УДК 519. 21

И. С. Бадалбаев, д-р физ.-мат. наук,
Т. Д. Якубов, асп. (Ин-т математики АН Узбекистана, Ташкент)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА С МИГРАЦИЕЙ

Critical Galton – Watson branching processes with migration are considered. It is assumed that the distribution second moment of the number of descendants is infinite. Limit theorems are proved in the case when the mean of migration equals to zero. Generalizations of results obtained by S. V. Nagaev and L. V. Khan [1] are given in the case when the second moment is finite.

Розглядаються критичні гіллясті процеси Гальтона – Ватсона з міграцією. Припускається, що другий момент числа безпосередніх нащадків однієї частинки дорівнює нескінченності. Одержані граничні теореми для випадку, коли середнє міграції дорівнює нулеві. Робота узагальнює результати С. В. Нагаєва та Л. В. Хан [1] для скінченного другого моменту.

Пусть заданы последовательности независимых целочисленных случайных величин

$$\xi_i^{(n)}, \zeta_n, \quad i = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, \dots,$$

где ζ_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, одинаково распределены и

$$P(\zeta_n = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$P(\zeta_n = -r) = q_r, \quad r = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k + \sum_{r=1}^{m} q_r = 1,$$

а $\xi_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots$, одинаково распределены при любом $n = 0, 1, \dots$ с производящей функцией

$$f(s) = Ms^{\xi_i^{(n)}}, \quad |s| \le 1.$$

Определим процесс $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ следующим образом:

$$Z_0 = 0, \quad Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{Z_n+\zeta_n}^{(n)}, & Z_n + \zeta_n > 0; \\ 0, & Z_n + \zeta_n \le 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\{Z_n, n = 0, 1, \dots\}$ является однородным марковским процессом.

Случайные величины $Z_n, \xi_i^{(n)}$ и ζ_n, $n = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots$, можно интерпретировать соответственно как число частиц в популяции в момент времени n, число частиц, порождаемых i-й из существующих в момент n частиц, в $(n+1)$-й момент времени и, наконец, число мигрирующих в n-й момент времени частиц.

Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$f(0) > 0, \quad f'(1-) = 1, \quad q_m > 0, \tag{1}$$

$$f(s) - s = (1-s)^{1+\nu} L(1-s), \tag{2}$$

где $0 < \nu \le 1$ и $L(1-s)$ медленно меняется при $1 - s \to 0$,

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k - \sum_{k=1}^{m} k q_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k < \infty. \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{N}$ — множество состояний марковской цепи $\{Z_k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots\}$; $p_{rj}(n)$ — вероятность перехода из состояния r в состояние j через n шагов, $r, j \in \mathcal{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $(p_{rr}(0) = 1, r \in \mathcal{N})$; ${}_0 p_{0j}(n)$ — вероятность того, что процесс $\{Z_k,\ k = 0, 1, \ldots\}$ исходя из 0 достигнет состояния r через n шагов, ни разу до этого не попадая в нуль $(n = 1, 2, \ldots, r \in \mathcal{N})$.

Положим

$$F(x) = \sum_{k=[x]+1}^{\infty} {}_0 p_{00}(k), \quad x \ge 0,$$
$$W_{0r}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{0r}(n) s^n, \quad W_0(s) = W_{00}(s), \tag{4}$$

где $0 \le s < 1, r \in \mathcal{N}$.

Обозначим через $f_n(s)$ n-ю итерацию функции $f(s)$, $|s| \le 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Введем производящие функции

$$g(s) = \sum_{k \ge 0} p_k s^k, \quad \Psi_k(s) = M s^{Z_n} = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{0j}(n) s^j,$$
$$G_r(s) = \sum_{k \ge 1} {}_0 p_{0r}(k) s^k, \quad 0 \le s < 1, r \in \mathcal{N}, n = 0, 1, \ldots . \tag{5}$$

В настоящей статье продолжаются исследования ветвящихся процессов Гальтона – Ватсона с миграцией, начатые в работе [1], где рассматривались процессы, для которых $f''(1-) < \infty$, что равносильно в данном случае условию $\nu = 1$, $2L(1-s) \to f''(1-)$ при $s \to 1-$.

Заметим также, что процесс $\{Z_n,\ n = 0,\ 1, \ldots\}$ можно представить в виде φ-ветвящегося процесса, рассматривавшегося в [2, 3]. Однако результаты настоящей работы не следуют из известных результатов для φ-ветвящихся процессов.

Рассмотрим некоторые свойства теории ветвящихся процессов.

Известно [4, с. 43], что если $0 < f(0) < 1$, то для процесса Гальтона – Ватсона существует стационарная мера, производящая функции $U(s)$ которой аналитична в круге $|s| < q$ (q — вероятность вырождения) и при $U(f(0)) = 1$ удовлетворяет функциональному уравнению Абеля

$$U(f(s)) = 1 + U(s), \quad |s| < q, \quad U(1) = \infty.$$

Как показано в [5], при условии (2) $(s \to 1-)$

$$U(s) = \frac{(1-s)(1+o(1))}{\nu(f(s)-s)} = \frac{1+o(1)}{\nu(1-s)^{\nu} L(1-s)}, \tag{6}$$

откуда следует, что обратная к $U(1-s)$ функция $g^*(x)$, $x > 0$, имеет вид

$$g^*(x) = \frac{N(x)}{x^{1/\nu}}, \tag{7}$$

где $N(x)$ — медленно меняющаяся функция при $x \to \infty$, удовлетворяющая соотношению

$$N^{\nu}(x) L\left(\frac{N(x)}{x^{1/\nu}}\right) \to \nu^{-1}, \quad x \to \infty. \tag{8}$$

В [6] доказано, что если $f'(1) = 1$, то

$$1 - f_n(s) = g^*(n + U(s)). \tag{9}$$

Также известно [7, с. 82], что если $Q(x)$ при $x \to \infty$ медленно меняется, то медленно меняется и функция

$$\int_1^x y^{-1} N(y)\, dy, \tag{10}$$

и если $R(x)$ — правильно меняющаяся функция порядка $\alpha > 0$, то такова же функция

$$\int_1^x y^{-1} R(y)\, dy \sim R(x)/\alpha. \tag{11}$$

Не нарушая общности [7] будем предполагать, что $N(x)$ и $L(x)$ дифференцируемы.

Введем следующую функцию:

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{N(k)}{k^{1/\nu}}, \quad 0 < \nu \le 1.$$

В данной статье рассматривается случай, когда

$$\lim_{n \to \infty} M(n) = a < \infty, \quad 0 < \nu \le 1. \tag{12}$$

Основным содержанием работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *При* $1/2 < \nu \le 1$, $n \to \infty$

$$F(n) \sim \frac{N(n)}{A_0 a n^{1/\nu}},$$

где A_0 *— положительная постоянная.*

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$p_{0r}(n) \to A_r, \quad r \in \mathcal{N},$$

$$\sum_{r \in \mathcal{N}} A_r = 1,$$

где A_r, $r \in \mathcal{N}$, *— положительные постоянные.*

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$MZ_n \sim A_0 B_0 n,$$

где B_0 *— положительная постоянная.*

В работе [1] доказано, что множество $\mathcal{N}$ состоит из одного класса сообщающихся состояний и

$$0 < G_r(1) < \infty. \tag{13}$$

Там же доказано, что производящие функции $\Psi_n(s)$ связаны рекуррентным соотношением

$$\Psi_{n+1}(s) = \Psi_n(f(s))\,g(f(s)) + \\ + \sum_{k=1}^{m} q_k\left[\Psi_n(f(s)) - \sum_{r=0}^{k-1} p_{0r}(n) f^r(s)\right] f^{-1}(s) + \\ + \sum_{r=1}^{m} q_k \sum_{r=0}^{k-1} p_{0r}(n), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \Psi_0(s) = 1. \tag{14}$$

Положим

$$g_1(s) = g(s) + \sum_{k=1}^{m} q_k s^{-k}, \\ \chi_r(s) = \sum_{k=r+1}^{m} q_k(s^{r-k} - 1), \tag{15}$$

где $0 < s \le 1$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$. Очевидно, что при $0 < s \le 1$

$$0 < g_1(s) < \infty, \quad 0 < \chi_r(s) < \infty, \quad r = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{16}$$

Кроме того, в силу (1) имеем [4, с. 20]

$$f_n(s) \ge f(s) \ge f(0), \quad 0 \le s \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Отсюда, учитывая (1) и (16), получаем

$$0 < g_1(f_n(s)) < \infty, \quad 0 \le \chi_r(f_n(s)) < \infty, \tag{18}$$

где $0 \le s \le 1$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$, $n = 1, 2, \ldots$.

В работе [1] доказано, что производящие функции $\Psi_n(s)$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\Psi_n(s) = c_n(s) - \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} h_k^{(r)}(s) p_{0r}(n-k), \tag{19}$$

где

$$c_n(s) = \prod_{k=1}^{n} g_1(f_k(s)), \quad h_n^{(r)}(s) = \chi_r(f_n(s))\, c_{n-1}(s), \tag{20}$$

$r = 0, 1, \ldots, m-1$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \le s \le 1$.

Докажем основную лемму.

Лемма 1. *При* $0 \le s < 1$, $n = 1, 2, \ldots$

$$c_n(s) = c(s)\left(1 - \frac{\nu\beta N^2(n+U(s))}{(2-\nu)(n+U(s))^{(2-\nu)/\nu}}\right) + \lambda_n(s), \tag{21}$$

где

$$h_n^{(r)}(s) = c(s)\frac{N(n+U(s))}{(n+U(s))^{1/\nu}} \sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r) + \lambda_n^{(r)}(s), \tag{22}$$

где

$$0 < c(s) = \prod_{k=1}^{\infty} g_1(f_k(s)) < \infty, \quad \beta = \frac{g_1''(1)}{2}$$

и при $n \to \infty$

$$\lambda_n(s) = o\left(\frac{N^2(n)}{n^{(2-\nu)/\nu}}\right), \quad \lambda_n^{(r)}(s) = o\left(\frac{N(n)}{n^{1/\nu}}\right) \tag{23}$$

равномерно по $0 \le s < 1$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$.

Доказательство. В силу условия (3) и представления (15) можно записать

$$g_1(s) = 1 + \beta(s-1)^2 + o((s-1)^2), \quad s \to 1-, \tag{24}$$

где $\beta = g_1''(1-)/2$. Из равенств (7) и (9) получаем

$$f_n^{-k}(s) = (1 - g^*(n+U(s)))^{-k} = \left(1 - \frac{N(n+U(s))}{(n+U(s))^{1/\nu}}\right)^{-k} =$$

$$= 1 + \frac{kN(n+U(s))}{(n+U(s))^{1/\nu}} + o\left(\frac{N(n)}{n^{1/\nu}}\right), \quad n \to \infty, \tag{25}$$

равномерно по $0 \le s < 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Учитывая (24) и (9), (7), равномерно по $0 \le s \le 1$ имеем

$$g_1(f_n(s)) = 1 + \beta g^{*2}(n+U(s)) + o(g^{*2}(n+U(s))) =$$

$$= 1 + \beta\left[\frac{N(n+U(s))}{(n+U(s))^{1/\nu}}\right]^2 + o\left(\frac{N^2(n)}{n^{2/\nu}}\right), \quad n \to \infty. \tag{26}$$

Далее, при $n \to \infty$

$$\chi_r(f_n(s)) = \sum_{k=r+1}^{m} q_k\left(\frac{(k-r)N(n+U(s))}{(n+U(s))^{1/\nu}}\right) + o\left(\frac{N(n)}{n^{1/\nu}}\right) =$$

$$= \frac{N(n+U(s))}{(n+U(s))^{1/\nu}} \sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r) + o\left(\frac{N(n)}{n^{1/\nu}}\right). \tag{27}$$

Из (18), (26) вытекает

$$0 < c(s) = \prod_{k=1}^{\infty} g_1(f_k(s)) < \infty. \tag{28}$$

Далее, с помощью (18), (26) можно получить

$$c_n(s) = \prod_{k=1}^{\infty} g_1(f_k(s)) = c(s) \prod_{k=n+1}^{\infty} g_1^{-1}(f_k(s)) =$$

$$= c(s) \exp\left\{-\sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left(1 + \beta\left[\frac{N(k+U(s))}{(k+U(s))^{1/\nu}}\right]^2 + \varepsilon_k(s)\right)\right\} =$$

$$= c(s) \exp\left\{-\beta \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{N(k+U(s))}{(k+U(s))^{1/\nu}}\right]^2 + \tilde{\varepsilon}_k(s)\right\} =$$

$$= c(s)\left(1 - \frac{\nu\beta N^2(n+U(s))}{(2-\nu)(n+U(s))^{(2-\nu)/\nu}}\right) + \lambda_n(s), \quad 0 \le s < 1, \tag{29}$$

где при $n \to \infty$ равномерно по $s \in [0, 1)$

$$\varepsilon_n(s) = o\left(\frac{N^2(n)}{n^{2/\nu}}\right), \quad \tilde{\varepsilon}_n(s) = o\left(\frac{N^2(n)}{n^{(2-\nu)/\nu}}\right), \quad \lambda_n(s) = o\left(\frac{N^2(n)}{n^{(2-\nu)/\nu}}\right).$$

В свою очередь, из (21), (27) следует

$$h_n^{(r)}(s) = \left[\frac{N(n+U(s))}{(n+U(s))^{1/\nu}} \sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r) + o\left(\frac{N(n)}{n^{1/\nu}}\right)\right] \times$$

$$\times \left\{c(s)\left(1 - \frac{\bar{\nu}\beta N^2(n+U(s))}{(2-\nu)(n+U(s))^{(2-\nu)/\nu}}\right) + \lambda_n(s)\right\} =$$

$$= c(s)\frac{N(n+U(s))}{(n+U(s))^{1/\nu}} \sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r) + \lambda_n^{(r)}(s). \tag{30}$$

Утверждения леммы содержатся в соотношениях (29) и (30). Лемма доказана.

Введем производящие функции

$$V(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n, \; H_r(y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(r)} y^n, \quad 0 \le y < 1, \tag{31}$$

где $c_0 = 1$, $c_n = c_0(0)$, $h_n^{(r)} = h_n^{(r)}(0)$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$, $n = 1, 2, \ldots$.

Используя лемму 1, нетрудно показать, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для* $0 \le y < 1$

$$\begin{gathered} V(y) = \frac{c}{1-y} - \frac{c\nu\beta}{2-\nu}\Phi_2\left(y, \frac{2-\nu}{\nu}\right) + \alpha(y), \\ H_r(y) = c\Phi(y, 1/\nu) \sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r) + \alpha^{(r)}(y), \end{gathered} \tag{32}$$

где $0 < s < \infty$,

$$\Phi_2(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^2(n)}{n^t} y^n,$$

$$\Phi(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(n)}{n^t} y^n, \; \alpha(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y^n,$$

$$\alpha^{(r)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(r)} y^n$$

и при $n \to \infty$

$$\lambda_n = o\left(\frac{N^2(n)}{n^{(2-\nu)/\nu}}\right), \quad \lambda_n^{(r)} = o\left(\frac{N(n)}{n^{1/\nu}}\right), \quad r = 0, 1, \ldots m-1. \tag{33}$$

Понятно, что функции (см. (12))

$$\Phi_2\left(y, \frac{2-\nu}{\nu}\right), \; \Phi(y, 1/\nu) \tag{34}$$

имеют предел при $y \to 1-$.

Положим

$$H(y) = 1 + H_0(y) + \sum_{r=1}^{m-1} G_r(y) H_r(y), \quad 0 \le y < 1. \tag{35}$$

В работе [1] доказано, что для $0 \le y < 1$ (см. (4) и (19))

$$W_0(y)H(y) = V(y), \tag{36}$$

и при $1/2 \le y < 1$ (см. (5))

$$G_r'(y) \le b_r G_0'(y), \quad G_r''(y) \le b_r G_0''(y), \tag{37}$$

где $0 < b_r < \infty$, $r \in \mathcal{N}$.

Приводимая ниже лемма 3 является аналогом леммы 9 из работы [1], но требует изменения как в формулировке, так и в доказательстве.

Лемма 3. *При* $y \to 1-$

$$\begin{gathered} W_0(y) \sim \frac{A_0}{1-y}, \\ G_0'(y) \to \frac{1}{A_0}. \end{gathered} \tag{38}$$

Доказательство. Используя свойства $N(x)$ (см. (7), (8), (10), (11)), легко установить, что для $1/2 < \nu \le 1$ при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{N(k)}{k^{(1-\nu)/\nu}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{(2\nu-1)/\nu} N(k)}{k} \sim \frac{n^{(2\nu-1)/\nu} N(n)}{\Gamma\left(\frac{2\nu-1}{\nu}+1\right)} \Gamma\left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)$$

и по тауберовой теореме при $y \to 1-$

$$\Phi'(y, 1/\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N(k)}{k^{(1-\nu)/\nu}} y^{k-1} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)}{(1-y)^{(2\nu-1)/\nu}} N\left(\frac{1}{1-y}\right). \tag{39}$$

Кроме того, используя те же соображения, при $1/3 < \nu \le 1$, $n \to \infty$ получаем

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{N(k)}{k^{(1-2\nu)/\nu}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^{(3\nu-1)/\nu} N(k)}{k} \sim \frac{n^{(3\nu-1)/\nu} N(n)}{\Gamma\left(\frac{3\nu-1}{\nu}+1\right)} \Gamma\left(\frac{3\nu-1}{\nu}\right),$$

$$\Phi''(y, 1/\nu) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)N(k)}{k^{1/\nu}} y^{k-2} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{3\nu-1}{\nu}\right)}{(1-y)^{(3\nu-1)/\nu}} N\left(\frac{1}{1-y}\right), \quad y \to 1-. \tag{40}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Далее, из (36), (35) и (32) следует

$$W_0(y) = \frac{V(y)}{H(y)} = \frac{\dfrac{c}{1-y} - \dfrac{c\nu\beta}{2-\nu} \Phi_2\left(y, \dfrac{2-\nu}{\nu}\right) + \alpha(y)}{1 + H_0(y) + \sum\limits_{r=1}^{m-1} G_r(y) H_r(y)} =$$

$$= \frac{\dfrac{c}{1-y} - \dfrac{c\nu\beta}{2-\nu} \Phi_2\left(y, \dfrac{2-\nu}{\nu}\right) + \alpha(y)}{1 + c\Phi\left(y, \dfrac{1}{\nu}\right) \sum\limits_{k=1}^{m} q_k k + \alpha^{(0)}(y) + \sum\limits_{r=1}^{m-1} G_r(y) \left[c\Phi\left(y, \dfrac{1}{\nu}\right) \sum\limits_{k=r+1}^{m} q_k (k-r) + \alpha^{(r)}(y) \right]}.$$

Из (12) и (33) вытекает

$$|\alpha(1)| < \infty, \ |\alpha^{(r)}(1)| < \infty, \quad r = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Если положить

$$A_0 = \frac{c}{1+ca\sum_{k=1}^{m} kq_k + \alpha^{(0)}(1) + \sum_{r=1}^{m-1} G_r(1)\left[ca\sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r) + \alpha^{(r)}(1)\right]}, \tag{41}$$

то получим первое утверждение леммы 3.

Поскольку $V(y) > 0$, $0 \le y < 1$, то в силу (36) и соотношение [8, с. 87]

$$G_0(y) = 1 - \frac{1}{W_0(y)}, \quad 0 \le y < 1 \tag{42}$$

имеем

$$G_0'(y) = -\frac{H'(y)}{V(y)} + \frac{H(y)V'(y)}{V^2(y)}, \quad 0 \le y < 1. \tag{43}$$

Пусть

$$T(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k, \quad S(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k, \quad 0 \le y < 1,$$

и $a_n = o(b_n)$, $n \to \infty$, $S(y) \to \infty$ при $y \to 1-$. Тогда при $y \to 1-$

$$T(y) = o(S(y)), \quad T'(y) = o(S'(y)), \quad T''(y) = o(S''(y)). \tag{44}$$

Если воспользоваться свойствами (13), (32), (33), (35), (37), (39) и (44), то легко убедиться в том, что при $y \to 1-$

$$\frac{H'(y)}{V(y)G_0'(y)} = \frac{H_0'(y) + \sum_{r=1}^{m}(G_r'(y)H_r(y) + G_r(y)H_r'(y))}{V(y)G_0'(y)} = o(1), \tag{45}$$

а второе слагаемое при $y \to 1-$

$$\frac{H(y)V'(y)}{V^2(y)} \to \frac{1}{A_0}. \tag{46}$$

Из (43) – (46) получаем утверждение леммы.

Обозначим

$$B_0 = \sum_{k=1}^{m} kq_k + \sum_{r=1}^{m-1} G_r(1) \sum_{k=r+1}^{m} q_k(k-r). \tag{47}$$

Лемма 4. *Для* $1/2 < \nu \le 1$ *при* $y \to 1-$

$$G_0'''(y) \sim \frac{B_0 \frac{1}{\nu}\Gamma\left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)}{(1-y)^{(2\nu-1)/\nu}} N\left(\frac{1}{1-y}\right). \tag{48}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (43) по y, $0 \le y < 1$, получаем

$$G_0'''(y) = -\frac{H''(y)}{V(y)} + 2H'(y)\frac{V'(y)}{V^2(y)} - \left(\frac{1}{V(y)}\right)'' H(y). \tag{49}$$

Используя (13), (32), (33) и (44), нетрудно показать, что

$$\left(\frac{1}{V(y)}\right)'' H(y) = O(1), \quad y \to 1-. \tag{50}$$

Кроме того, учитывая (13), (32), (33), (35) и (39), (40), (44), при $y \to 1-$ имеем

$$\frac{2V'(y)}{V^2(y)}\left[H_0'(y) + \sum_{r=1}^{m-1} G_r(y)H_r'(y)\right] - \frac{1}{V(y)}\left[H_0''(y) + \sum_{r=1}^{m-1} G_r(y)H_0''(y)\right] =$$

$$= (B_0 + o(1)) \frac{\frac{1}{\nu}\Gamma\left(\frac{2\nu-1}{\nu}\right)}{(1-y)^{(2\nu-1)/\nu}} N\left(\frac{1}{1-y}\right) \qquad (51)$$

при $1/2 < \nu \le 1$.

Остальные слагаемые в выражении (49), получающиеся при замене $H(y)$ на его представление (35), с помощью (32), (33), (37) и (38), (44) оцениваются при $y \to 1-$ следующим образом:

$$\frac{V'(y)}{V^2(y)} \sum_{r=1}^{m-1} G_r'(y) H_r(y) = O(1), \qquad (52)$$

$$\frac{1}{V(y)} \sum_{r=1}^{m-1} G_r'(y) H_r'(y) = o(1), \qquad (53)$$

$$\frac{1}{V(y)} \sum_{r=1}^{m-1} G_r''(y) H_r(y) = o\left(G_0''(y)\right). \qquad (54)$$

Из соотношений (49) – (54) непосредственно получаем утверждение леммы 4.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Согласно тауберовой теореме [9, с. 514] и лемме 3 получаем

$$\sum_{k=1}^{n} k_0 p_{00}(k) \to \frac{1}{A_0}, \quad n \to \infty. \qquad (55)$$

Нетрудно установить, что

$$\frac{1 - G_0(y)}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) y^n, \quad 0 \le y < 1. \qquad (56)$$

Кроме этого, согласно лемме 3 и соотношению (42) при $y \to 1-$

$$\frac{1 - G_0(y)}{1-y} = \frac{1}{(1-y)W_0(y)} \to \frac{1}{A_0}. \qquad (57)$$

Используя (56), (57) и тауберову теорему, немедленно получаем, что при $n \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{n} F(k) \to \frac{1}{A_0}. \qquad (58)$$

Далее, для $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=0}^{n} F(k) = \sum_{k=1}^{n} {}_0p_{00}(k)k + (n+1)F(n). \qquad (59)$$

Из (56), (58) и (59) следует, что при $n \to \infty$

$$F(n) = o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (60)$$

Учитывая (55), лемму 4 и тауберову теорему, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 {}_0p_{00}(k) \sim \frac{B_0}{2\nu - 1} n^{(2\nu-1)/\nu} N(n), \quad 1/2 < \nu \le 1, \quad n \to \infty. \qquad (61)$$

Отсюда следует [9, с. 343], что существует

$$\lim_{n\to\infty} F(n)\frac{(2\nu-1)n^{1/\nu}}{B_0 N(n)} = \mu, \quad 0<\mu\le\infty. \tag{62}$$

Покажем, что $\mu<\infty$. Если $\mu=\infty$, то $F(x)$ медленно меняется при $x\to\infty$ [9, с. 342], а в силу известного свойства для медленно меняющихся функций

$$\lim_{n\to\infty} F(n)n = \infty, \tag{63}$$

что противоречит (6). Таким образом,

$$F(n) \sim \frac{\mu B_0 N(n)}{(2\nu-1)n^{1/\nu}}, \quad n\to\infty, \quad 0<\mu<\infty, \quad 1/2<\nu\le 1. \tag{64}$$

Учитывая (12), (58), заключаем, что

$$\mu = \frac{2\nu-1}{A_0 B_0 a}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Ввиду (1)

$$p_{j0}(1) \ge q_m\{f(0)\}^{\max(0,j-m)} > 0, \quad j\in\mathcal{N}.$$

Тогда, используя лемму 3 и известный факт [8, с. 51], получаем

$$p_{00}(n) \to A_0, \quad n\to\infty. \tag{65}$$

Далее, для $0\ne r\in\mathcal{N}$ имеем [8, с. 75]

$$p_{0r}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_{00}(k)\,{}_0p_{0r}(n-k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{[n/2]} {}_0p_{0r}(k)p_{00}(n-k) + \sum_{k=[n/2]+1}^{n} {}_0p_{0r}(k)p_{00}(n-k), \quad n>1. \tag{66}$$

Очевидно, что

$${}_0p_{0r}(n)p_{r0}(1) \le {}_0p_{00}(n+1),$$

откуда

$${}_0p_{0r}(n) \le \frac{{}_0p_{00}(n+1)}{p_{r0}(1)}, \tag{67}$$

что с использованием оценки (60) позволяет получить следующую оценку при $n\to\infty$:

$$\sum_{k=[n/2]+1}^{n} {}_0p_{0r}(k)p_{00}(n-k) = O\left(\sum_{k=[n/2]}^{n} {}_0p_{0r}(k)\right) = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{68}$$

Вследствие (65)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{00}(n-k)}{p_{00}(n)} = 1 \tag{69}$$

равномерно по $0\le k\le n/2$. Учитывая (13), при $n\to\infty$ получаем

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} {}_0p_{0r}(k)p_{00}(n-k) = p_{00}(n)G_r(1)(1+o(1)). \tag{70}$$

Из оценок (65) – (70) следует, что при $n\to\infty$

$$p_{0r}(n) \to A_r,\ A_r = G_r(1)A_0, \quad r \in \mathcal{N}. \tag{71}$$

Ввиду (13) $0 < A_r < \infty$, $r \in \mathcal{N}$. Причем [8, с. 61] из того, что множество $\mathcal{N}$ состоит из одного класса сообщающихся состояний, следует

$$\sum_{r \in \mathcal{N}} A_r = 1.$$

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Дифференцируя (14) по s и учитывая (1) – (3), получаем

$$\Psi'_{n+1}(1-) = \Psi'_n(1-) + \sum_{r=0}^{m-1} p_{0r}(n) \sum_{k=r+1}^{m} (k-r)q_k, \tag{72}$$

$$\Psi'_0(1-) = 0.$$

Следовательно, для $n = 1, 2, \ldots$

$$MZ_n = \Psi'_n(1-) = \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{u=1}^{m-r} u q_{r+u} \right) \sum_{k=1}^{n} p_{0r}(k). \tag{73}$$

В силу (71) и теоремы 2 (см. также (47))

$$\sum_{r=0}^{m-1} p_{0r}(n) \sum_{k=r+1}^{m} (k-r)q_k \to A_0 \sum_{r=0}^{m-1} G_r(1) \sum_{k=r+1}^{m} (k-r)q_k = A_0 B_0, \quad n \to \infty. \tag{74}$$

Из оценок (73), (74) следует

$$MZ_n \sim A_0 B_0 n, \quad n \to \infty,$$

что равносильно утверждению теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

1. *Нагаев С. В., Хан Л. В.* Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона – Ватсона с миграцией // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – **25**, № 3. – С. 523–534.
2. *Севастьянов Б. А., Зубков А. М.* Регулируемые ветвящиеся процессы // Там же. – 1974. – **19**, № 1. – С. 15–25.
3. *Зубков А. М.* Аналогии между процессами Гальтона – Ватсона и φ-ветвящимися процессами // Там же. – № 2. – С. 319–339.
4. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. – М: Мир, 1966. – 355 с.
5. *Slack R. S.* A branching process with mean one and possibly infinite variance // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1968. – **9**, № 2. – P. 139–145.
6. *Pakes A. G.* Some new limit theorems for the critical branching process allowing immigration // Stochast. Process. and Appl. – 1976. – **4**, № 2. – P. 175–185.
7. *Сенета Е. С.* Правильно меняющиеся функции. – М: Наука, 1985. – 141 с.
8. *Чжун К. Л.* Однородные цепи Маркова. – М: Мир, 1964. – 425 с.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. – М: Мир, 1967. – Т. 2 – 751 с.

Получено 02.07.93