}$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\varphi_n(K_\rho, t) = \chi_{\rho^n}(nt) + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\chi_{\rho^n}^*(nt). \tag{10}$$

Доказательство. Из (7), (4) и (9) имеем

$$\varphi_n(K_\rho, t) = \varphi_n(\chi_\rho, t) + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\varphi_n(\chi_\rho^*, t) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\rho^{mn}\cos mnt + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sum_{m=1}^{\infty} mn\rho^{mn}\cos mnt,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Справедливы соотношения*

$$\max_t \varphi_n(K_\rho, t) = \varphi_n(K_\rho, 0) = \frac{1}{2}\frac{1+\rho^n}{1-\rho^n} + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{(1-\rho^n)^2}, \tag{11}$$

$$\min_t \varphi_n(K_\rho, t) = \varphi_n(K_\rho, \pi/n) = \frac{1}{2}\frac{1-\rho^n}{1+\rho^n} - \frac{1}{2}(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{(1+\rho^n)^2}. \tag{12}$$

Доказательство. Равенства (11) и (12) доказываются одинаково и потому достаточно доказать (11). Из (10) получаем

$$\varphi_n(K_\rho, 0) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\rho^{mn} + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sum_{m=1}^{\infty} mn\rho^{mn} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\rho^n}{1-\rho^n} + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1+\rho^n}{1-\rho^n} + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{(1-\rho^n)^2}.$$

Из тождества (7) с учетом (10) имеем

$$\Phi_n(K_\rho, t) := \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k K_\rho\left(t+\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \chi_\rho\left(t+\frac{k\pi}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \chi_\rho^*\left(t+\frac{k\pi}{n}\right) = \{n\chi_{\rho^n}(n(t+\pi/n)) - n\chi_{\rho^n}(nt)\} +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\rho^2)\{n\chi_{\rho^n}^*(n(t+\pi/n)) - n\chi_{\rho^n}^*(nt)\} =$$

$$= \{n\chi_{\rho^n}(nt+\pi) - n\chi_{\rho^n}(nt)\} + \frac{1}{2}(1-\rho^2)\{n\chi_{\rho^n}^*(nt+\pi) - n\chi_{\rho^n}^*(nt)\} =$$

$$= n\frac{1-\rho^{2n}}{2}\left(\frac{1}{1+\rho^{2n}+2\rho^n\cos nt} - \frac{1}{1+\rho^{2n}-2\rho^n\cos nt}\right) -$$

$$-n\frac{1-\rho^2}{2}\left(\frac{(\rho^n+\rho^{3n})\cos nt + 2\rho^{2n}}{(1+\rho^{2n}+2\rho^n\cos nt)^2} + \frac{(\rho^n+\rho^{3n})\cos nt - 2\rho^{2n}}{(1+\rho^{2n}-2\rho^n\cos nt)^2}\right) =$$

$$= \left\{\frac{2n(\rho^{2n}-1)}{(1+\rho^{2n})^2-(2\rho^n\cos nt)^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{n(1-\rho^2)\rho^n(1+\rho^{2n})\left[(1-\rho^{2n})^2 - 4\rho^{2n}\sin^2 nt\right]}{\left[(1+\rho^{2n})^2-(2\rho^n\cos nt)^2\right]^2}\right\}\cos nt,$$

откуда следует

$$\Phi_n(K_\rho, \pi/2n) = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k K_\rho(\pi/2n + k\pi/n) = 0. \tag{13}$$

Из (13) в силу леммы 3.1.3 [2, с. 62] вытекает, что существует единственный многочлен $t_{n-1}(K_\rho) \in T_{n-1}$, интерполирующий функцию $K_\rho(t)$ в точках $t_k = \pi/2n + k\pi/n$, $k = 1, \ldots, 2n$. Так как функция $K_\rho(t)$ четная, то в силу единственности интерполяционного многочлена четной будет и функция $\delta(t) = K_\rho(t) - t_{n-1}(K_\rho, t)$.

Покажем, что функция $\delta(t)$ меняет знак в точках t_k, $k = 1, \ldots, 2n$, и только в них. Действительно, если это не так, то в силу четности она имеет на интервале $(0, \pi)$ не менее чем $n+1$ нулей с учетом их кратностей. Но тогда и функция $\Delta(t) = \delta(\arccos t)$ имеет на интервале $(-1, 1)$ не менее чем $n+1$ нулей с учетом их кратностей. В таком случае из теоремы Ролля следует, что производная $\Delta^{(n)}(t)$ имеет по крайней мере один нуль на $(-1, 1)$. Используя представление

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt = \sum_{k=1}^{n-1} b_k (\cos t)^k$$

и тождество (8), функцию $\Delta(t)$ записываем в следующем виде:

$$\Delta(t) = \frac{(1-\rho^2)^2(1-\rho t)}{2(1-2\rho t-\rho^2)^2} - \sum_{k=1}^{n-1} b_k t^k =$$

$$= \frac{(1-\rho^2)^2}{4(1-2\rho t+\rho^2)} + \frac{(1-\rho^2)^3}{4(1-2\rho t+\rho^2)^2} - \sum_{k=1}^{n-1} b_k t^k, \quad t \in [-1; 1]. \tag{14}$$

Дифференцируя n раз равенство (14), получаем

$$\Delta^{(n)}(t) = \frac{(1-\rho^2)^2(2\rho)^n n!}{4(1-2\rho t+\rho^2)^{n+1}} + \frac{(1-\rho^2)^3(2\rho)^n(n+1)!}{4(1-2\rho t+\rho^2)^{n+2}},$$

откуда $\Delta^{(n)}(t) > 0,\ t \in [-1; 1]$, что противоречит предыдущему предположению. Таким образом доказано, что функция $\delta(t)$ меняет знак в точках $t_k = \pi/2n + k\pi/n,\ k = 1, \ldots, 2n$, и только в них. Из неравенства (13) и теоремы 3.1.3 [2, с. 65] следует

$$E_n(K_\rho)_1 = \| K_\rho - t_{n-1}(K) \|_1 = \left| \int_0^{2\pi} K_\rho(t)\, \mathrm{sgn} \cos nt\, dt \right|.$$

Используя разложение $\mathrm{sgn} \cos nt$ в ряд Фурье

$$\mathrm{sgn} \cos nt = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos(2\nu+1)nt}{2\nu+1}$$

и учитывая (4), с помощью обобщенного равенства Парсеваля получаем

$$E_n(K_\rho)_1 = \left| \int_0^{2\pi} K_\rho(t)\, \mathrm{sgn} \cos nt\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_\rho(t) \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos(2\nu+1)nt}{2\nu+1} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(1-\rho^2) \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos kt \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos(2\nu+1)nt}{2\nu+1} dt \right| =$$

$$= 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} + 2(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{1+\rho^{2n}} = 4 \operatorname{arctg} \rho^n + 2n(1-\rho^2)\rho^n(1+\rho^{2n})^{-1}.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $\rho \in (0, 1)$ *справедливы равенства*

$$E_n(K_\rho)_1 = 4 \operatorname{arctg} \rho^n + 2n(1-\rho^2)\rho^n(1+\rho^{2n})^{-1}. \tag{15}$$

Вычислим теперь точные значения наилучших односторонних приближений ядра $K_\rho(t)$ тригонометрическими многочленами порядка $\leq n-1$ в метрике L_1. Из равенств (11) и (12) получаем

$$\varphi_n'(K_\rho, 0) = 0, \tag{16}$$

$$\varphi_n'(K_\rho, \pi/n) = 0. \tag{17}$$

Из соотношений (10), (16) и (17) вытекает, что для $t_k = 2k\pi/n$ и $\tau_k = \pi/n + 2k\pi/n$, $k = 1, \ldots, n$, выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^{n} K'_\rho(t_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}{}' K'_\rho(\tau_k) = 0.$$

Поэтому согласно лемме 3.1.4 из [2] существуют единственные тригонометрические многочлены $U_{n-1}(K_\rho, t) \in T_{n-1}$ и $V_{n-1}(K_\rho, t) \in T_{n-1}$, дважды интерполирующие функцию $K_\rho(t)$ в точках t_k и τ_k Из единственности интерполяционных многочленов и четности $K_\rho(t)$ следует, что функции

$$\delta_1(t) = U_{n-1}(K_\rho, t) - K_\rho(t), \quad \delta_2(t) = K_\rho(t) - V_{n-1}(K_\rho, t)$$

также будут четными. Покажем, что $\delta_i(t), i = 1, 2,$ знакопостоянны на $[0, 2\pi]$. На примере $\delta_1(t)$ докажем это утверждение. Если $\delta_1(t)$ меняет знак на $[0, 2\pi]$, то в силу четности она будет менять знак также на интервале $(0, \pi)$. Но отсюда функция $\Delta_1(t) = \delta_1(\arccos t)$ имеет на промежутке $[-1, 1]$ $n+1$ нулей с учетом их кратностей, а значит, по теореме Ролля производная $\Delta_1^{(n)}(t)$ имеет хотя бы один нуль на $[-1, 1]$. Но это не возможно, поскольку для всех $t \in [-1, 1]$

$$\Delta_1^{(n)}(t) = -\frac{(1-\rho^2)^2(2\rho)^n n!}{4(1-2\rho t+\rho^2)^{n+1}} - \frac{(1-\rho^2)^3(2\rho)^n(n+1)!}{4(1-2\rho t+\rho^2)^{n+2}} < 0.$$

Таким образом доказано, что функции $\delta_i(t), i = 1, 2,$ знакопостоянны на периоде $[0, 2\pi]$. Отсюда с учетом леммы 2 и известных соотношений для наилучших односторонних приближений [2, с. 66] получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *При всех* $\rho \in (0, 1)$ *и* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливы равенства*

$$E_n^+(K_\rho)_1 = \int_0^{2\pi}\left(\max_\gamma \varphi_n(K_\rho, \gamma) - \varphi_n(K_\rho, t)\right)dt = \frac{2\pi\rho^n}{1-\rho^n} + \frac{\pi n(1-\rho^2)\rho^n}{(1-\rho^n)^2},$$

$$E_n^-(K_\rho)_1 = \int_0^{2\pi}\left(\varphi_n(K_\rho, t) - \min_\gamma \varphi_n(K_\rho, \gamma)\right)dt = \frac{2\pi\rho^n}{1+\rho^n} + \frac{\pi n(1-\rho^2)\rho^n}{(1+\rho^n)^2}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\rho \in (0, 1)$ *и* $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда справедливы равенства*

$$E_n\left(B_1^\rho\right)_1 = E_n\left(B_\infty^\rho\right)_\infty = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\rho^n + \frac{2}{\pi}(1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{(1+\rho^n)^2}, \tag{18}$$

$$E_n^+\left(B_1^\rho\right)_1 = E_n^-\left(B_1^\rho\right)_1 = \frac{2\rho^n}{1-\rho^n} + (1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{(1-\rho^n)^2}. \tag{19}$$

Доказательство. Равенство (18) вытекает из теоремы 1 и общих соотношений двойственности для классов сверток ([3], §4.3)

$$E_n\left(B_1^\rho\right)_1 = E_n\left(B_\infty^\rho\right)_\infty = \frac{1}{\pi}E_n(K_\rho)_1.$$

Докажем равенство (19). Если $f(t) \in B_1^\rho$, то она представима в виде (3). Положим $g_+(t) = \max\{g(t), 0\}$ и $g_-(t) = \max\{-g(t), 0\}$. Определим тригонометрический многочлен следующим образом:

$$T_{n-1}(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_{n-1}(K_\rho, t-u)g_+(u)\,du - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_{n-1}(K_\rho, t-u)g_-(u)\,du.$$

Так как

$$T_{n-1}(f,t)-f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[U_{n-1}(K_\rho, t-u)-K_\rho(t-u)]g_+(u)\,du +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[K_\rho(t-u)-V_{n-1}(K_\rho, t-u)]g_-(u)\,du \geq 0,$$

для любой функции $f(t)\in B_1^\rho$ справедливы соотношения

$$E_n^+(f)_1 \leq \frac{1}{\pi}\|U_{n-1}(K_\rho)-K_\rho\|_1\|g_+\|_1 + \frac{1}{\pi}\|K_\rho - U_{n-1}(K_\rho)\|_1\|g_-\|_1 =$$

$$= \left(\frac{2\rho^n}{1-\rho^n}+\frac{n(1-\rho^2)\rho^n}{(1-\rho^n)^2}\right)\|g_+\|_1 + \left(\frac{2\rho^n}{1+\rho^n}+\frac{n(1-\rho^2)\rho^n}{(1+\rho^n)^2}\right)\|g_-\|_1 \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\rho^n}{1-\rho^n}+\frac{n(1-\rho^2)\rho^n}{(1-\rho^n)^2}\right)(\|g_+\|_1+\|g_-\|_1) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2\rho^n}{1-\rho^n}+\frac{n(1-\rho^2)\rho^n}{(1-\rho^n)^2}\right)\|g\|_1 \leq \frac{2\rho^n}{1-\rho^n}+\frac{n(1-\rho^2)\rho^n}{(1-\rho^n)^2}.$$

Поэтому

$$E_n^+\left(B_1^\rho\right)_1 \leq \frac{2\rho^n}{1-\rho^n} + (1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{(1-\rho^n)^2}. \tag{20}$$

Пусть 2π-периодическая функция $\delta_h(u), h\in(0,\pi)$, на $[-\pi,\pi]$ определена равенствами $\delta_h(u)=1/h$ при $|u|<h/2$ и $\delta_h(u)=0$ при $h/2\leq|u|\leq\pi$. Определим функцию $f_h(t)$ равенством

$$f_h(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_\rho(t-u)\delta_h(u)\,du, \quad 0\leq\rho<1.$$

Очевидно, при любом $h\in(0,\pi)$ функция $f_h(t)\in B_1^\rho$ и

$$E_n^+(f_h)_1 = \frac{1}{\pi}E_n^+\left(\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2}K_\rho(u)\,du\right)_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi}E_n^+\left(K_\rho(t)+\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2}[K_\rho(u)-K_\rho(t)]\,du\right)_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi}E_n^+\left(K_\rho(t)\right)_1 + o(h) \geq \frac{2\rho^n}{1-\rho^n} + (1-\rho^2)\frac{n\rho^n}{(1-\rho^n)^2}. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует равенство (19) для случая приближения сверху класса B_1^ρ множеством тригонометрических многочленов T_{n-1}. Аналогичным образом доказывается равенство (19) для случая $E_n^-\left(B_1^\rho\right)_1$.

5. В этом пункте рассмотрим задачу восстановления значений оператора (3) по информации о значениях граничной функции $g(t)$. Общая постановка задачи восстановления значений операторов сформулирована, например, в роботах [4, 5], где рассмотрены некоторые важные конкретные ситуации и приведена соответствующая библиография.

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, A — линейный непрерывный оператор из X в Y, M_N — набор заданных на X линейных непрерывных функционалов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$. Для $x \in X$ сопоставим вектор информации

$$T(x, M_N) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\} \tag{22}$$

и, если $\mathfrak{N}$ — некоторое ограниченное множество в X, которое считается заданным, то положим

$$G(\mathfrak{N}, A, M_N)_Y = \{\|Ax - Ay\|_Y : x, y \in \mathfrak{N}, T(x, M_N) = T(y, M_N)\}.$$

Величина

$$\lambda^N(\mathfrak{N}, A, Y) = \inf_{M_N} G(\mathfrak{N}, A, M_N)_Y$$

называется информационным N-поперечником множества $\mathfrak{N}$ в пространстве Y. Если $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное множество в нормированном пространстве X, то согласно следствию 1 из [4]

$$G(\mathfrak{N}, A, M_N)_Y = 2 \sup \{\|Ax\|_Y : x \in \mathfrak{N}, T(x, M_N) = 0\}. \tag{23}$$

Рассмотрим интерполяционный метод M_{2n}^I восстановления интеграла (3) или, что то же, функции $f(t) = u(\rho, t)$ в метрике L_p по информации

$$T(g, M_{2n}^I) = \{g(k\pi/n + \alpha\}_{k=1}^{2n}, \quad g \in W_q^r.$$

В соответствии с равенством (23) требуется вычислить верхнюю грань величины

$$\sup \left\{ \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_\rho(\cdot - u) g(u)\, du \right\|_p : g \in W_p^r, T\left(g, M_{2n}^I\right) = 0 \right\}. \tag{24}$$

В силу следствия 2.7.3 из [6], если $g(t) \in W_p^r$ и при некотором α выполняется $g(k\pi/n + \alpha) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, то для всех t имеем $|g(t)| \le |\varphi_{n,r}(t + \alpha_r)|$, и следовательно,

$$\|g\|_p \le \|\varphi_{n,r}\|_p, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{25}$$

где $\varphi_{n,r}(u)$ — стандартный идеальный сплайн Эйлера, задаваемый равенствами

$$\varphi_{n,0}(u) = \operatorname{sgn} \sin u,$$

$$\varphi_{n,r}(u) = \int_{\gamma_r}^{u} \varphi_{n,r-1}(t)\, dt, \quad \gamma_r = [1 - (-1)^r] \frac{\pi}{4n},$$

а $\alpha_r = 0$, если r четно и $\alpha_r = \pi/2n$, если r нечетно.

Из общих неравенств для сверток функций и неравенства (25) непосредственно следует

$$G\left(W_\infty^r, A_{K_\rho}, M_{2n}^I\right)_p \le 2\|\varphi_{n,r}\|_p, \quad 0 \le \rho < 1, \ 1 \le p \le \infty,$$

и, в частности,

$$G\left(W_\infty^r, A_{K_\rho}, M_{2n}^I\right)_C \leq 2K_r n^{-r}, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

где A_{K_ρ} — оператор (3), а K_r — константа Фавара [6, с. 65].

Заметим, что только при $r = 1$ функция $\Psi_r(u) := |\varphi_{n,r}(u + \alpha_r)|$ принадлежит классу W_∞^r. Отсюда с учетом равенств (24) получаем

$$G\left(W_\infty^1, A_{K_\rho}, M_{2n}^I\right)_C = 2\|A_{K_\rho}\Psi_1\|_C = \max_t \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} K_\rho(t-u)\Psi_1(u)\,du.$$

Разлагая $\Psi_1(u)$ в ряд Фурье [5]

$$\Psi_1(u) = \frac{\pi}{4n} - \frac{2}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)2nu}{(2\nu+1)^2}$$

с учетом соотношения (4) и обобщенного равенства Парсеваля, получаем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} K_\rho(t-u)\Psi_1(u)\,du = \frac{\pi}{2n} - \frac{4}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}\cos(2n+1)2nu}{(2\nu+1)^2} -$$

$$-\frac{1}{2}(1-\rho^2)\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}\cos(2n+1)2nu}{2\nu+1}.$$

Отсюда имеем

$$\max_t \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} K_\rho(t-u)\Psi_1(u)\,du = \frac{\pi}{2n} + \frac{4}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^2} +$$

$$+\frac{2}{\pi}(1-\rho^2)\ln\frac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4. *Для всех* $\rho \in (0, 1)$ *и* $r = 1, 2, \ldots$ *справедливы неравенства*

$$\lambda^{2n}\left(W_\infty^r, A_{K_\rho}, C\right)_p \leq G\left(W_\infty^r, A_{K_\rho}, M_{2n}^I\right)_p \leq 2\|\varphi_{n,r}\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

При $r = 1$ и $p = \infty$ справедлив более точный результат:

$$\lambda^{2n}\left(W_\infty^1, A_{K_\rho}, C\right) \leq G\left(W_\infty^1, A_{K_\rho}, M_{2n}^I\right)_C =$$

$$= \frac{\pi}{2n} + \frac{4}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu+1)}}{(2\nu+1)^2} + \frac{2}{\pi}(1-\rho^2)\ln\frac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}}, \quad 0 \leq p < 1.$$

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1952. – 724 с.
2. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Korneichuk N. P.* Encoding and recovery of operator values // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 79–91.
5. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном восстановлении значений операторов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1375–1381.
6. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

Получено 18.01.95