УДК 519.61

А. М. Гомилко, д-р физ.-мат. наук (Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев)

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Recurrent formulas for bounded solutions of the system of equations

$$x_k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!\,n!} \alpha^{k+n+1} x_n = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \alpha \in (0, 1/2),$$

with right-hand sides $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} = \{\delta_{kj}\}_{k=0}^{\infty}$, $j = 0, 1, \ldots$, where δ_{kj} is Kronecker symbol, are obtained.

Знайдено рекурентні формули для обмежених розв'язків системи рівнянь

$$x_k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!\,n!} \alpha^{k+n+1} x_n = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \alpha \in (0, 1/2),$$

з правими частинами $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} = \{\delta_{kj}\}_{k=0}^{\infty}$, $j = 0, 1, \ldots$, де δ_{kj} — символ Кронекера.

Рассматривается бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$x_k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!\,n!} \alpha^{k+n+1} x_n = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где постоянная $\alpha \in (0, 1/2)$. Такая система возникает при исследовании осесимметричной граничной задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внешности двух сфер одинакового радиуса [1, 2]. Пусть l_∞ — банахово пространство ограниченных последовательностей $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$. Равенства [3, с. 710]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!\,n!} \alpha^{k+n+1} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

вместе с оценкой $\alpha/(1-\alpha) < 1$ показывают [4] (гл. 1, § 2.3), что для любой последовательности $f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_\infty$ система уравнений (1) имеет единственное решение $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_\infty$, причем это решение представляется рядом Неймана

$$x_k = \sum_{j=0}^{\infty} x_k^{(j)}, \quad x_k^{(j+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!\,n!} \alpha^{k+n+1} x_n^{(j)}, \quad x_k^{(0)} = f_k, \tag{3}$$
$$k, j = 0, 1, \ldots,$$

и допускает оценки

$$|x_k| \le |f_k| + \frac{\alpha}{1-2\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k \|f\|_{l_\infty}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

При $j = 0, 1, \ldots$ обозначим через $x(j) = \{x_k(j)\}_{k=0}^{\infty} \in l_\infty$ решение системы уравнений (1) в случае правой части $f_k = \delta_{kj}$, $k = 0, 1, \ldots$, где δ_{kj} — символ Кронекера. Для решения $x(0)$ из (3) имеем выражение [2]

$$x_k(0) = \delta_{k0} + (1-\beta^2)\beta^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\beta^{2n})^k \beta^n}{(1-\beta^{2n+2})^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

где

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\nu - \sqrt{\nu^2 - 4}\right) \in (0,1), \quad \nu = \alpha^{-1} \in (2, \infty).$$

В общем случае правой части $f \in l_\infty$ системы уравнений (1) формулы (3) представляют собой довольно сложные выражения. Тем не менее, как показано в настоящей работе, существуют рекуррентные соотношения для решений $x(j)$ системы уравнений (1), так что для нахождения $x(j)$ при $j \geq 1$ достаточно знать решение $x(0)$, определенное согласно (5). При исследовании этого вопроса, следуя [2], используются функции комплексного переменного

$$\Phi_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(j)\, z^n, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

и связанные с ними, на основании системы (1), функциональные соотношения.

Введем в рассмотрение дробно-линейное преобразование T:

$$Tz = (\nu - z)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что точки β и

$$\beta^{-1} = \frac{1}{2}\left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 4}\right) \in (1, \infty).$$

являются неподвижными точками преобразования T. Согласно (4) верны оценки $|x_k(j)| \leq c_j(\nu - 1)^{-k}$, $k = 0, 1, \ldots$, поэтому функции $\Phi_j(z)$ являются аналитическими в круге $|z| < \nu - 1 \in (1, \infty)$.

Справедливо следующее утверждение относительно аналитических свойств функций $\Phi_j(z)$, $j = 0, 1, \ldots$.

Лемма 1. *Функция $\Phi_j(z)$ продолжается мероморфным образом в область $V_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\beta^{-1}\}$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяет в V_0 функциональному уравнению*

$$\Phi_j(z) = \Phi_j(Tz)\, Tz + z^j \tag{7}$$

и имеет в качестве особенностей в V_0 полюс порядка j в точке $z = \infty$ и полюсы порядка $j+1$ в точках

$$z_k = \frac{(1 - \beta^{2k+2})}{\beta(1 - \beta^{2k})}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Доказательство. Пусть γ — единичная окружность $|z| = 1$, ориентированная против часовой стрелки. Тогда из определения (6) для $x_k(j)$ получаем выражения

$$x_k(j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\Phi_j(z)}{z^{k+1}}\, dz, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{9}$$

Подставляя (9) в систему уравнений (1) и учитывая (2), находим

$$\Phi_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_\gamma \frac{z^k \Phi_j(z)}{(\nu z - 1)^{k+1}}\, dz + \lambda^j, \quad |\lambda| \leq 1. \tag{10}$$

При этом окружность $\gamma_1 = Tz$ лежит внутри γ. Используя теорему о вычетах, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_\gamma \frac{z^k \Phi_j(z)}{(\nu z - 1)^{k+1}}\, dz = \int_\gamma \frac{\Phi_j(z)}{(\nu z - \lambda z - 1)}\, dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{\nu-\lambda}\,\Phi_j\!\left(\frac{1}{\nu-\lambda}\right), \quad |\lambda| \le 1,$$

откуда с учетом (10) заключаем, что функция $\Phi_j(z)$ удовлетворяет при $|z| \le 1$ соотношению (7). Пусть G — разрывная в области $V = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\{\beta\} \cup \{\beta^{-1}\})$ группа дробно-линейных преобразований, порожденная преобразованием T [5, с. 76]. При этом область F, ограниченная окружностями γ и γ_1:

$$F = \{z\colon |z| \le 1\} \cap \left\{z\colon \left|z - \frac{\nu}{\nu^2-1}\right| > \frac{1}{\nu^2-1}\right\},$$

является фундаментальной областью группы G (см. [5, с. 84]). Тогда (так как замыкание $\overline{F}$ области F лежит в круге $|z| < \nu - 1$, где функция $\Phi_j(z)$ является аналитической по своему определению) продолжение $\Phi_j(z)$ согласно соотношению (7), справедливому при $|z| \le 1$, приводит к соотношению (7), справедливому уже при $z \in V_0$, и показывает, что $\Phi_j(z)$ мероморфна в V_0. При этом $\Phi_j(z)$ имеет полюс порядка j в точке $z = \infty$ и полюсы порядка $j+1$ в точках $z_k = T^{-k}\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, для которых с учетом $T^{-1}z = \nu - 1/z$ нетрудно получить выражения (8). Лемма доказана.

Пусть функция

$$R(z) = (z-\beta)(z-1/\beta) = z^2 - \nu z + 1.$$

По последовательности функций $\Phi_j(z)$, $j = 0, 1, \ldots$, введем в рассмотрение функции

$$\begin{gathered} N_m(z) = \Phi_m(z) + \sum_{j=0}^{m} c_m^j \nu^{m-j} (-1)^j \frac{\Phi_j(z^{-1})}{z}, \\ K_m(z) = zN_m(z) + R(z)N_m'(z), \end{gathered} \tag{11}$$

где $m = 0, 1, \ldots$ и биномиальные коэффициенты $c_m^j = \dfrac{m!}{j!\,(m-j)!}$. Из леммы 1 вытекает, что функции $N_m(z)$, $K_m(z)$ мероморфны в области V с полюсами в точках $z = 0, \infty$ и $z_k^{\pm 1} \overline{\in} \overline{F}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Лемма 2. *Справедливы соотношения*

$$N_m(z) = N_m(Tz)\,Tz, \quad K_m(z) = K_m(Tz)\,Tz, \quad z \in V. \tag{12}$$

Доказательство. Используя (7) и соотношение $T(Tz)^{-1} = z^{-1}$, имеем

$$\Phi_j((Tz)^{-1}) = \Phi_j(T(Tz)^{-1})\,T(Tz)^{-1} + (Tz)^{-j} = z^{-1}\Phi_j(z^{-1}) + (\nu - z)^{-1}.$$

Тогда, учитывая равенства

$$\Phi_j(Tz)\,Tz = \Phi_j(z) - z^j, \quad \sum_{j=0}^{m} c_m^j \nu^{m-j}(-1)^j(\nu - z)^j = z^m,$$

получаем

$$N_m(Tz)\,Tz = \Phi_m(z) - z^m +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} c_m^j \nu^{m-j}(-1)^j\left(z^{-1}\Phi_j(z^{-1}) + (\nu - z)^j\right) = N_m(z),$$

т. е. первое из соотношений (12). Из этого соотношения и следующего из него после дифференцирования равенства

$$N'_m(z) = (Tz)^2(N_m(Tz) + N'_m(Tz)Tz)$$

имеем выражение для $K_m(z)$:

$$K_m(z) = zN_m(Tz)Tz + R(z)(Tz)^2(N_m(Tz) + N'_m(Tz)Tz) =$$
$$= (z + R(z)Tz)N_m(Tz) + R(z)(Tz)^3 N'_m(Tz),$$

откуда и из легко проверяемых равенств

$$z + R(z)Tz = Tz, \quad R(Tz) = R(z)(Tz)^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

получаем второе из соотношений (12). Лемма доказана.

Для дальнейшего получения рекуррентных формул, связывающих решения $x(j)$, важное значение, наряду с леммами 1, 2, имеет следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть мероморфная в области V функция $M(z)$ удовлетворяет соотношению*

$$M(z) = M(Tz)Tz. \tag{13}$$

Предположим, что $M(z)$ не имеет полюсов при $z \in \overline{F}\setminus\{0\}$ и верна оценка на бесконечности

$$M(z) = O(z^{-1}), \quad z \to \infty. \tag{14}$$

Тогда $M(z) \equiv 0$.

Доказательство. Из (13) при $z \to 0$, оценки (14) и включения $0 \in V$ следует, что $M(z)$ не имеет особенности в точке $z = 0$. Далее, мероморфная в V функция

$$S(z) = R(z)(M(z))^2 \tag{15}$$

согласно (13) и соотношению $R(Tz) = R(z)(Tz)^2$ удовлетворяет уравнению $S(z) = S(Tz)$, $z \in V$. Таким образом, функция $S(z)$ является автоморфной функцией относительно группы преобразований G и не имеет полюсов при $z \in \overline{F}$. Тогда [6, с. 388] $S(z) \equiv \text{const}$ и из (15) получаем $S(z) \equiv M(z) \equiv 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$mN_m(z) = K_{m-1}(z) + \nu(m-1)N_{m-1}(z) - (m-1)N_{m-2}(z),$$

где $m = 1, 2, \ldots$ и принято $N_{-1}(z) \equiv 0$.

Доказательство. При фиксированном $m = 1, 2, \ldots$ введем в рассмотрение функцию

$$M(z) = mN_m(z) - K_{m-1}(z) - \nu(m-1)N_{m-1}(z) + (m-1)N_{m-2}(z).$$

Требуется доказать, что $M(z) \equiv 0$. Прежде всего из лемм 1, 2 следует, что $M(z)$ мероморфна в области V, не имеет полюсов $z \in \overline{F}\setminus\{0\}$ и удовлетворяет функциональному соотношению (13). Далее, из (7) имеем

$$\frac{d^n}{dz^n}(\Phi_j(z) - z^j + \Phi_j(0)z^{-1}) = O(z^{-2-n}), \quad z \to \infty, \quad n = 0, 1,$$

поэтому согласно определению (11) получаем соотношения

$$\frac{d^n}{dz^n}(N_m(z) - z^m + c_m z^{-1}) = O(z^{-2-n}), \quad z \to \infty, \quad n = 0, 1, \tag{16}$$

где постоянная

$$c_m = -\Phi_m(0) + \sum_{j=0}^{m} c_m^j \nu^{m-j}(-1)^j \Phi_j(0).$$

Из (16), (11) заключаем, что функция $K_m(z)$ имеет на бесконечности асимптотику

$$K_m(z) = z(z^m + c_m z^{-1} + O(z^{-2})) +$$
$$+ (z^2 - \nu z + 1)(m z^{m-1} - c_m z^{-2} + O(z^{-3})) =$$
$$= (m+1) z^{m+1} - \nu m z^m + m z^{m-1} + O(z^{-1}), \quad z \to \infty. \tag{17}$$

Тогда на основании (16), (17) получаем, что для функции $M(z)$ выполняется условие (14) и, значит, согласно лемме 3 $M(z) \equiv 0$. Теорема доказна.

Теорема 1 позволяет рекуррентным образом определить через $N_0(z)$ и ее производные все остальные функции $N_m(z)$, $m = 1, 2, \ldots$. Это обстоятельство, в свою очередь, дает возможность утверждать, что для определения решения $x(j)$, $j \geq 1$, системы уравнений (1) достаточно определить решение $x(0)$, когда правая часть в (1) имеет вид $f_k = \delta_{k0}$, $k = 0, 1, \ldots$. А именно, справедлива следующая теорема, составляющая основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Решения $x(j)$ системы уравнений* (1) *связаны следующим рекуррентным соотношением*

$$m x_k(m) = k x_{k-1}(m-1) + \nu(m-1-k) x_k(m-1) +$$
$$+ (k+1) x_{k+1}(m-1) - (m-1) x_k(m-2), \tag{18}$$

где $m = 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots$ и принято соглашение $x_k(-1) = 0$, $x_{-1}(j) = 0$.

Доказательство. Из (9), (11) имеем выражение для $x_k(j)$:

$$x_k(j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{N_j(z)}{z^{k+1}} dz, \quad j, k = 0, 1, \ldots. \tag{19}$$

С другой стороны, из теоремы 1 и (11) получаем.

$$m N_m(z) = z N_{m-1}(z) + R(z) N'_{m-1}(z) +$$
$$+ \nu(m-1) N_{m-1}(z) - (m-1) N_{m-2}(z),$$

откуда, учитывая определение функции $R(z)$, после интегрирования по частям имеем

$$m \int_\gamma \frac{N_m(z)}{z^{k+1}} dz = k \int_\gamma \frac{N_{m-1}(z)}{z^k} dz + \nu(m-1-k) \int_\gamma \frac{N_{m-1}(z)}{z^{k+1}} dz -$$
$$- (m-1) \int_\gamma \frac{N_{m-2}(z)}{z^{k+1}} dz + (k+1) \int_\gamma \frac{N_{m-1}(z)}{z^{k+2}} dz, \tag{20}$$

при $m = 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots$. Из (20) и (19) очевидным образом следует утверждение (18). Теорема доказана.

1. *Годин Ю. А., Зильберглейт А. С.* Осесимметричная задача электростатики о диэлектрическом шаре около проводящей плоскости // Журн. техн. физики. – 1986. – **56**, вып. 6. – С. 1082–1090.
2. *Гомилко А. М., Диденко Ю. Ф., Ковальчук В. Ф.* Точное решение задачи пространственной теории потенциала для двух сфер. – Киев, 1988. – 40 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.44).
3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. – М.: Наука, 1967. – Т. 3. – 300 с.
6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

Получено 24.07.92