УДК 519.21

Я. І. Єлейко, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т),
$\boxed{\textbf{В. М. Шуренков}}$, д-р фіз.-мат. наук (Київ. автодор. ін-т)

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ

Asymptotic properties of matrix-valued random evolutions are studied. An example of such evolutions is considered.

Вивчаються.асимптотичні властивості матричнозначних випадкових еволюцій. Розглянуто приклад таких еволюцій.

Нехай $x(t)$ — регенеруючий [1] процес з моментами регенерації $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P).

Розглянемо сім'ю невід'ємних матричнозначних процесів $\xi_\varepsilon(t)$, $0 \le t \le \tau$, розмірності $m \times m$, які функціонально залежать від малого параметра ε, але статистично не залежать від регенеруючого процесу $x(t)$, $t \ge 0$. За процесом $\xi_\varepsilon(t)$ і послідовністю моментів регенерації $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ побудуємо матричнозначну еволюцію вигляду

$$N_\varepsilon(t) = \begin{cases} \xi_\varepsilon^1(t), & 0 \le t \le \tau_1; \\ \xi_\varepsilon^1(\tau_1)\xi_\varepsilon^2(t-\tau_1), & \tau_1 < t \le \tau_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \xi_\varepsilon^1(\tau_1)\xi_\varepsilon^2(\tau_2-\tau_1)\ldots\xi_\varepsilon^k(\tau_k-\tau_{k-1})\xi_\varepsilon^{k+1}(t-\tau_k), & \tau_k < t \le \tau_{k+1}, \end{cases} \qquad (1)$$

де $\xi_\varepsilon^n(t)$ — послідовність незалежних копій процесу $\xi_\varepsilon(t)$, $n = 1, 2, \ldots$. Згідно з побудовою процес $N_\varepsilon(t)$ є мультиплікативним функціоналом.

Послідовність $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \ldots, \tau_k - \tau_{k-1}, \ldots$ складається з незалежних і однаково розподілених випадкових величин. Будемо вважати також, що $M\tau < \infty$. Знайдемо асимптотику при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. За формулою повної ймовірності

$$MN_\varepsilon(t) = M(N_\varepsilon(t), \tau > t) + \int_0^t M(N_\varepsilon(u), \tau \in du)MN(t-u) =$$

$$= M(\xi_\varepsilon(t), \tau > t) + \int_0^t M(\xi_\varepsilon(u), \tau \in du)M(N_\varepsilon(t-u)). \qquad (2)$$

Введемо позначення

$$R_\varepsilon(t) = MN_\varepsilon(t),$$

$$G_\varepsilon(t) = M(\xi_\varepsilon(t), \tau > t),$$

$$K_\varepsilon(du) = M(\xi_\varepsilon(u), \tau \in du).$$

Рівняння (2) є рівнянням відновлення. Згідно з прийнятими позначеннями воно набуває вигляду

$$R_\varepsilon(t) = G_\varepsilon(t) + \int_0^t K_\varepsilon(du)R_\varepsilon(t-u). \qquad (3)$$

Нехай $K_\varepsilon = M(\xi_\varepsilon(\tau))$. Через $\| C \|$ позначимо норму матриці C. Нехай також $\bar{x} \otimes \bar{y}$ — матриця $(x_i \cdot y_j)_{i,j=1,\ldots,m}$, де x_i, y_j — відповідно i- та j-та координати векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай послідовність матриць* $G_\varepsilon(t)$ *така, що при деякому* $\gamma \ge$ ≥ 0

$$\sup_{\varepsilon} \sup_{t \geq 0} \frac{\| G_\varepsilon(t) \|}{\max(1, t^\gamma)} < \infty \tag{4}$$

і за нормою операторів

$$\frac{1}{t^\gamma} G_\varepsilon(t) \to f(z) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad t \to \infty, \quad t(\lambda_\varepsilon - 1) \to z, \tag{5}$$

$$K_\varepsilon \to K, \quad \varepsilon \to 0, \tag{6}$$

причому матриця K *нерозкладна з перроновим коренем* 1; λ_ε — *перронів корінь, який відповідає матриці* K_ε. *Тоді якщо*

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{\varepsilon} \left\| \int_t^\infty y K_\varepsilon(dy) \right\| = 0,$$

то

$$\lim_{\substack{t \to \infty,\, \varepsilon \to 0 \\ t(\lambda_\varepsilon - 1) \to c}} \frac{1}{t^{\gamma+1}} M N_\varepsilon(t) = \frac{1}{a} \overline{u} \otimes \overline{v} \int_0^1 f(c(1-y))(1-y)^\gamma e^{yc/a}\, dy,$$

де $\overline{u}$ *і* $\overline{v}$ — *правий і лівий власні додатні вектори матриці* K,

$$K \overline{u} = \overline{u}; \quad \overline{v} K = \overline{v}; \quad (\overline{v}, \overline{u}) = 1, \quad a = \overline{v} \int_0^\infty y K(dy)\, \overline{u}.$$

Доведення. Оскільки $MN_\varepsilon(t)$ задовольняє рівняння відновлення (3), то його розв'язок можна записати у вигляді

$$R_\varepsilon(t) = \int_0^t H_\varepsilon(du) G_\varepsilon(t-u), \tag{7}$$

де

$$H_\varepsilon(du) = \sum_{r=0}^\infty K_\varepsilon^{r*}(du), \tag{8}$$

$$K_\varepsilon^{r*}(t) = \int_0^t K_\varepsilon^{(r-1)*}(du) K_\varepsilon(t-u),$$

$$K_\varepsilon^{1*}(t) = K_\varepsilon([0, t)),$$

$$K_\varepsilon^{0*}(t) = \begin{cases} \mathrm{I}, & \text{коли } t \geq 0; \\ O, & \text{коли } t < 0, \end{cases}$$

I — матриця одиничного оператора, O — нульова матриця. Оскільки $M\tau < \infty$, то, як відомо [2],

$$\frac{1}{t} H_\varepsilon([0, t)) \to \frac{1}{a}\left(e^{c/a} - 1\right) \overline{u} \otimes \overline{v}$$

при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $t(\lambda_\varepsilon - 1) \to c$. Маємо

$$\frac{1}{t^{\gamma+1}} \int_0^t H_\varepsilon(du) M(\xi_\varepsilon(t-u),\ \tau > t-u) =$$

$$= \frac{1}{t^{\gamma+1}} \int_0^1 dH_\varepsilon(tu) M(\xi_\varepsilon(t(1-u)),\ \tau > t(1-u)) =$$

$$= \int_0^{1-\varepsilon_1} d\left(\frac{1}{t} H_\varepsilon(tu)\right) \frac{M(\xi_\varepsilon(t(1-u)), \tau > t(1-u))}{(t(1-u))^\gamma}(1-u)^\gamma +$$

$$+ \frac{1}{t^{\gamma+1}} \int_{1-\varepsilon_1}^{1} dH_\varepsilon(tu) M(\xi_\varepsilon(t(1-u)), \ \tau > t(1-u)). \quad (9)$$

Якщо $t \to \infty, \ \varepsilon \to 0, \ t(\lambda_\varepsilon - 1) \to c,$ то згідно з умовою (5)

$$\frac{M(\xi_\varepsilon(t(1-u)), \tau > t(1-u))}{(t(1-u))^\gamma} \to f(c(1-u))$$

рівномірно відносно $u \in [0, 1-\varepsilon_1]$ за нормою операторів $H_\varepsilon(tu)/t$ має при всіх $u > 0$ границю $(1/a)\int_0^u e^{sc/a} ds \, \bar{u} \otimes \bar{v}$ при $t \to \infty, \ \varepsilon \to 0, \ t(\lambda_\varepsilon - 1) \to c.$

Далі, за умов теореми (4) з деякою сталою β виконується нерівність

$$\| M(\xi_\varepsilon(u), \ \tau > u) \| < \beta(\max(1, u^\gamma)).$$

Таким чином, при $t > 1/\varepsilon_1$ норма другого доданку в правій частині (9) не перевищує

$$\beta \, \varepsilon_1^\gamma \frac{1}{t} \| H_\varepsilon(t) - H_\varepsilon(t(1-\varepsilon_1)) \|.$$

Згідно з умовами границя цього виразу дорівнює

$$\frac{\beta \varepsilon_1^\gamma}{a} \int_{1-\varepsilon_1}^{1} e^{yc/a} dy \, \| \bar{u} \otimes \bar{v} \|$$

і завдяки вибору ε_1 може бути як завгодно малою. Теорема доведена.

Розглянемо приклад стохастичної еволюції.

Приклад. Нехай $\psi^\varepsilon(t)$ — матричнозначна випадкова еволюція, задана як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d\psi^\varepsilon(t)}{dt} = \psi^\varepsilon(t) A^\varepsilon(x(t)) \quad (10)$$

з початковою умовою

$$\psi^\varepsilon(0) = \mathrm{I},$$

де $x(t)$ — регенеруючий процес з моментами регенерації $\tau_1, \tau_2, \ldots, A^\varepsilon(x(t))$ — сім'я матричнозначних функцій розмірності $m \times m$, ε — малий параметр. Розв'язок рівняння (10) можна подати у вигляді

$$\psi^\varepsilon(t) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{I} + A^\varepsilon(x(t_i)\Delta t_i),$$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \mathrm{t}; \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}. \quad (11)$$

Розглянемо також допоміжне матричнозначне еволюційне рівняння

$$\frac{dT^\varepsilon(s,t)}{dt} = T^\varepsilon(s,t) A^\varepsilon(x(t)) \quad (12)$$

з граничною умовою

$$T^\varepsilon(s,s) = \mathrm{I}.$$

Розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$T^{\varepsilon}(s,t) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{I} + A^{\varepsilon}(x(t_i)\Delta t_i), \tag{13}$$

$$s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t; \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Із зображення розв'язку (13) одержуємо $T^{\varepsilon}(s,t) = T^{\varepsilon}(s,u)T^{\varepsilon}(u,t)$. Розв'язок (10) можна зобразити через розв'язок рівняння (12) таким чином:

$$\psi^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} T^{\varepsilon}(0,t), & t \le \tau_1; \\ T^{\varepsilon}(0,\tau_1)T^{\varepsilon}(\tau_1,t), & \tau_1 < t \le \tau_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ T^{\varepsilon}(0,\tau_1)T^{\varepsilon}(\tau_1,\tau_2)\ldots T^{\varepsilon}(\tau_{k-1},\tau_k)T^{\varepsilon}(\tau_k,t), & \tau_k < t \le \tau_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

Якщо позначити $\xi_{\varepsilon}^{k}(t) = T^{\varepsilon}(\tau_k, \tau_k + t)$, то $\xi_{\varepsilon}^{k}(t)$ — незалежні копії процесу $\xi_{\varepsilon}(t) = T^{\varepsilon}(0,t)$; $t < \tau_1$. Це випливає з того, що $\xi_{\varepsilon}^{k}(t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}\xi_{\varepsilon}^{k}(t) = \xi_{\varepsilon}^{k}(t)A^{\varepsilon}(x^{k}(t))$$

з граничною умовою

$$\xi_{\varepsilon}^{k}(0) = \mathrm{I},$$

де $x^{k}(t) = x(\tau_k + t)$, $0 \le t < \tau_{k+1} - \tau_k$, — незалежні копії $x(t)$, $0 \le t < \tau_1$.

Отже, $\psi^{\varepsilon}(t)$ можна подати у вигляді

$$\psi^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \xi_{\varepsilon}^{1}(t), & t \le \tau_1; \\ \xi_{\varepsilon}^{1}(\tau_1)\xi_{\varepsilon}^{2}(t-\tau_1), & \tau_1 < t \le \tau_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \xi_{\varepsilon}^{1}(\tau_1)\xi_{\varepsilon}^{2}(\tau_2-\tau_1)\ldots\xi_{\varepsilon}^{k}(\tau_k-\tau_{k-1})\xi_{\varepsilon}^{k+1}(t-\tau_k), & \tau_k < t \le \tau_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

$\psi^{\varepsilon}(t)$ за побудовою співпадає із стохастичною еволюцією (1). Позначимо $M(\xi_{\varepsilon}(t),\ \tau > t) = G_{\varepsilon}(t)$. Нехай

$$\sup_{\varepsilon}\sup_{t}\frac{\| G_{\varepsilon}(t)\|}{\max\{1, t^{\gamma}\}} < \infty$$

і за нормою операторів

$$\frac{1}{t^{\gamma}}G_{\varepsilon}(t) \to f(z), \quad \varepsilon \to 0, \quad t \to \infty, \quad t(\lambda_{\varepsilon} - 1) \to z,$$

$$K_{\varepsilon} \to K,\ \varepsilon \to 0, \quad K_{\varepsilon} = M(\xi_{\varepsilon}(\tau)),$$

матриця K нерозкладна і її перронів корінь дорівнює 1, λ_{ε} — перронів корінь матриці K_{ε}. Крім цього, якщо

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\varepsilon}\left\| \int_{t}^{\infty} yK_{\varepsilon}(dy)\right\| = 0,$$

то згідно з теоремою 1

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0,\ t\to\infty \\ t(\lambda_{\varepsilon}-1)\to c}} \frac{1}{t^{\gamma+1}}M\psi^{\varepsilon}(t) = \frac{1}{a}\,\overline{u} \otimes \overline{v}\int_{0}^{1} f(c(1-y))(1-y)^{\gamma}e^{cy/a}\,dy,$$

де $\overline{u}$ і $\overline{v}$ — правий і лівий власні додатні вектори матриці K,

$$a = \overline{v} \int_0^\infty yK(dy)\,\overline{u}.$$

Тепер будемо вважати, що права частина (10) має вигляд

$$A^\varepsilon(x) = A + \delta_1(\varepsilon)B_1^\varepsilon(x) + \delta_2(\varepsilon)B_2^\varepsilon(x) + \ldots + \delta_k(\varepsilon)B_k^\varepsilon(x) + o(\delta_k(\varepsilon)),$$

де послідовність функцій $\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_k(\varepsilon)$ утворює шкалу вигляду

$$\frac{\delta_i(\varepsilon)}{\delta_{i-1}(\varepsilon)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0; \quad i = 2, \ldots, k,$$

а $B_i^\varepsilon(x) \to B_i(x)$; $i = 1, \ldots, k$. Матриця A має невід'ємні недіагональні елементи і, крім цього, її перронів корінь дорівнює 0. Тоді існують правий і лівий власні додатні вектори $\overline{u}$, $\overline{v}$ матриці A такі, що $A\overline{u} = \overline{0}$, $\overline{v}A = \overline{0}$.

Якщо позначити $K_\varepsilon = MT^\varepsilon(\tau)$, $K = Me^{\tau A}$, то згідно з прийнятими припущеннями $K_\varepsilon \to K$, $\varepsilon \to 0$, матриця має перронів корінь 1 з власними правим і лівим векторами $\overline{u}$, $\overline{v}$ і матриця K_ε має перронів корінь λ_ε з власними правим і лівим векторами $\overline{u}_\varepsilon$, $\overline{v}_\varepsilon$ такими, що $\lambda_\varepsilon \to 1$, $\overline{u}_\varepsilon \to \overline{u}$, $\overline{v}_\varepsilon \to \overline{v}$ при $\varepsilon \to 0$.

Знайдемо асимптотику $\lambda_\varepsilon - 1$. Позначимо

$$b_i = M\int_0^\tau \overline{v}B_i(x(r))\,\overline{u}\,dr,$$

$$b_{12} = M\int_0^\tau \overline{v}\int_0^s T^0(r)B_1(x(r))\,e^{(s-\tau)A}B_1(x(s))\,\overline{u}\,dr\,ds,$$

$$b_3 = M\int_0^\tau \overline{v}B_1(x(s))\,e^{(\tau-s)A}V\overline{u}\,ds,$$

де V — узагальнена обернена матриця до $K - I$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $b_1 \neq 0$, *то* $\lambda_\varepsilon - 1 = b_1\delta_1(\varepsilon) + o(\delta_1(\varepsilon))$. *Якщо* $b_1 = 0$, *то:*

а) $\lambda_\varepsilon - 1 = \delta_2(\varepsilon)b_2 + o(\delta_2(\varepsilon))$ *при* $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$;

б) $\lambda_\varepsilon - 1 = (b_{12} - b_3)\,\delta_1^2(\varepsilon) + o(\delta_1^2(\varepsilon))$ *при* $\delta_2(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$;

в) $\lambda_\varepsilon - 1 = (b_{12} - b_3 + db_2)\,\delta_1^2(\varepsilon) + o(\delta_1^2(\varepsilon))$ *при* $\delta_2(\varepsilon) \sim d\delta_1^2(\varepsilon)$.

Доведення даної теореми грунтується на зображенні

$$\lambda_\varepsilon - 1 = \overline{v}_\varepsilon\,(K_\varepsilon - K)\,\overline{u}$$

і розв'язку

$$T^\varepsilon(t) = e^{tA} + \sum_{i=1}^n \delta_i(\varepsilon)\int_0^t T^\varepsilon(s)B_i^\varepsilon(x(s))\,e^{(t-s)A}ds,$$

звідки неважко одержати кінцевий результат.

1. *Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю., Шуренков В. М.* Случайные процессы. Справочник. – Киев: Наук. думка, 1983. – 366 с.
2. *Шуренков В. М.* Переходные явления теории восстановления // Мат. сб. – 1980. – **112**, № 1. – С. 115–132.

Одержано 29.07.93