УДК 517. 928

В. А. Плотников, д-р физ.-мат. наук (Одес. ун-т),
Л. И. Плотникова, канд. физ.-мат. наук (Одес. политехн. ун-т)

УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

A method of complete and partial averaging methods on finite and infinite intervals is substantiated for differential inclusions with multivalued impulses.

Обгрунтовується метод повного та часткового усереднення на скінченному та нескінченному проміжку для диференціальних включень з багатозначними імпульсами.

Введение. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями интенсивно исследуются в настоящее время. В работах [1, 2] содержится изложение основных проблем теории и достаточно обширная библиография работ. Усреднение уравнений с импульсами рассматривалось в [3–7].

В данной работе рассматривается обоснование метода полного и частичного усреднения дифференциальных включений на конечном и бесконечном промежутках в терминах R-решений [8], т. е. интегральных воронок дифференциальных включений. При этом используются понятия устойчивости в смысле устойчивости пучков траекторий дифференциального включения [9].

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное включение стандартного вида с многозначными импульсами

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t, x), \quad t \neq t_j, \quad x(0) \in K,$$
$$\Delta x\big|_{t=t_j} \in \varepsilon I_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad t_j < t_{j+1}, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр,

$$X\colon R^1 \times R^n \to \operatorname{conv}(R^n), \quad I_j\colon R^n \to \operatorname{conv}(R^n)$$

— многозначное отображение, $\operatorname{comp}(R^n)$ $(\operatorname{conv}(R^n))$ — пространство непустых компактных (выпуклых) подмножеств в R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = \min\{r > 0 \mid A \subset S_r(B),\ B \subset S_r(A)\},$$

$S_r(A)$ — r-окрестность множества A; $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$.

Поставим в соответствие включению (1) следующее частично усредненное дифференциальное включение:

$$\dot{\xi} \in \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \quad t \neq s_j, \quad \xi(0) \in K,$$
$$\Delta \xi\big|_{t=s_j} \in \varepsilon K_j(\xi), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad s_j < s_{j+1}, \tag{2}$$

где

$$\tilde{X}\colon R^1 \times R^n \to \operatorname{conv}(R_n); \qquad K_j\colon R^n \to \operatorname{conv}(R^n),$$

$$\lim_{T\to\infty} h\left(\frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\,dt + \frac{1}{T}\sum_{0 \le t_j \le T} I_j(x),\ \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{X}(t, x)\,dt + \frac{1}{T}\sum_{0 \le s_j \le T} K_j(x)\right) = 0, \tag{3}$$

интеграл от многозначного отображения понимается в смысле Аумана.

Многозначная функция $Y(t)$ называется [8] R-решением, порожденным дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(0) \in K \in \mathrm{comp}(R^n), \tag{4}$$

если при каждом t множество $Y(t)$ компактно, функция $Y(t)$ абсолютно непрерывна и для почти всех t

$$\lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta}\left(Y(t+\Delta), \bigcup_{x \in Y(t)}\left(x + \int_t^{t+\Delta} F(s, x) ds\right)\right) = 0.$$

При достаточно общих условиях сечение пучка обычных решений включения (4) совпадает с $Y(t)$.

R-решение $P(t)$ дифференциального включения (4) называется [9] устойчивым по Ляпунову, если для любых $\eta > 0$ и $t_0 \in [0, \infty)$ существует $\delta(\eta, t_0) > 0$ такое, что:

1) все R-решения $Y(t)$ включения (4), удовлетворяющие условию

$$h(Y(t_0), P(t_0)) < \delta(\eta, t_0), \tag{5}$$

определены для всех $t \geq t_0$;

2) для решений $Y(t)$, удовлетворяющих неравенству (5), выполняется неравенство $h(Y(t), R(t)) < \eta$ для всех $t \geq t_0$.

Аналогично вводятся понятия асимптотически устойчивого и асимптотически орбитально устойчивого R-решения.

2. Метод усреднения на конечном промежутке.

Теорема 1. *Пусть в области* $Q\{t \geq 0, \ x \in D \subset R^n\}$ *выполнены следующие условия:*

1) *многозначные отображения* $\tilde{X}(t, x)$, $X(t, \xi)$, $I_j(x)$, $K_j(x)$ *являются непустыми выпуклыми компактами, непрерывны, равномерно ограничены постоянной* M, *удовлетворяют по* x *условию Липшица с постоянной* λ;

2) *равномерно относительно* x *существует предел* (3) *и*

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} i(t, t+T) &= d < \infty, \\ \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} j(t, t+T) &= d < \infty, \end{aligned} \tag{6}$$

где $i(t, t+T)$ *и* $j(t, t+T)$ — *количество точек последовательностей* t_i *и* s_j *соответственно на промежутке* $[t, t+T]$;

3) *R-решения включения* (2) *для всех* $K \subset D' \subset D$ *при* $t \in [0, L^* \varepsilon^{-1}]$ *лежат вместе с некоторой* ρ*-окрестностью в области* D.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L \in (0, L^*]$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливо неравенство*

$$h(Y(t, \varepsilon), \tilde{Y}^0(t, \varepsilon)) < \eta, \tag{7}$$

где

$$Y(0, \varepsilon) = \tilde{Y}^0(0, \varepsilon) = K \in \mathrm{comp}(R^n), \quad K \subset D.$$

Доказательство. Для любого целого $m \geq 1$ разобьем отрезок $I = [0, L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей точками $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = L\varepsilon^{-1}$.

Построим многозначные отображения

$$Y^m(t, \varepsilon) = \bigcup_{x \in Y^m(\tau_K, \varepsilon)} \left(x + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} X(s, x)\, ds + \varepsilon \sum_{\tau_k \le t_j < t} I_j(x) \right),$$

$$t \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \quad k = \overline{0, m-1}, \quad Y^m(0, \varepsilon) = K, \tag{8}$$

$$\tilde{Y}^m(t, \varepsilon) = \bigcup_{y \in \tilde{Y}^m(\tau_K, \varepsilon)} \left(y + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} \tilde{X}(s, y)\, ds + \varepsilon \sum_{\tau_k \le s_j < t} K_j(y) \right),$$

$$t \in [\tau_k, \tau_{k+1}], \quad k = \overline{0, m-1}, \quad \tilde{Y}^m(0, \varepsilon) = K.$$

При этом

$$h(Y^m(\tau_k, \varepsilon), Y^m(t, \varepsilon)) =$$

$$= h\left(Y^m(\tau_k, \varepsilon), \bigcup_{x \in Y^m(\tau_k, \varepsilon)} \left(x + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} X(s, x) ds + \varepsilon \sum_{\tau_k \le t_j < t} I_j(y) \right) \right) \le$$

$$\le \varepsilon M(t - \tau_k) + \varepsilon M d(t - \tau_k) \le ML(1 + d)/m, \quad \tau_k \le t \le \tau_{k+1}. \tag{9}$$

Аналогично

$$h(\tilde{Y}^m(\tau_k, \varepsilon), \tilde{Y}^m(t, \varepsilon)) \le ML(1 + d)/m,$$

$$h(Y(\tau_k, \varepsilon), Y(t, \varepsilon)) \le ML(1 + d)/m,$$

$$h(\tilde{Y}(\tau_k, \varepsilon), \tilde{Y}(t, \varepsilon)) \le ML(1 + d)/m, \tag{10}$$

$$\| y(t) - y(\tau_k) \| \le ML(1 + d)/m,$$

$$\| \tilde{y}(t) - \tilde{y}(\tau_k) \| \le ML(1 + d)/m, \quad \tau_k \le t \le \tau_{k+1},$$

где $y(t)$, $\tilde{y}(t)$ — обычные решения дифференциальных включений (1) и (2) соответственно.

Докажем, что

$$\lim_{m \to \infty} h(Y^m(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon)) = 0,$$

$$\lim_{m \to \infty} h(\tilde{Y}^m(t, \varepsilon), \tilde{Y}(t, \varepsilon)) = 0.$$

Пусть $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$. Обозначим через $t_1^k, t_2^k, \ldots, t_l^k$ моменты импульсных воздействий на $[\tau_k, \tau_{k+1}]$. Тогда

$$Y(t, \varepsilon) = \bigcup_{x \in Y(\tau_K, \varepsilon)} \bigcup_{v(s) \in X(s, y(s))} \left(y(t) = x + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} v(s) ds \right), \quad \tau_k \le t < t_1^k,$$

$$Y(t, \varepsilon) = \bigcup_{x \in Y(t_j^K - 0, \varepsilon)} \bigcup_{v(s), r} \left(y(t) = z + \varepsilon \int_{t_j^k}^{t} v(s) ds, \quad v(s) \in X(s, y(s)), \right.$$

$$\left. z = x + \varepsilon r, \quad r \in I_{t_j^k}(x) \right), \quad t_j^k \le t < t_{j+1}^k, \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{11}$$

Пусть $\delta_k = h(Y(\tau_k, \varepsilon), Y^m(\tau_k, \varepsilon))$, тогда при $t \in [\tau_k, t_1^k)$

$$h(Y(t,\varepsilon), Y^m(t,\varepsilon)) =$$

$$= h\left(\bigcup_{x \in Y(\tau_K, \varepsilon)} \bigcup_{v(s) \in X(s, y(s))} \left(y(t) = x + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} v(s)\, ds \right), \right.$$

$$\left. \bigcup_{z \in Y^m(\tau_k, \varepsilon)} \left(z + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} X(s, z)\, ds \right) \right) \le$$

$$\le \delta_k + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} \lambda \| y(s) - x \|\, ds + \varepsilon \lambda \delta_k (t - \tau_k) \le$$

$$\le \delta_k (1 + \lambda L / m) + \lambda M L^2 / m^2 \le ML(\exp(\lambda L) - 1). \tag{12}$$

При $t \in [t_j^s, t_{j+1}^s]$ имеем

$$h(Y(t,\varepsilon), Y^m(t,\varepsilon)) =$$

$$= h\left(\bigcup_{x \in Y(\tau_K, \varepsilon)} \bigcup_{v(s) \in X(s, y(s))} \left(y(t) = x + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} v(s)\, ds + \right. \right.$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{\tau_k \le s_j < t} \Delta_j,\ y(t_j + 0) - y(t_j - 0) = \varepsilon \Delta_j,\ \Delta_j \in I_j(y(t_j - 0)) \right),$$

$$\left. \bigcup_{v \in Y^m(\tau_k, \varepsilon)} \left(v + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} X(s, v)\, ds + \varepsilon \sum_{\tau_k \le s_j < t} I_j(v) \right) \right) \le$$

$$\le \delta_k \left(1 + \frac{\lambda L}{m} + \frac{d}{\lambda L / m} \right) + \frac{\lambda M L^2}{m^2} + \frac{\lambda d M L^2 (1 + d)}{m^2} \le$$

$$\le ML(1 + d)(\exp(\lambda L(1 + d)) + 1). \tag{13}$$

Аналогично получаем оценку

$$h(\tilde{Y}(t,\varepsilon), \tilde{Y}^m(t,\varepsilon)) \le ML(1 + d)(\exp(\lambda L(1 + d)) + 1). \tag{14}$$

При $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = \overline{0,\ m-1}$, оценим

$$h(Y^m(t,\varepsilon), \tilde{Y}^m(t,\varepsilon)) =$$

$$= h\left(\bigcup_{x \in Y^m(\tau_k, \varepsilon)} \left(x + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} X(s, x)\, ds + \varepsilon \sum_{\tau_k \le t_j < t} I_j(x) \right), \right.$$

$$\left. \bigcup_{y \in \tilde{Y}^m(\tau_k, \varepsilon)} \left(y + \varepsilon \int_{\tau_k}^{t} \tilde{X}(s, y)\, ds + \varepsilon \sum_{\tau_k \le s_j < t} K_j(y) \right) \right) \le$$

$$\le \eta_1 (\exp((1 + d)\lambda L) - 1) / \lambda(1 + d). \tag{15}$$

Из (13)–(15) имеем

$$h(Y(t,\varepsilon),\tilde{Y}(t,\varepsilon)) \le \eta_1(\exp((1+d)\lambda L)-1)/\lambda(1+d)+ \\ + ML(1+d)(\exp(\lambda L(1+d))+1). \tag{16}$$

Выбирая

$$m \ge 4ML(1+d)(\exp(\lambda L(1+d))+1)/\eta,$$
$$\eta_1 \le \eta\lambda(1+d)/(2(\exp(\lambda L(1+d))-1)),$$

получаем из (16) утверждение (7) теоремы.

***Замечание* 1.** Если включение (1) периодично с периодом τ, то включению (1) поставим в соответствие включение (2) такое, что

$$\int_0^\tau \tilde{X}(t,x)\,dt + \sum_{0\le s_j<\tau} K_j(x) = \int_0^\tau X(t,x)\,dt + \sum_{0\le t_j<\tau} I_j(x). \tag{17}$$

Используя схему полного усреднения, имеем

$$\begin{gathered} \xi \in \varepsilon X_0(\xi), \quad t \ne i\tau, \quad i = 1,2,\ldots, \\ \Delta\xi|_{t=i\tau} \in \varepsilon P_0(\xi(i\tau-0)), \end{gathered} \tag{18}$$

где

$$X_0(x)+P_0(x) = \left(\int_0^\tau X(t,x)\,dt + \sum_{0\le t_j<\tau} I_j(x)\right)/\tau.$$

В этом случае оценка (7) принимает вид

$$h(Y(t,\varepsilon),\tilde{Y}(t,\varepsilon)) \le C\varepsilon. \tag{19}$$

Заметим, что полагая в (18) $X_0(x)\equiv 0$, получаем дискретную систему, а при $P_0(x)\equiv 0$ получаем дифференциальное включение без импульсных воздействий. Аналогичное замечание относится к исходной системе, т. е. возможны случаи $X(t,x)\equiv 0$, $I_j(x)\ne 0$ и $X(t,x)\ne 0$, $I_j\equiv 0$. Следовательно, теорема в частном случае дает обоснование метода усреднения для дискретных включений и включений, не содержащих импульсов.

Если включение (1) не является периодическим, то включению (1) можно поставить в соответствие частично усредненное включение с помощью следующей схемы ступенчатого усреднения:

$$\begin{gathered} \xi \in \varepsilon \overline{X}(\xi), \quad i\tau < t < \tau(i+1), \quad i = 1,2,\ldots, \\ \Delta\xi|_{t=i\tau} \in \varepsilon K_i(\xi(i\tau-0)), \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\overline{X}(x)+K_i(x) = \frac{1}{\tau}\left(\int_{i\tau}^{(i+1)\tau} X(t,x)\,dt + \sum_{i\tau\le t_j<\tau(i+1)} I_j(x)\right).$$

При этом для включений (1), (20) справедлива оценка (19). Сумма множеств $\overline{X}_i(x)+K_i(x)$ может так же, как и в периодическом случае, реализовываться различными способами и тем самым приводить к дискретным включениям и включениям с импульсами и без импульсов.

***Замечание* 2.** Пусть включение (1) имеет вид системы дифференциальных включений

$$\begin{gathered}\dot{x}_i \in \varepsilon X_i(t, x), \quad t \neq t_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \\ \Delta x_i|_{t=t_j} \in \varepsilon I_j^i(x(t_j - 0)),\end{gathered} \tag{21}$$

где

$$x_i \in R^{n_i}, \quad X_i\colon R^1 \times R^{n_1} \times \ldots \times R^{n_m} \to \operatorname{conv}(R^{n_i}), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

В этом случае можно рассмотреть схему частичного усреднения, аналогичную схеме частичного усреднения для дифференциальных уравнений А. Н. Филатова [10], т. е. поставить в соответствие включению (21) следующее частично усредненное включение:

$$\begin{gathered}\dot{\xi}_i \in \varepsilon X_i(t, \xi), \quad t \neq t_j, \quad i \in N_1 \subset N, \\ \Delta \xi_i|_{t=t_j} \in \varepsilon I_i^j(\xi(t_j - 0)), \\ \dot{\xi}_j \in \overline{X}_j(\xi), \quad j \in N \setminus N_1,\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$\overline{X}_j(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\int\limits_0^T X(t, x)\,dt + \sum_{0 \le t_j < T} I_i^j(x) \right).$$

Заметим, что усреднение в (22) отображений $X_j(t, x)$ можно проводить не обязательно по схеме полного усреднения, а комбинируя различные схемы усреднения, рассмотренные в замечании 1.

3. Метод усреднения на бесконечном промежутке. Рассмотрим усредненное дифференциальное включение

$$\dot{\xi} \in \overline{X}(\xi), \quad \xi(0) = x^0, \tag{23}$$

где

$$\overline{X}(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\int\limits_t^{t+T} X(t, x)\,dt + \sum_{t \le t_j < t+T} I_i^j(x) \right). \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть в области Q выполнены следующие условия:*

1) *отображения $X(t, x)$ и $I_j(x)$ являются непустыми выпуклыми компактами, непрерывны, равномерно ограничены, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ;*

2) *существует предел* (24) *и*

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{T} i(t, t+T) = d < \infty$$

равномерно относительно $x \in D$ и $t \ge 0$;

3) *для всех $x^0 \in D' \subset D$ и $t \ge 0$ R-решения включения* (23) *равномерно асимптотически устойчивы и вместе с ρ-окрестностью лежат в области D.*

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \ge 0$ справедливо неравенство $h(Y(t, \varepsilon), \overline{Y}(\varepsilon t)) \le \eta$, где $Y(0, \varepsilon) = \overline{Y}(0) = x^0$, $Y(t, \varepsilon)$ — R-решение включения (1), *$\overline{Y}(\varepsilon t)$ — R-решение включения* (23).

Теорема 3. *Пусть в области Q выполнены следующие условия:*

1) *выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 2;

2) *усредненное включение* (23) *имеет периодическое R-решение $\overline{R}(\tau)$,*

траектория которого C *является асимптотически орбитально устойчивой и лежит вместе с некоторой* δ*-окрестностью в области* D.

Тогда для любого $\eta \in (0, \delta]$ *можно указать такие* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\eta_0 \in (0, \eta]$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ *и* $t \geq 0$ *справедливо неравенство* $h(R(t), C) < \eta$, *где* $R(t)$ — R*-решение включения* (1), *которое в начальный момент удовлетворяет условию* $h(R(0), C) < \eta_1$.

Теорема 4. *Пусть в области* Q *выполнены следующие условия:*

1) *выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 2;

2) *включение* (23) *имеет асимптотически устойчивое положение равновесия* $\overline{R}^0$, *которое вместе с некоторой* ρ_0*-окрестностью принадлежит множеству* D.

Тогда для любых $\eta \in (0, \rho_0)$ *существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\eta_0 \in (0, \eta]$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\eta_1 \in (0, \eta_0]$ *и* $t \geq 0$ *справедливо неравенство* $h(R(t), \overline{R}^0) < \eta$, *где* $R(t)$ — R*-решение включения* (1), *которое в начальный момент удовлетворяет условию* $h(R(0), \overline{R}^0) < \eta_1$.

Доказательство теорем 2–4 проводится аналогично доказательству соответствующих теорем для дифференциальных уравнений [6, 10, 11] с заменой в этих доказательствах ссылок на первую теорему Н. Н. Боголюбова ссылками на теорему 1.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы: Модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
3. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – № 9. – С. 101–117.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 11. – С. 2001–2009.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения для систем с импульсами // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 56–64.
6. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев–Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
7. *Иванюк Н. В.* Об одной схеме усреднения для систем с многозначными импульсами // Вопросы устойчивости интегральных многообразий в уравнениях математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 23–28.
8. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977. – 206 с.
9. *Плотников В. А.* Усреднение дифференциальных включений // Укр. мат журн. – 1979. – **31**, № 5. – С. 573–576.
10. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
11. *C. Banfi.* Sull approcsimazione di processe non stazionari in macanica non lineare // Boll. Unijn mat. Ital. – 1967. – **22**, № 4. – P. 442–450.

Получено 07.04.94