УДК 517.95

Г. П. Лопушанська, А. О. Лопушанський (Львів. нац. ун-т, Ряшів. ун-т, Польща)

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ ЗА ЧАСОВОЮ ТА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

We prove a theorem on the existence and uniqueness and obtain a representation using the Green vector function for the solution of the Cauchy problem

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad a = \mathrm{const},$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^n,$$

where $u_t^{(\beta)}$ is the Riemann – Liouville fractional derivative of order $\beta \in (0,1)$, and u_0 and F belong to some spaces of generalized functions. We also establish the character of the singularity of the solution at $t = 0$ and its dependence on the order of singularity of the given generalized function in the initial condition and the character of the power singularities of the function on right-hand side of the equation. Here, the fractional n-dimensional Laplace operator $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi(x)]$.

Доказана теорема существования и единственности и получено представление с помощью вектор-функции Грина решения задачи Коши

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad a = \mathrm{const},$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^n,$$

с производной Римана – Лиувилля $u_t^{(\beta)}$ порядка $\beta \in (0,1)$ и u_0, F из пространств обобщенных функций. Установлен характер особенностей решения при $t = 0$ в зависимости от порядка сингулярности заданной обобщенной функции в начальном условии и характера степенных особенностей функции в правой части уравнения. Здесь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ определено с помощью преобразования Фурье $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathfrak{F}[\psi(x)]$.

У роботах [1, 2] доведено теорему існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою функції Гріна класичного розв'язку задачі Коші

$$D_t^\beta u(x,t) = A(x,D)u(x,t), \quad (x,t) \in R^n \times [0,T],$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

з регуляризованою похідною функції u порядку $\beta \in (0;1)$

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta} \right), \quad (x,t) \in R^n \times [0,T],$$

неперервною функцією g_1 певного зростання на нескінченності та еліптичним диференціальним оператором другого порядку $A(x,D)$ з гладкими коефіцієнтами, залежними від просторової змінної $x \in \mathbb{R}^n$. Таку регуляризовану похідну дробового порядку використано у роботах [3 – 8]. У випадку $\beta > 1$ та $A(x,D) = \Delta$ класичний розв'язок відповідної задачі Коші побудовано у [7]. Одержано зображення розв'язку за допомогою функції Гріна. Крайові задачі для рівнянь із кількома дробовими похідними вивчались у роботах [9 – 11].

У [12, 13] побудовано відповідно фундаментальний розв'язок $G_0(x,t)$ рівняння

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T], \tag{1}$$

з дробовою похідною Рімана – Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ та функцію Гріна $G_1(x,t)$ задачі Коші

$$D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in R^n. \tag{3}$$

Оператор $\mathfrak{J}_{-\alpha} = (-\Delta)^{\alpha/2}$ є оберненим до оператора згортки $\mathfrak{J}_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}$:

$$(\mathfrak{J}_\alpha g)(x) = J_\alpha(x) * g(x) \quad \forall g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n),$$

де $J_\alpha(x) = 2^{-\alpha}\pi^{n/2}\dfrac{\Gamma\left((n-\alpha)/2\right)}{\Gamma\left(\alpha/2\right)}|x|^{\alpha-n}$, $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функція, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ — простір нескінченно диференційовних швидкоспадних на нескінченності функцій. Зауважимо, що

$$(\mathfrak{J}_\alpha g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} J_\alpha(x-y)g(y)dy \qquad \text{при} \quad 0 < \alpha < n.$$

За властивістю перетворення Фур'є $\mathfrak{F}$ згортки та формулою з [14, с. 156]

$$\mathfrak{F}\Big[(-\Delta)^{-\alpha/2}g(x)] = \mathfrak{F}[J_\alpha(x)]\mathfrak{F}[g(x)] = |\lambda|^\alpha\mathfrak{F}[g(x)\Big].$$

Оскільки $\mathfrak{J}_{-\alpha}\psi = g <=> \psi = \mathfrak{J}_\alpha g <=> \mathfrak{F}[\psi] = |\lambda|^{-\alpha}\mathfrak{F}[g]$, то $\mathfrak{F}[\mathfrak{J}_{-\alpha}\psi] = \mathfrak{F}[g] = |\lambda|^\alpha\mathfrak{F}[\psi]$, а отже, $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}g(x)] = |\lambda|^\alpha\mathfrak{F}[g(x)]$.

У даній статті доведено розв'язність задачі Коші для рівняння (1) при $\beta \in (0,1)$ у просторах узагальнених функцій типу D' та вагових просторах узагальнених функцій. Встановлено характер особливостей розв'язку при $t = 0$ залежно від порядку сингулярності заданої узагальненої функції в початковій умові та характеру степеневих особливостей функції у правій частині рівняння. Зауважимо, що для випадку $\alpha = 2$ у [15] встановлено однозначну розв'язність задачі Коші з даними – узагальненими функціями повільного зростання.

1. Основні позначення. Нехай

$$Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T], \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad \mathfrak{E}(R^n) = C^\infty(R^n),$$

$$C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^\infty(\bar{Q}_T)\colon D_t^l\varphi|_{t=T} = 0,\ l = 0, 1, 2, \ldots\},$$

$D(R^n) = C_0^\infty(R^n)$ та $D(Q_T)$ — простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в R^n та Q_T,

$D(\bar{Q}_T) = C_0^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$ — простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{Q}_\tau$, $\tau < T$,

$\mathfrak{E}'(R^n)$, $D'(\mathbb{R}^n)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathfrak{E}(R^n)$, $D(\mathbb{R}^n)$, (f,φ) — значення $f \in \mathfrak{E}'(R^n)$ $(f \in D'(\mathbb{R}^n))$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{E}(R^n)$ $\big($відповідно $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)\big)$,

$D'(\bar{Q}_T)$ — простір лінійних неперервних функціоналів на $D(\bar{Q}_T)$, $(f,\varphi)_{Q_T}$ — значення $f \in D'(\bar{Q}_T)$ на $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Позначимо через $\hat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ [14, с. 111]: $(g\hat{*}\varphi)(x) = \big(g(\xi), \varphi(x+\xi)\big)$, через $*$ операцію згортки узагальнених функцій f і g — узагальнену функцію $f * g$: $(f * g, \varphi) = (f, g\hat{*}\varphi)$ для кожної основної функції φ.

Будемо використовувати функцію $f_\lambda \in D'_+(R) = \{f \in D'(\mathbb{R})\colon f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \qquad \text{при} \quad \lambda > 0 \qquad \text{і} \qquad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \qquad \text{при} \quad \lambda \le 0,$$

де $\theta(t)$ — одинична функція Хевісайда. Мають місце співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \qquad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu},$$

$$f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t) = f'_{1-\beta}(t)\hat{*}v(x,t) = -f_{1-\beta}(t)\hat{*}v_t(x,t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^T \frac{v(x,\eta)}{(\eta-t)^\beta}d\eta,$$

$$(x,t) \in Q_T, \qquad \beta \in (0;1), \quad v \in D(\bar{Q}_T).$$

Позначимо через $C^{\alpha,\beta}(Q_T)$ клас неперервних обмежених функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$, рівних нулю при $t \ge T$ та з неперервними функціями $(-\Delta v)^{\alpha/2}$, $D_t^\beta v$ в Q_T.

Введемо оператори

$$\hat{L}\colon (\hat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t)\hat{*}v(x,t) + (-\Delta v)^{\alpha/2}(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \quad v \in D(\bar{Q}_T),$$

$$L\colon (Lv)(x,t) \equiv f_{-\beta}(t) * v(x,t) + (-\Delta v)^{\alpha/2}(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \quad v \in D'(\bar{Q}_T),$$

$$L^{reg}\colon (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) + (-\Delta v)^{\alpha/2}(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \quad v \in C^{\alpha,\beta}(Q_T)$$

та функційний простір

$$X(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)\colon \hat{L}\varphi \in D(\bar{Q}_T)\}.$$

З леми 3 випливатиме, що простір $X(\bar{Q}_T)$ не є порожнім.

2. Формулювання задачі.

Припущення (L): $\beta \in (0,1)$, $\min\{n, 2, \alpha\} > (n-1)/2$, $\alpha \ne \beta$,

$$u_0 \in \mathfrak{E}'(R^n), \qquad F \in X'(\bar{Q}_T).$$

За припущення (L) вивчаємо задачу Коші

$$(Lu)(x,t) = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Означення 1. *Функція $u \in D'(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність*

$$\big(u(x,t), (\hat{L}\psi)(x,t)\big)_{Q_T} = (F,\psi)_{Q_T} + \left(u_0(x), \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt\right) \quad \forall \psi \in X(\bar{Q}_T), \tag{5}$$

називається розв'язком задачі (4).

Зауважимо, що для $u \in C^{\alpha,\beta}(Q_T)$, $\psi \in D(\bar{Q}_T)$ правильною є формула Гріна

$$\int_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt =$$

$$= \int_{Q_T} (L^{reg}u)(x,t)\psi(x,t)dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} u(x,0)dx \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt. \quad (6)$$

Тому задачу (4) можна вважати узагальненням задачі Коші

$$L^{reg}u = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (7)$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in R^n, \quad (8)$$

з регулярними даними g_0, g_1. З одержаної нижче теореми 1 можна вивести, що при достатньо гладких та фінітних $F = g_0$, $u_0 = g_1$ розв'язки задач (4) та (7), (8) збігаються між собою.

3. Вектор-функція Гріна.

Означення 2. *Вектор-функцією Гріна задачі Коші* (4) *називається така пара функцій* $\big(G_0(x,t), G_1(x,t)\big)$, *що при достатньо гладких та фінітних* g_0, g_1 *функція*

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x-y,t)g_1(y)dy, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (9)$$

є класичним $\big($*класу* $C^{\alpha,\beta}(Q_T)\big)$ *розв'язком задачі* (7), (8).

З означення $G_1(x,t)$ як ядра Пуассона задачі Коші випливає, що

$$L^{reg}G_1(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in Q_T, \quad G_1(x,0) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Також $LG_0(x,t) = \delta(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$. Тут δ — дельта-функція Дірака.

Якщо підставимо розв'язок (9) класичної задачі Коші (7), (8) у формулу (6), то при довільній функції $\psi \in X(\bar{Q}_T)$ одержимо

$$\int_{Q_T} \left(\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)g_0(y,\tau)dy \right) (\hat{L}\psi)(x,t)dxdt +$$

$$+ \int_{Q_T} \left(\int_{\mathbb{R}^n} G_1(x-y,t)g_1(y)dy \right) (\hat{L}\psi)(x,t)dxdt =$$

$$= \int_{Q_T} g_0(x,t)\psi(x,t)dxdt + \int_{Q_T} g_1(x)f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dxdt,$$

тобто

$$\int\limits_{Q_T} \left(\int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx \right) g_0(y,\tau)dyd\tau +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt \right) g_1(y)dy =$$

$$= \int\limits_{Q_T} \psi(y,\tau)g_0(y,\tau)dyd\tau + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{0}^{T} f_{1-\beta}(t)\psi(y,t)dt \right) g_1(y)dy.$$

За довільністю g_0, g_1 одержуємо правильність наступної леми.

Лема 1. *Для кожної функції* $\psi \in X(\bar{Q}_T)$

$$\int\limits_{\tau}^{T} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau)(\hat{L}\psi)(x,t)dx = \psi(y,t), \quad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{11}$$

$$\int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{0}^{T} f_{1-\beta}(t)\psi(y,t)dt, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Звідси одержуємо

$$G_0(x,t) = f_{\beta-1}(t) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

Нехай

$$(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau)\varphi(x,t)dx,$$

$$(\hat{\mathfrak{G}}_1\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)\varphi(x,t)dxdt, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_T).$$

Лема 2. $\hat{\mathfrak{G}}_0 \colon D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$, $\hat{\mathfrak{G}}_1 \colon D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Доведення. Згідно з [12] (формула (13))

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{n/2} t^{\beta-1}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (n/2, \alpha/2) & (1, \alpha/2) \end{matrix} \right), \tag{13}$$

а згідно з [13] (формула (33))

$$G_1(x,t) = \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} H^{2,1}_{2,3} \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (1,\beta) & \\ (1,1) & (n/2, \alpha/2) & (1, \alpha/2) \end{matrix} \right), \tag{14}$$

де $H^{m,n}_{p,q} \left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\alpha_1)\ldots(a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1)\ldots(b_q,\beta_q) \end{matrix} \right)$ — H-функція Фокса [16], і зображення (14) є правильним принаймні для

$$\beta \in (0,1), \qquad \min\{n,2,\alpha\} > (n-1)/2, \quad |x| \neq 0.$$

При $\beta < \alpha$ також функцію $G_1(x,t)$ можна подати у вигляді ряду

$$G_1(x,t) = \frac{\pi^{n/2}}{|x|^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{|x|^\alpha}{2^\alpha a^2 t^\beta}\right)^{k+1} \frac{\Gamma(n-\alpha-\alpha k/2)}{\Gamma(1-\beta-\beta k/2)\Gamma(\alpha+\alpha k/2)}.$$

Використаємо позначення із [16] для $H_{p,q}^{m,n}$:

$$a^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{i=m+1}^{q} \beta_i,$$

$$\Delta^* = \sum_{i=1}^{q} \beta_i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i.$$

Для обох функцій G_0, G_1 маємо $a^* = 2-\beta$, $\Delta^* = \alpha - \beta$. Тому за теоремою 1.1 [16] при $\beta \neq \alpha$ ($\Delta^* \neq 0$) функції G_0, G_1 існують для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

У [16] побудовано асимптотику для H-функцій Фокса. Враховуючи, що виконуються умови (1.6) та (1.3.2) із [16], за теоремою 1.7 із [16] одержуємо оцінки

$$|G_0(x,t)| \le \frac{C_0}{t^{1-\beta}|x|^n}, \qquad |G_1(x,t)| \le \frac{C_1}{|x|^n} \qquad \text{при} \qquad |x|^\alpha > t^\beta.$$

За наслідком з теореми 1.12 [16] отримуємо оцінки при $|x|^\alpha < t^\beta$:

$$|G_0(x,t)| \le \frac{C_0^*}{t|x|^{n-\alpha}} \ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \qquad \text{якщо} \qquad \alpha < n,$$

$$|G_0(x,t)| \le \frac{C_0^*}{t^{1-\beta(\frac{\alpha-n}{\alpha})}} \ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \qquad \text{якщо} \qquad \alpha \ge n,$$

$$|G_1(x,t)| \le \frac{C_1^*}{t^\beta|x|^{n-\alpha}} \ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \qquad \text{якщо} \qquad \alpha < n,$$

$$|G_1(x,t)| \le \frac{C_1^*}{t^{n\beta/\alpha}} \ln\frac{t^\beta}{|x|^\alpha}, \qquad \text{якщо} \qquad \alpha \ge n.$$

Тут C_0, C_1, C_0^*, C_1^* — певні додатні сталі. У випадку

$$\alpha \neq \frac{n+2l}{\sigma}, \qquad l = 0,1,\ldots, \quad \sigma = 1,2,\ldots, \tag{15}$$

правильними є такі ж оцінки без логарифмів.

З одержаних вище оцінок випливає інтегровність функцій G_0, G_1 в Q_T, а звідси — неперервність функцій $(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau)$ в Q_T та $(\hat{\mathfrak{G}}_1\varphi)(y)$ в $\mathbb{R}^n$.

Нехай $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ — мультиіндекс, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, $D_x^\gamma = \dfrac{\partial^{|\gamma|}}{\partial_{x_1}^{\gamma_1}\ldots\partial_{x_n}^{\gamma_n}}$, $D^{\bar\gamma} = D_{x,t}^{\bar\gamma} = D_x^\gamma D_t^{\gamma_0}$, $|\bar\gamma| = |\gamma| + \left[\dfrac{\alpha}{\beta}\right]\gamma_0$, де p — ціла частина числа p.

Оскільки $\dfrac{\partial}{\partial y_i}G_0(x-y,t) = -\dfrac{\partial}{\partial x_i}G_0(x-y,t)$, $\dfrac{\partial}{\partial \tau}G_0(x-y,t-\tau) = -\dfrac{\partial}{\partial t}G_0(x-y,t-\tau)$ і, подібно для похідних вищих порядків, функція φ належить $D(\bar{Q}_T)$, то для всіх $\bar{\gamma}$

$$D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{Q_T} G_0(x-y,t-\tau)D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)dxdt \qquad \text{та} \qquad D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,T) = 0$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$v_{\bar{\gamma}}(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)dxdt, \quad \varphi \in D(\bar{Q}_T).$$

За цієї умови з попередньої рівності одержуємо, що $D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)$ належить $C(Q_T)$ для довільного мультиіндексу $\bar{\gamma}$, а отже, $\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi$ належить $C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)$ для кожного $\bar{\gamma}$. Для простоти розглядатимемо випадок (15).

Враховуючи оцінки функції $G_0(x-y,t-\tau)$, фінітність та обмеженість функцій $D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)$ в Q_T, у випадку $\alpha < n$ маємо

$$\left|v_{\bar{\gamma}}(y,\tau)\right| \le \int\limits_{\tau}^{T}\left[\int\limits_{x:\,|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta} |G_0(x-y,t-\tau)||D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x:\,|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta} |G_0(x-y,t-\tau)||D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|dx\right] dt \le$$

$$\le c_0\int\limits_{\tau}^{T}\left[\int\limits_{x:\,|x-y|^\alpha<(t-\tau)^\beta} \frac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)|x-y|^{n-\alpha}}dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x:\,|x-y|^\alpha>(t-\tau)^\beta} \frac{|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta}|x-y|^{n}}dx\right] dt \le$$

$$\le c_1\left[\int\limits_{\tau}^{T}\frac{dt}{t-\tau}\int\limits_{0}^{(t-\tau)^{\beta/\alpha}} r^{\alpha-1}dr + \int\limits_{\tau}^{T}\frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}}dt\int\limits_{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}^{+\infty}|D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)|r^{-1}dr\right] \le$$

$$\le c_2\int\limits_{\tau}^{T}\frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}}\left[1 + |\ln{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}|\right]dt < +\infty.$$

Тут і далі c_i, d_i, $i = 0, 1, \ldots,$ — додатні сталі.

У випадку $\alpha \ge n$ аналогічно одержуємо

$$|v_{\bar\gamma}(y,\tau)| \le c_3 \int\limits_{\tau}^{T} \left[\int\limits_{x\colon |x-y|^{\alpha}<(t-\tau)^{\beta}} \frac{|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta(1-\frac{n}{\alpha})}} dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x:|x-y|^{\alpha}>(t-\tau)^{\beta}} \frac{|D^{\bar\gamma}\varphi(x,t)|}{(t-\tau)^{1-\beta}|x-y|^{n}} dx \right] dt \le$$

$$\le c_4 \int\limits_{\tau}^{T} \frac{1}{(t-\tau)^{1-\beta}} [1+ |\ln (t-\tau)^{\beta/\alpha}|] dt < +\infty.$$

Ми довели, що $\hat{\mathfrak{G}}_0\colon D(\bar Q_T) \to C^{\infty,(0)}(\bar Q_T)$.

Враховуючи оцінки функції $G_1(x,t)$, так само показуємо, що $\hat{\mathfrak{G}}_1\colon D(\bar Q_T) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. При $\varphi \in D(\bar Q_T)$ розглядаємо

$$w_{\gamma}(y) = \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(x-y,t) D^{\gamma}\varphi(x,t) dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{x:|x-y|^{\alpha}<t^{\beta}} G_1(x-y,t) D^{\gamma}\varphi(x,t) dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{x\colon |x-y|^{\alpha}>t^{\beta}} G_1(x-y,t) D^{\gamma}\varphi(x,t) dx.$$

У випадку $\alpha < n$ отримуємо

$$|w_{\gamma}(y)| \le d_0 \int\limits_{0}^{T} \left[\int\limits_{x:|x-y|^{\alpha}<t^{\beta}} \frac{|D^{\gamma}\varphi(x,t)|}{t^{\beta}|x-y|^{n-\alpha}} dx + \int\limits_{x:|x-y|^{\alpha}>t^{\beta}} \frac{|D^{\gamma}\varphi(x,t)|}{|x-y|^{n}} dx \right] dt \le$$

$$\le d_1 \left[\int\limits_{0}^{T} \frac{dt}{t^{\beta}} \int\limits_{0}^{t^{\beta/\alpha}} r^{\alpha-1} dr + \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{t^{\beta/\alpha}}^{+\infty} |D^{\gamma}\varphi(x,t)| r^{-1} dr \right] \le d_2 \int\limits_{0}^{T} \left[1+ |\ln t^{\beta/\alpha}|\right] dt < +\infty.$$

У випадку $\alpha \ge n$

$$|w_{\gamma}(y)| \le d_3 \int\limits_{0}^{T} \left[\int\limits_{x\colon |x-y|^{\alpha}<t^{\beta}} \frac{|D^{\gamma}\varphi(x,t)|}{t^{n\beta/\alpha}} dx + \int\limits_{x\colon |x-y|^{\alpha}>t^{\beta}} \frac{|D^{\gamma}\varphi(x,t)|}{|x-y|^{n}} dx \right] dt \le$$

$$\le d_4 \int\limits_{0}^{T} [1+ |\ln t^{\beta/\alpha}|] dt < +\infty.$$

Лема 3. *Для кожної функції* $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ *існує така* $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, *що*

$$(\hat{L}\psi)(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

Доведення. Як і у [15], показуємо, що шуканою є функція

$$\psi(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dx.$$

Справді, за лемою 2 $\psi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$,

$$(\hat{L}\psi)(y,\tau) = \hat{L}\big(G_0(x-y,t-\tau),\varphi(x,t)\big)_{Q_T} = \hat{L}\big(G_0(x,t),\varphi(x+y,t+\tau)\big)_{Q_T} =$$

$$= \big(G_0(x,t),(\hat{L}\varphi)(x+y,t+\tau)\big)_{Q_T} = \big((LG_0)(x,t),\varphi(x+y,t+\tau)\big)_{Q_T} =$$

$$= \big(\delta(x,t),\varphi(x+y,t+\tau)\big)_{Q_T} = \varphi(y,\tau), \quad (y,\tau) \in Q_T.$$

З леми 3 випливає, що $\hat{L}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi) = \varphi$, а отже, $\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi$ належить $X(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, тобто $\hat{\mathfrak{G}}_0\colon D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$.

4. Теореми існування та єдиності.

Теорема 1. *За припущення* (L) *існує єдиний розв'язок* $u \in D'(\bar{Q}_T)$ *задачі* (4), *який визначається формулою*

$$(u,\varphi)_{Q_T} = (F,\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)_{Q_T} + (u_0,\hat{\mathfrak{G}}_1\varphi)_{Q_T} \quad \forall\varphi \in D(\bar{Q}_T). \tag{16}$$

Доведення. На підставі лем 2, 3 $\hat{\mathfrak{G}}_0\colon D(\bar{Q}_T) \to X(\bar{Q}_T)$, $\hat{\mathfrak{G}}_1\colon D(\bar{Q}_T) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Отже, права частина у формулі (16) має сенс і формулою (16) визначено $u \in D'(\bar{Q}_T)$.

Підставляючи функцію (16) у тотожність (5) і використовуючи лему 1, показуємо, що функція (16) є розв'язком задачі (4):

$$(u,\hat{L}\psi)_{Q_T} = \big(F,\hat{\mathfrak{G}}_0(\hat{L}\psi)\big)_{Q_T} + \big(u_0,\hat{\mathfrak{G}}_1(\hat{L}\psi)\big) =$$

$$= (F,\psi)_{Q_T} + \left(u_0(x), \int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(x,t)dt\right) \quad \forall\psi \in X(\bar{Q}_T).$$

Якщо u_1, u_2 — розв'язки задачі (4), то функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє умову

$$(u,\hat{L}\psi)_{Q_T} = 0 \quad \forall\psi \in X(\bar{Q}_T).$$

За лемою 3 для довільної функції $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ існує така функція $\psi \in X(\bar{Q}_T)$, що $\hat{L}\psi = \varphi$ в Q_T. Тоді з попередньої тотожності $(u,\varphi)_{Q_T} = 0$ для кожної функції $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$, тобто $u = 0$ в $D'(\bar{Q}_T)$.

Теорему доведено.

Теорему 1 можна покращити: визначити залежність характеру особливостей розв'язку задачі при $t = 0$ від особливостей правої частини рівняння та порядку сингулярності узагальненої функції в початковій умові.

Узагальнена функція $P \in D'(\mathbb{R}^n)$ має порядок сингулярності $s(P) \leq s_0$ [14, с. 46], якщо

$$(P, \varphi) = \sum_{|\gamma| \leq s_0} \int_{\mathbb{R}^n} D^\gamma \varphi(x) P_\gamma(x) dx \quad \text{для всіх} \quad \varphi \in D(R^n), \qquad \text{де} \quad P_\gamma \in L_{1,\mathrm{loc}}(R^n), \quad |\gamma| \leq s_0.$$

Через $\rho(x,t)$ $\big((x,t) \in \bar{Q}_T\big)$ позначимо невід'ємну функцію із $D(\bar{Q}_T)$, додатну в Q_τ, $\tau < T$, що має порядок $t^{\beta/\alpha}$ при $t \to 0$ $\big(\lim_{t\to 0+} t^{-(\beta/\alpha)}\rho(x,t) = \mathrm{const}\big)$, а також $\rho(x,t) \leq 1$ в $\bar{Q}_T$.

Для $k \geq 0$ використовуємо функційні простори:

$C^k(Q_T)$ — простори Гельдера функцій φ з неперервними $D^{\bar{\gamma}}\varphi$, $|\bar{\gamma}| \leq [k]$ та (при нецілому k) скінченними

$$\sum_{0<|\bar{\gamma}|=[k]} \sup_{(x,t),(y,\tau)\in Q_T, x\neq y} \frac{\Delta_x^y D_{x,t}^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)}{|x-y|^{k-[k]}}, \qquad \sum_{0<k-|\bar{\gamma}|<\frac{\alpha}{\beta}} \sup_{(x,t),(y,\tau)\in Q_T, t\neq\tau} \frac{\Delta_t^\tau D_{x,t}^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)}{|t-\tau|^{(k-|\bar{\gamma}|)[\frac{\alpha}{\beta}]}},$$

де $\Delta_x^y\psi(x,t) = \psi(y,t) - \psi(x,t)$, $\Delta_t^\tau\psi(x,t) = \psi(x,\tau) - \psi(x,t)$,

$C_0^k(\bar{Q}_T)$ — простори функцій із $C^k(Q_T)$ з компактними носіями в $\bar{Q}_T$,

$$C_0^{k,(0)}(\bar{Q}_T) = \left\{\varphi \in C_0^k(\bar{Q}_T)\colon D_t^l\varphi|_{t=T} = 0, \quad l = 0,1,2,\ldots, \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]\right\},$$

$D_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C_0^{k,(0)}(\bar{Q}_T)(\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ при $k \in N\bigcup\{0\} = N_0)\colon \rho^{|\bar{\gamma}|-k}D^{\bar{\gamma}}\varphi \in C(\bar{Q}_T)$ $\forall\bar{\gamma}\colon |\bar{\gamma}| \leq k\}$,

$X_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C^{\overline{k+\alpha},(0)}(\bar{Q}_T)(\varphi \in C^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T)$ при $k \in N_0)$: $\hat{L}\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)\}$, де $\overline{p}$ — найбільше ціле число, менше p,

$D_k'(\bar{Q}_T)$, $X_k'(\bar{Q}_T)$ — простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $D_k(\bar{Q}_T)$, $X_k(\bar{Q}_T)$.

Кажемо, що $\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ в $D_k(\bar{Q}_T)$, якщо $\rho^{|\bar{\gamma}|-k}D^{\bar{\gamma}}\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ рівномірно в $\bar{Q}_T$ для всіх $|\bar{\gamma}| \leq k$, $\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ в $X_k(\bar{Q}_T)$, якщо $\varphi_l \to 0$ в $C^{\overline{k+\alpha}}(\bar{Q}_T)$ та $\hat{L}\varphi_l \to 0$ в $D_k(\bar{Q}_T)$.

Зауважимо, що простір $X_k(\bar{Q}_T)$ не є порожнім. Це випливає з леми 3: функція ψ в лемі 3 належить $X_k(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$.

До просторів $D_k(\bar{Q}_T)$ належать, зокрема, множини функцій

$$\big\{\varphi \in D(\bar{Q}_T) : \varphi = \varrho^k \cdot \psi, \psi \in D(\bar{Q}_T)\big\},$$

а функції зі степеневими особливостями при $t = 0$ вигляду $v = \varrho^{-k}v_0$, де $v_0 \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q_T)$, належать до вагових просторів узагальнених функцій $D_k'(\bar{Q}_T)$.

Припущення (Ls): $\beta \in (0,1)$, $\min\{n, 2, \alpha\} > (n-1)/2$, $\alpha \neq \beta$,

$$u_0 \in D'(R^n), \qquad s(u_0) \leq s, \qquad k > s - \frac{\alpha}{\beta}, \quad F \in X_k(\bar{Q}_T).$$

За припущення (Ls) вивчаємо задачу Коші (4) — задачу знаходження функції $u \in D_k'(\bar{Q}_T)$, що задовольняє тотожність (5) для довільної функції $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$.

Теорема 2. *За припущення* (Ls) *існує єдиний розв'язок* $u \in D_k'(\bar{Q}_T)$ *задачі* (4), *який визначається формулою* (16) *для довільної функції* $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1, але замість леми 2 використовується наступна лема.

Лема 4. *При* $k \geq 0$

$$\hat{\mathfrak{G}}_0 \colon D_k(\bar{Q}_T) \to X_k(\bar{Q}_T), \qquad \hat{\mathfrak{G}}_1 \colon D_k(\bar{Q}_T) \to C^{\overline{k+\frac{\alpha}{\beta}}}(\mathbb{R}^n).$$

Доведення. Як і при доведенні леми 2, враховуючи, що $D^{\bar{\gamma}}\varphi = \rho^{k-|\bar{\gamma}|}\varphi_{k,\bar{\gamma}}$ при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$, $|\bar{\gamma}| \leq k$, де $\varphi_{k,\bar{\gamma}}$ — неперервні та фінітні функції в $\bar{Q}_T$, у випадку $\alpha < n$ маємо

$$|D^{\gamma}(\hat{\mathfrak{G}}_1\varphi)(y)| = \left| \int\limits_{Q_T} D^{\gamma}\varphi(x,t)G_1(x-y,t)dxdt \right| \leq$$

$$\leq d_5 \int\limits_0^T \left[\int\limits_{x\colon |x-y|^{\alpha}<t^{\beta}} \frac{t^{(k-|\gamma|)\frac{\beta}{\alpha}}|\varphi_{k,\gamma}(x,t)|}{t^{\beta}|x-y|^{n-\alpha}}dx + \int\limits_{x\colon |x-y|^{\alpha}>t^{\beta}} \frac{t^{(k-|\gamma|)\frac{\beta}{\alpha}}|\varphi_{k,\gamma}(x,t)|}{|x-y|^{n}}dx \right] dt \leq$$

$$\leq d_6 \int\limits_0^T t^{(k-|\gamma|)\frac{\beta}{\alpha}}|\psi_{k,\gamma}(t)|\big[1 + |\ln t^{\beta/\alpha}|\big]dt, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

де $\psi_{k,\gamma}(t)$ — неперервні та фінітні функції на $[0,T]$.

У випадку $\alpha \geq n$ аналогічно одержуємо таку ж оцінку.

Одержані інтеграли збігаються при $\big(k - |\gamma|\big)\dfrac{\beta}{\alpha} - \varepsilon > -1 <=> |\gamma| < k + \dfrac{\alpha}{\beta}(1-\varepsilon)$ та довільному $\varepsilon > 0$, а отже, при $|\gamma| \leq s \leq \overline{k + \dfrac{\alpha}{\beta}}$. Ми одержали, що $\hat{\mathfrak{G}}_1\varphi \in C^{\overline{k+\frac{\alpha}{\beta}}}(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$. Другу частину леми встановлено.

Аналогічно при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$, $|\bar{\gamma}| \leq k$ маємо

$$|D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau)| = \left| \int\limits_{Q_T} D^{\bar{\gamma}}\varphi(x,t)G_0(x-y,t-\tau)dxdt \right| \leq$$

$$\leq c_5 \int\limits_{\tau}^T \frac{t^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}}}{(t-\tau)^{1-\beta}}|\psi_{k,\bar{\gamma}}(t)| \left[1 + |\ln (t-\tau)^{\beta/\alpha}|\right] dt.$$

Тут $\tilde{\psi}_{k,\bar{\gamma}}(t)$ — неперервні та фінітні функції на $[0,T]$.

Одержані інтеграли збігаються при $\big(k - |\bar{\gamma}|\big)\dfrac{\beta}{\alpha} + \beta - \varepsilon\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$ та довільному $\varepsilon > 0$, тобто $|\bar{\gamma}| \leq \overline{k+\alpha}$ для всіх $(y,\tau) \in \bar{Q}_T$, а отже, $\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi \in C^{\overline{k+\alpha}}(\bar{Q}_T)$ при $\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)$. Крім того, розбиваючи інтеграл по (τ, T) на частини $(\tau, 2\tau)$, $(2\tau, T)$ і враховуючи, що при $t \in (\tau, 2\tau)$ маємо $t^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}} \leq c_6\tau^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}}$, а при $t \in (2\tau, T)$ — $t - \tau > \tau$, а отже, $(t-\tau)^{\beta-1} < c_7\tau^{\beta-1}$, одержуємо оцінки

$$|D^{\bar{\gamma}}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)(y,\tau)| \leq c_8 \left[\tau^{(k-|\bar{\gamma}|)\frac{\beta}{\alpha}} \int\limits_{\tau}^{2\tau} (t-\tau)^{\beta-1}\big[1 + |\ln (t-\tau)^{\beta/\alpha}|\big]dt + \right.$$

$$+\tau^{\beta-1}\int\limits_{2\tau}^{T} t^{(k-|\bar\gamma|)\frac{\beta}{\alpha}}|\tilde\psi_{k,\bar\gamma}(t)|\big[1+|\ln{(t-\tau)^{\beta/\alpha}}|\big]dt\Bigg] \le c_9\tau^{(k+\alpha-|\bar\gamma|)\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Звідси випливає, що $\tau^{(|\bar\gamma|-(\overline{k+\alpha}))\frac{\beta}{\alpha}}D^{\bar\gamma}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)\in C(\bar Q_T)$, тобто $\rho^{|\bar\gamma|-(\overline{k+\alpha})}D^{\bar\gamma}(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)\in C(\bar Q_T)$ для всіх $|\bar\gamma|\le\overline{k+\alpha}$, $(y,\tau)\in\bar Q_T$, якщо $\varphi\in D_k(\bar Q_T)$. З леми 3 випливає, що $\hat L(\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi)=\varphi$, а отже, $\hat{\mathfrak{G}}_0\varphi\in X_k(\bar Q_T)$ при $\varphi\in D_k(\bar Q_T)$.

Розглянемо окремо випадок $F=0$ та уточнимо характер особливостей при $t=0$ розв'язку задачі Коші. Введемо ваговий функційний простір

$$M_k(Q_T)=\left\{u\in L_{1,\mathrm{loc}}(Q_T)\colon \|u\|_k=\int\limits_{Q_T}\rho^k(x,t)|u(x,t)|dxdt<+\infty\right\}.$$

Це простір регулярних узагальнених функцій із $D'_k(\bar Q_T)$: якщо $f\in M_k(Q_T)$, то $(f,\varphi)_{Q_T}= =\int_{Q_T}f\varphi dxdt$ для кожної функції $\varphi\in D_k(\bar Q_T)$.

Теорема 3. *За припущення* (Ls) *та* $F=0$ *існує єдиний розв'язок* $u\in M_k(Q_T)$ *задачі* (4), *що визначається формулою*

$$u(x,t)=(u_0(y),G_1(x-y,t)),\quad (x,t)\in Q_T. \tag{17}$$

Доведення. З теореми 2 випливає однозначна розв'язність задачі у просторі $D'_k(\bar Q_T)$ та зображення (16) розв'язку для довільної $\varphi\in D_k(\bar Q_T)$. Потрібно показати, що цей розв'язок можна подати у вигляді (17) та що він має кращі властивості — належить ваговому L_1-простору $M_k(Q_T)$.

За властивостями H-функцій Фокса [16] $G_1(x,t)$ — нескінченно диференційовна функція при $(x,t)\ne(0,0)$, а отже, $G_1(x-y,t)$ — нескінченно диференційовна функція при $(x,t)\in Q_T$ і праву частину (17) визначено.

Використовуючи аналог теореми Фубіні [17, с. 59] (формула (3.2)) і формулу (12), для довільної функції $\psi\in X(\bar Q_T)$ маємо

$$\int\limits_{Q_T}u\hat L\psi dxdt=\int\limits_{Q_T}\big(u_0(y),G_1(x-y,t)\big)(\hat L\psi)(x,t)dxdt=$$

$$=\left(u_0(y),\int\limits_{Q_T}G_1(x-y,t)(\hat L\psi)(x,t)dxdt\right)=\left(u_0(y),\int\limits_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(y,t)dt\right).$$

Отже, функція (17) задовольняє тотожність (5), тобто є розв'язком задачі (4).

Щоб довести, що функція (17) належить $M_k(Q_T)$, достатньо довести скінченність $\int_{Q_T}\varrho^k(x,t)u(x,t)dxdt$. Оскільки ϱ^k належить $D_k(\bar Q_T)$, то з леми 4 випливає існування таких додатних сталих $\widehat C_{k,\gamma}$, що

$$\left| D_y^\gamma \int\limits_{Q_T} \rho^k(x,t) G_1(x-y,t)\,dx\,dt \right| \le \widehat{C}_{k,\gamma} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \qquad |\gamma| \le s \le \overline{k + \frac{\alpha}{\beta}}. \tag{18}$$

Згідно з означенням порядку сингулярності узагальненої функції,

$$(u_0(y), G_1(x-y,t)) = \sum_{|\gamma|\le s} \int\limits_B D_y^\gamma G_1(x-y,t) F_\gamma(y)\,dy, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{19}$$

де $B = \mathrm{supp} u_0$, $F_\gamma \in L_1(B)$, $|\gamma| \le s$.

Тепер, враховуючи (18) та (19), отримуємо

$$\left| \int\limits_{Q_T} \varrho^k(x,t) u(x,t)\,dx\,dt \right| \le$$

$$\le \sum_{|\gamma|\le s} \left| D_y^\gamma \int\limits_B \left(\int\limits_{Q_T} \varrho^k(x,t) G_1(x-y,t)\,dx\,dt \right) \right| |F_\gamma(y)|\,dy \le \sum_{|\gamma|\le s} \int\limits_B \widehat{C}_{k,\gamma} |F_\gamma(y)|\,dy < +\infty.$$

1. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 4. – С. 660 – 670.
2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc.: Birkhäuser, 2004. – 390 p.
3. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost friequency independent, II // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. – 1967. – **13**. – P. 529 – 539.
4. *Caputo M., Minardi P.* Linear model of dissipation in anelastic solids // Rev. Nuovo Cimento (Ser. II). – 1971. – **1**. – P. 161 – 198.
5. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1999. – 671 с.
6. *Gorenfio R., Minardi P.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Eds A. Carpinteri, P. Minardi. CISM Lect. Notes. – 1997. – **378**. – P. 223 – 276.
7. *Ворошилов А. А., Килбас А. А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. АН. – 2007. – **414**, № 4. – С. 1 – 4.
8. *Engler H.* Similarity solutions for a class of hyperbolic integrodifferential equations // Different. Integral Equat. – 1997. – **10**, № 5. – P. 815 – 840.
9. *Городецкий В. В., Дринь Я. М.* Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций – Львов, 1991. – 57 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т прикл. пробл. мех. и мат.; № 4 – 91).
10. *Лопушанська Г. П.* Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 48 – 59.
11. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. – М.: Наука, 2005. – 199 с.
12. *Jun Sheng Duan.* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46** (013504).
13. *Anh V. V., Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas // J. Statist. Phys. – 2001. – **104**, № 5/6. – P. 1349 – 1387.
14. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спец. курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
15. *Лопушанская Г. П., Лопушанский А. О., Пасичник О. В.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 6. – С. 1288 – 1299.
16. *Kilbas A.A., Sajgo M.* H-transforms. – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004. – 401 p.
17. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Одержано 08.03.12