

РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАМКНЕНОЇ 1-ФОРМИ НА ЗАМКНЕНИХ ОРІЄНТОВАНИХ ПОВЕРХНЯХ

We study closed 1-forms with isolated zeros on closed orientable surfaces. Conditions under which given invariants generate a closed 1-form are found.

Исследуются замкнутые 1-формы с изолированными нулями на замкнутых ориентируемых поверхностях. Найлены условия, при которых заданные инварианты будут определять замкнутую 1-форму.

1. Вступ. Дослідження топологічних властивостей замкнених 1-форм відноситься до розділів математики, що вивчають шарування на многовидах, зокрема до розділу топології, що вивчає диференціальні 1-форми на многовидах, або до розділу теорії динамічних систем, що розглядає потоки. Серед праць останніх років варто виділити роботу [5], в якій отримано топологічну класифікацію замкнених 1-форм Морса з ізольованими нулями та замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях. У [6, 7] наведено класифікацію довільних замкнених 1-форм з довільними рекурентними кривими на замкнених орієнтованих та на неорієнтованих поверхнях відповідно, у [8] — з довільними рекурентними кривими на поверхнях з краєм.

У роботі [9] знайдено реалізацію замкненої 1-форми із замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях, тобто знайдено умови, при яких певний інваріант — граф — визначає замкнену 1-форму. У даній роботі розглядається реалізація замкненої 1-форми з довільними рекурентними кривими, зокрема незамкненими, на замкнених орієнтованих поверхнях. Знайдено умови, при яких задані інваріанти будуть визначати замкнену 1-форму.

2. Попередні відомості. Нехай M — замкнена орієнтована поверхня роду p , ω — замкнена 1-форма на M . Нагадаємо деякі визначення з [6, 7, 9].

Позначимо через $N(\omega)$ множину нулів ω . Крива $\gamma \subset M$, що не містить нулів, називається *інтегральною кривою* ω , якщо локально вона є рівнем функції f такої, що $\omega = df$. Ми будемо розглядати лише максимальні інтегральні криві (які не є власними підмножинами інших кривих) і називатимемо їх просто кривими.

Інтегральна крива $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ називається *рекурентною*, якщо $\gamma \subset \{z \in M: \exists \{t_n\} \rightarrow \pm\infty, \gamma(t_n) \rightarrow z, n \rightarrow \infty\}$. З означення випливає, що якщо інтегральна крива є замкненою або скрізь щільною в M , то вона рекурентна. Відомо, що криві замкненої 1-форми можуть бути лише або замкненими, або незамкненими рекурентними.

Для кожного досить малого околу $O(z)$ точки $z \in M \setminus N(\omega)$ крива, що проходить через z , розбиває $O(z)$ на дві частини: додатну $\{s: f(s) - f(z) > 0\}$ і від'ємну $\{s: f(s) - f(z) < 0\}$.

З роботи [7] відомо, що в околі кожної точки інтегральної кривої замкненої 1-форми можна задати однозначно визначений вектор \bar{p} . Будемо вважати, що вектор \bar{p} направлений від інтегральної кривої з меншим значенням рівня (з від'ємної частини околу) до інтегральної кривої з більшим значенням рівня (в додатну частину околу), тобто вектор \bar{p} локально порівнює дві сусідні інтегральні криві замкненої 1-форми ω , і називатимемо його *порівнюючим напрямком* у точці. Порівнюючі напрямки скрізь узгоджені, тобто немає точки, в якій задано два протилежно напрямлені напрямки.

Нуль 1-форми називається *ізолюваним*, якщо існує його окіл, що не містить інших нулів. У цій роботі будемо розглядати замкнені 1-форми з ізолюваними нулями.

Відомо [10], що для кожного нуля (крім локального мінімуму і максимуму) існує окіл, у якому функція спряжена з функцією $\operatorname{Re} z^k$ для деякого числа $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. У випадку $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ізолюваний нуль буде сідлом парної валентності більше ніж 2; при $k = 1$ валентність сідла дорівнює 2, і такі сідла у роботі розглядатися не будуть; при $k = 0$ буде центр. Тому можливі лише два види ізолюваних нулів: сідла парної валентності більше ніж 2 і центри. Далі будемо вважати, що центр має 0-валентність, тобто парну валентність.

Об'єднання нулів ω та інтегральних кривих, що їх з'єднують, будемо розглядати як *граф замкненої 1-форми* $G(\omega)$, що вкладений у поверхню. Вершинами графа є нулі, а ребрами — криві, що їх з'єднують. При цьому якщо з нуля виходить незамкнена рекурентна півкрива, то для отримання графа $G(\omega)$ обріжемо цю півкриву на деякій відстані від нуля і отримаємо ребро з однією вершиною валентності 1.

З роботи [7] відомо, що траєкторії потоків на орієнтованих поверхнях є інтегральними кривими замкненої 1-форми, тому для дослідження кривих замкнених 1-форм можна досліджувати траєкторії потоків. Враховуючи це, наведемо теореми для потоків і будемо вважати їх справедливими для замкнених 1-форм.

Орієнтована поверхня роду 1. Розглянемо тор M як фактор-простір евклідової площини \mathbb{R}^2 з координатами x, y по цілочисловій решітці \mathbb{Z}^2 , яка ізоморфна фундаментальній групі тора [1]. Нехай $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ — проекція, f^t — потік на M , L — додатна півтраєкторія f^t , $l: x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [0, +\infty)$) — її прообраз на \mathbb{R}^2 .

Згідно з теоремою 4.4 [1], якщо $x^2(t) + y^2(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то існує скінченна чи нескінченна границя $\nu(L) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$, яка не залежить від вибору прообразу l в $\pi^{-1}(L)$. Для потоку f^t на M можна говорити про одне число ν для будь-якої півтраєкторії, аби лише її прообраз на \mathbb{R}^2 залишав компакту частину площини. Таке число ν називається *числом обертання Пуанкаре* потоку f^t на торі M .

За теоремою 4.2 [1], якщо L — півтраєкторія потоку f^t на торі M , то: 1) якщо гранична множина для L містить замкнену негомотопну нулю траєкторію або замкнений не гомотопний нулю контур, який складається зі станів рівноваги і сепаратрис, то число обертання Пуанкаре ν потоку f^t існує і є або раціональним, або дорівнює ∞ ; 2) якщо гранична множина для L містить незамкнену стійку за Пуассоном півтраєкторію, то число обертання Пуанкаре ν потоку f^t існує і є ірраціональним.

За теоремою 4.3 [1], якщо на торі M задано потік f^t без станів рівноваги, то число обертання Пуанкаре ν існує і: 1) якщо ν раціональне або дорівнює ∞ , то на торі є хоча б одна замкнена траєкторія; 2) якщо ν ірраціональне, то потік f^t не має замкнених траєкторій і містить рівно одну нетривіальну (відмінну від станів рівноваги і замкненої траєкторії) мінімальну множину, яка або збігається з усім тором (транзитивний потік), або ніде не щільна на торі (сингулярний потік).

Орієнтована поверхня роду більше ніж 1. Для орієнтованої поверхні M роду $p > 1$, дотримуючись робіт [1, 4], розглянемо H^2 — круг Пуанкаре, $\partial H^2 = S^1_\infty$ — абсолют з метрикою

$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$, де x і y — координати точки в \mathbb{R}^2 . Позначимо множину всіх ізометрій на H^2 через Γ . Відомо, що Γ ізоморфна фундаментальній групі $\pi_1(M)$, а проєкція $\pi: H^2 \rightarrow H^2/\Gamma \cong M$ — універсальне накриття M .

Нагадаємо [1], що потік f^t на M належить класу T , якщо виконуються наступні умови: потік f^t є транзитивним, тобто має на M скрізь щільну півтраєкторію; f^t має лише скінченне число станів рівноваги і сепаратрис; f^t не має сепаратрис, що йдуть з одного стану рівноваги в інший або в той самий.

Для потоків класу T повним топологічним інваріантом (з точністю до автоморфізму групи Γ) є гомотопічний клас обертання півтраєкторії [1, 4], який визначається для конкретної півтраєкторії, що не має точку спокою своєю граничною. Оскільки гомотопічний клас обертання однієї півтраєкторії визначається гомотопічним класом обертання довільної іншої півтраєкторії, то повний топологічний інваріант можна зобразити у вигляді геодезичного каркасу, що складається з геодезичних з тими ж граничними точками, що і траєкторії потоку.

У даній роботі будемо використовувати поняття геодезичної ламінації, описане у роботі [2], а у роботі [3] використовується еквівалентний термін „геодезичне шарування”. Наведемо деякі відомості з цих робіт.

Геодезичною ламінацією на поверхні M називається шарування замкненої підмножини M геодезичними без самоперетинів. Орієнтація геодезичної ламінації G на M називається *сумісною*, якщо для довільної геодезичної $l \in G$ і для довільної точки $m \in l$ існує трансверсальний сегмент Σ , що проходить через m і оснащений звичайною орієтацією, такий, що при перетині Σ з усіма геодезичними з G індекси є рівними. Геодезична ламінація називається *орієнтованою*, якщо її геодезичні визначають сумісну орієтацію.

Геодезична ламінація називається *раціональною*, якщо вона не містить нетривіальних рекурентних геодезичних. Геодезична ламінація називається *ірраціональною*, якщо вона складається з нетривіальних рекурентних геодезичних.

Нехай f^t — потік на замкненій орієнтованій поверхні M роду $p > 1$, $\tilde{f}^t = \pi^{-1}(f^t)$ — накриваючий потік на H^2 . Розглянемо траєкторію $\tilde{l} = \pi^{-1}(l)$ потоку \tilde{f}^t , яка є прообразом траєкторії l потоку f^t і прямує в обох напрямках до різних точок на абсолюті $S_\infty^1: \omega(\tilde{l})$ і $\alpha(\tilde{l})$ — α -граничних множин траєкторії \tilde{l} . Геодезична $\tilde{L}(\tilde{l})$ з кінцями в $\alpha(\tilde{l})$ і $\omega(\tilde{l})$ з орієтацією від $\alpha(\tilde{l})$ до $\omega(\tilde{l})$ називається *коасимптотичною* для \tilde{l} , а $\pi(\tilde{L}(\tilde{l})) = L(l)$ є *коасимптотичною* для l . Можна показати, що $L(l)$ не має трансверсальних самоперетинів і топологічне замикання $L(l)$ є геодезичною ламінацією. Поняття коасимптотичних геодезичних аналогічне для траєкторій з граничною точкою сідло. В даному випадку розглядаються узагальнені траєкторії, тобто траєкторії, що складаються з самої сепаратриси та її одностороннього продовження по Бендиксону.

Позначимо через $\tilde{G}(\tilde{f}^t)$ множину орієнтованих геодезичних, що відповідають усім траєкторіям і узагальненим траєкторіям потоку \tilde{f}^t . Згідно з [2], $\tilde{G}(\tilde{f}^t)$ називається *геодезичним каркасом*, а $\pi(\tilde{G}(\tilde{f}^t)) = G(f^t)$ є *геодезичним каркасом* потоку f^t .

Розглянемо поняття геодезичного каркасу для квазімінімальних множин потоку. Незамкнена траєкторія називається *нетривіально рекурентною*, якщо вона належить своїй $\omega(\alpha)$ -граничній множині. Візьмемо одну з накриваючих \tilde{l} для нетривіальної рекурентної траєкторії l , що нале-

жить квазімінімальній множині Q потоку f^t . У [4] доведено, що \tilde{l} прямує до різних точок на абсолюті, тому існує коасимптотична геодезична $\tilde{L}(\tilde{l})$, а $\pi(\tilde{L}(\tilde{l})) = L(l)$ є нетривіальною рекурентною геодезичною без самоперетинів на поверхні M . Топологічне замикання $\text{clos}[L(l)] = G(Q)$ є геодезичною ламінацією, яка не залежить від вибору l і називається *геодезичним каркасом* Q .

Отже, геодезичний каркас потоку — це топологічне замикання об'єднання всіх коасимптотичних геодезичних для траєкторій і узагальнених траєкторій (об'єднання сідел, нерухомих точок і траєкторій, що прямують до нерухомих точок). Можна показати, що геодезичний каркас завжди є геодезичною ламінацією.

За теоремою 3.2 [2], якщо f^t — ірраціональний потік на замкненій орієнтованій гіперболічній поверхні M , то її геодезичний каркас $G(f^t)$ є ірраціональною орієнтованою геодезичною ламінацією.

За теоремою 3.3 [2], якщо задано довільну ірраціональну орієнтовану геодезичну ламінацію G на замкненій орієнтованій гіперболічній поверхні M , то існує ірраціональний потік f^t на M такий, що $G(f^t) = G$.

Топологічна еквівалентність потоків на орієнтованій поверхні роду 1 (торі) зводиться до сумірності відповідних чисел обертання Пуанкаре [1], а теорема 4.3 [1] описує можливий вигляд кривих потоку в залежності від раціональності чи ірраціональності даного числа. Топологічна еквівалентність замкнених 1-форм [6] зводиться не лише до сумірності чисел обертання, а й до ізоморфізму відповідних графів 1-форм, тому при дослідженні реалізації доцільно використовувати як число обертання, так і граф.

Топологічна еквівалентність потоків на орієнтованій поверхні роду більше ніж 1 зводиться до сумірності відповідних гомотопічних класів [4], а теорема 3.3 [2] задає реалізацію потоку через узагальнення гомотопічного класу — геодезичний каркас. Топологічна еквівалентність замкнених 1-форм [6] зводиться не лише до сумірності гомотопічних класів обертання, а й до ізоморфізму відповідних графів 1-форм, тому при дослідженні реалізації доцільно використовувати як геодезичний каркас, так і граф.

Теореми 4.3 [1] і 3.3 [2] не дають інформації про граф, тому використання крім зазначених інваріантів потоків ще і наперед визначеного графа є новою і не розв'язаною задачею, яка і досліджується у даній роботі.

3. Основні результати.

Означення 3.1. Відкриту множину $U \subset M$ будемо називати областю, якщо ∂U складається з ребер і вершин графа $G(\omega)$.

Для отримання умов реалізації розглянемо кілька допоміжних лем.

Лема 3.1. Нехай M — замкнена поверхня роду p , ω — замкнена 1-форма на M , $G(\omega)$ — граф ω , який вкладено в M і який розбиває M на області U_i , тобто $M \setminus G = \cup U_i$. Тоді:

- 1) область U_i заповнена лише або замкненими, або незамкненими рекурентними кривими;
- 2) якщо область U_i має незамкнену рекурентну півкриву, то $\partial(M \setminus U_i)$ має ребра з вершинами валентності 1;
- 3) якщо зв'язна межа $\partial(M \setminus U_i)$ має хоча б одне ребро з вершиною валентності 1, то кількість таких ребер на даній межі $\partial(M \setminus U_i)$ є парною.

Доведення. 1. Припустимо супротивне, тобто нехай існує область U_i , в якій є одночасно замкнені і незамкнені рекурентні криві. Оскільки дані криві повністю заповнюють U_i , то буде існувати замкнена крива γ така, що незамкнені рекурентні криві перетинають досить малий окіл γ . При близькому наближенні до γ деяка незамкнена крива буде мати або граничну точку на γ , або всю γ своєю граничною множиною. Оскільки область $U_i \subset M \setminus G$, то U_i не містить особливих точок, а криві 1-форми не можуть мати замкнені криві своїми граничними множинами. Тому дані випадки є неможливими.

Отже, довільна область U_i заповнена лише або замкненими, або незамкненими рекурентними кривими.

2. Припустимо супротивне, тобто нехай існує область U_i , яка має незамкнену рекурентну півкриву і $\partial(M \setminus U_i)$ не має вершин валентності 1. Тоді навколо $\partial(M \setminus U_i)$ розташовані замкнені інтегральні криві ω і U_i містить замкнені і незамкнені рекурентні криві, що неможливо згідно з п. 1 леми.

3. Зауважимо, що якщо $\partial(M \setminus U_i)$ без вершин валентності 1, то навколо $\partial(M \setminus U_i)$ розташовані замкнені криві і скрізь узгоджені порівнюючі напрямки. Якщо $\partial(M \setminus U_i)$ має хоча б одне ребро з вершиною валентності 1, то в околі $\partial(M \setminus U_i)$ це ребро розділить замкнені криві, а в околі точки розриву зміняться порівнюючі напрямки на протилежні. Для того щоб порівнюючі напрямки були скрізь узгодженими, потрібно, щоб вони змінювалися парну кількість разів, тобто щоб кількість ребер з вершиною валентності 1 була парною.

Лемі 3.1 доведено.

Означення 3.2. Граф G' будемо називати парним G -графом, якщо в кожному максимальному зв'язному підграфі з G , який має вершини валентності 1, будуть проведені склеювання таким чином:

розглянемо довільне ребро з вершиною валентності 1 і з області, якій належить дана вершина, продовжимо всі інші ребра з вершинами валентності 1 даного підграфа до вибраної вершини;

*всі ребра продовжуємо вздовж сусідніх ребер і вершин даного підграфа по поверхні M ;
продовження ребер з вершинами валентності 1 не перетинаються між собою і не перетинають граф G .*

Далі в роботі без додаткових пояснень будемо для графа G використовувати граф G' , визначений в означенні 3.2, а для $G(\omega) - G'(\omega)$.

Зауваження 3.1. 1. За побудовою граф G' є вкладеним у M .

2. Якщо граф G не має вершин валентності 1, то $G' = G$.

3. За лемою 3.1 кількість ребер в $G(\omega)$ у кожній області буде парною, тому ситуації, зображеної на рис. 1, не буде, а всі новоутворені вершини в $G'(\omega)$ будуть мати парну валентність.

4. При склейці лише двох ребер з вершинами валентності 1 сідла валентності 2 розглядати не будемо — буде лише одне суцільне ребро. Тому $G'(\omega)$ має всі вершини парної валентності більше ніж 2.

Нехай M — замкнена поверхня, G — граф, вкладений у M . Розглянемо точки перетину x_k графа G і довільної замкненої кривої s , зафіксуємо деяку точку перетину x_k і поставимо їй у відповідність знак δ_k : + чи -. Тоді з кожною наступною точкою x_{k+1} будемо пов'язувати знак

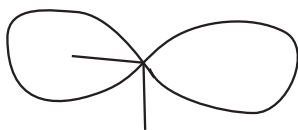


Рис. 1

δ_{k+1} за таким правилом: якщо, рухаючись по s , кожному наступну точку перетину x_{k+1} можна отримати, рухаючись від попередньої x_k по ребрах і вершинах (чи ребрі) графа G , то для точки x_{k+1} будемо вважати $\delta_{k+1} = -\delta_k$, тобто δ_k змінює знак. Якщо таких ребер (чи ребра) не існує, то з точкою x_{k+1} зіставимо $\delta_{k+1} = \delta_k$, тобто δ_k знак не змінює. Зауважимо, що знак δ_k будемо ставити перед перетином кривої s з графом G , який визначає точку x_k . Таким чином, на кривій s ми задали множину точок x_k , які утворені перетином графа G з кривою s , і з кожною точкою зіставили знак δ_k : + чи -.

Лема 3.2. Якщо $G = G(\omega)$ — граф замкненої 1-форми ω , то порівнюючі напрямки в околі $G(\omega)$ однозначно задають порівнюючі напрямки в околі $G'(\omega)$ і навпаки.

Доведення. Якщо $G(\omega)$ не має вершин валентності 1, то $G'(\omega) = G(\omega)$ і лему доведено.

Нехай $G(\omega)$ має вершини валентності 1. Розглянемо деякий зв'язний підграф з вершинами валентності 1 і довільну замкнену криву s , що перетинає його. Точкам перетину підграфа з кривою зіставимо знаки + і - за правилом, описаним вище. Оскільки в кожній точці перетину знак ставиться до перетину s з ребром, то після перетину розставимо протилежні знаки. Кожній новоутвореній парі знаків + і - зіставимо порівнюючий напрямок, направлений від - до +. Таким чином ми задали порівнюючі напрямки на s , і зі зміною знаків відбувається зміна порівнюючих напрямків. Рухаючись по s , порівнюючий напрямок змінює напрямок на протилежний лише в точці перетину s з ребром підграфа.

Для спрощення міркувань будемо розглядати перетини s з кожним ребром $G(\omega)$ без додаткових перетинів (наприклад, зображених на рис. 2).

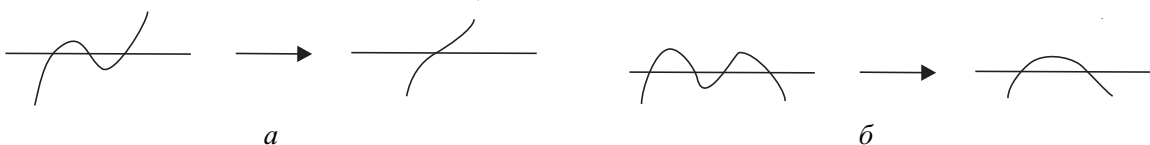


Рис. 2

Кожна вершина підграфа, крім вершин валентності 1, має парну валентність, і порівнюючий напрямок, рухаючись по s в околі кожної вершини (рис. 3, а), проходить через парну кількість ребер. Оскільки ребро з вершиною валентності 1 може бути достатньо малим, то може виникнути ситуація, коли в околі цієї вершини s не перетне дане ребро і рух по s покаже неузгодженість порівнюючих напрямків, хоча насправді це не так (рис. 3, б).

Щоб уникнути подібного, можна накласти додаткову умову на s в околі сідла, що має відповідні ребра: або s перетинає кожне ребро в двох точках (рис. 4, а), або s перетинає всі ребра в одній точці кожне (рис. 4, б). Дана умова є громіздкою, оскільки потрібно розглядати не довільну замкнену криву s , а замкнену криву з описаною умовою.

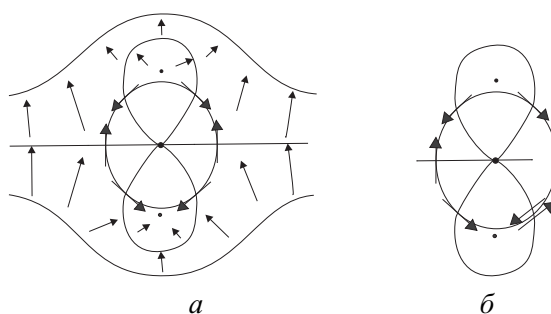


Рис. 3

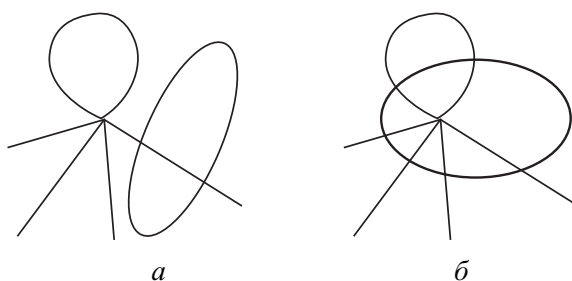


Рис. 4

Розглянемо детальніше структуру побудови G' в околі одного сідла, що має ребра з вершинами валентності 1. В кожній області при побудові G' всі ребра з вершинами валентності 1 продовжуються до спільної точки, тобто продовжені ребра будуть сепаратрисами одночасно двох сідел. І тому якщо, рухаючись, крива s перетне певне ребро, то або s розвернеться і перетне це ребро знову (рис. 5, *a*), або поступово перетне всі ребра нового сідла (рис. 5, *б*). Тому після склеювання умови, описані для s , будуть виконуватись автоматично.

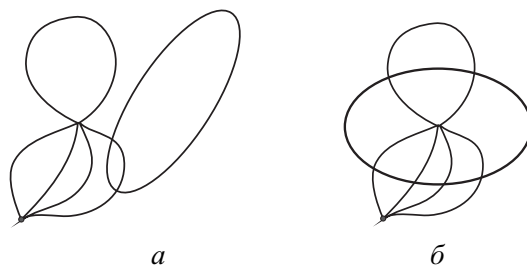


Рис. 5

Провівши такі склеювання у кожному підграфі, що має вершини валентності 1, замість $G(\omega)$ отримаємо граф $G'(\omega)$. Тому порівнюючі напрямки в околі $G(\omega)$ однозначно задають порівнюючі напрямки в околі $G'(\omega)$ і навпаки, що і потрібно було довести.

Лему 3.2 доведено.

Зауваження 3.2. Спосіб продовження ребер та вибір вершини валентності 1, до якої відбувається продовження, є несуттєвими. Важливим є те, що в результаті продовжені ребра будуть сепаратрисами одночасно двох сідел і умови для s (в доведенні лемі) будуть виконуватись.

Означення 3.3. Будемо казати, що для графа G виконується правило знаків, якщо s — довільна замкнена крива, яка перетинає G' послідовно в точках x_k , і кожній точці x_k поставлено у відповідність знак δ_k за правилом, описаним вище. Тоді при повному обході s , починаючи з точки x_k , ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k .

За теоремою 1 [9], якщо M — замкнена поверхня роду p , G — граф, який вкладений у M і не має вершин валентності 2, а має вершини лише парної валентності, то існує замкнена 1-форма ω з заданим графом $G = G(\omega)$ тоді і лише тоді, коли s — довільна замкнена крива, яка перетинає G послідовно в точках x_k і кожній точці x_k поставлено у відповідність знак δ_k за правилом, описаним вище. Тоді при повному обході s , починаючи з точки x_k , ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k .

Використовуючи означення 3.2, 3.3 і той факт, що G не має вершин валентності 1, тобто $G' = G$, теорему 1 [9] можна переформулювати таким чином: якщо M — замкнена поверхня роду p , G — граф, який вкладений у M і не має вершин валентності 2, а має вершини лише парної валентності, то існує замкнена 1-форма ω з заданим графом $G = G(\omega)$ тоді і лише тоді, коли для G виконується правило знаків. Дане формулювання є більш зручним і буде використовуватись у доведеннях наступних теорем.

Орієнтована поверхня роду 0. Нехай M — замкнена орієнтована поверхня роду 0 (сфера), тоді замкнена 1-форма ω на M не має незамкнених рекурентних кривих, тобто $G(\omega)$ не має вершин валентності 1. Тому реалізація ω на даній поверхні зводиться до теореми 1 [9], що описана вище.

Орієнтована поверхня роду 1.

Теорема 3.1. Нехай M — замкнена орієнтована поверхня роду 1 (тор), $\nu \in \mathbb{R} \cup \infty$, G — граф, вкладений у M , кожна зв'язна компонента якого має наступні властивості:

не має вершин валентності 2,

має або вершини парної валентності, або парне число ребер з однією вершиною валентності 1.

Граф G і число ν визначають замкнену 1-форму ω з графом $G = G(\omega)$ та числом обертання Пуанкаре ν для кривих ω тоді і лише тоді, коли для G виконується правило знаків і має місце одна з умов:

1) G не має вершин валентності 1, ν — раціональне число або рівне ∞ ;

2) $G = \emptyset$, ν — ірраціональне число;

3) $G \neq \emptyset$, ν — ірраціональне число і при цьому:

3.1) G має хоча б один підграф рівно з двома ребрами з вершинами валентності 1;

3.2) підграфи без вершин валентності 1 і ребра з вершинами валентності 1 не є межами спільної області.

Доведення. *Необхідність.* Оскільки граф $G(\omega)$ замкненої 1-форми ω має таку ж будову, як і граф G , то розглянемо $G = G(\omega)$ — граф, що вкладений у поверхню M . Для отримання інших умов розглянемо такі випадки:

1. $G(\omega) = \emptyset$ і ω не має незамкненої рекурентної кривої, тоді $G(\omega)$ не має вершин валентності 1, умова щодо виконання правила знаків для G зникає, а криві ω будуть замкненими

без особливостей. За теоремою 4.2 [1] для таких кривих ω число обертання Пуанкаре ν є раціональним або дорівнює ∞ .

$G(\omega) \neq \emptyset$ і ω не має незамкненої рекурентної кривої, тоді $G(\omega)$ не має вершин валентності 1, а криві ω мають центри, замкнені криві, сепаратрис, сідла. За теоремою 1 [9] для $G(\omega)$ виконується правило знаків, а за теоремою 4.2 [1] для таких кривих ω число обертання Пуанкаре ν є раціональним або дорівнює ∞ .

2. $G(\omega) = \emptyset$ і ω має незамкнені рекурентні криві, тоді вони щільно заповнюють тор і за п. 2 теореми 4.2 [1] число обертання Пуанкаре ν є ірраціональним. Оскільки $G = \emptyset$, то умова щодо виконання правила знаків для G зникає.

3. $G(\omega) \neq \emptyset$ і ω має незамкнені рекурентні криві. Для дослідження вигляду графа $G(\omega)$ дослідимо можливі випадки одночасного існування довільного графа і незамкнених рекурентних кривих на заданій поверхні.

Якщо незамкнені рекурентні криві не перетинають даний граф у сідлах, то $\partial(M \setminus U_i)$ не має вершин валентності 1 і навколо $\partial(M \setminus U_i)$ розташовані замкнені криві. Тоді область заповнена одночасно замкненими і незамкненими рекурентними кривими, що за лемою 3.1 неможливо. Тому незамкнені криві будуть перетинати вкладений граф і $\partial(M \setminus U_i)$ має ребра з вершинами валентності 1.

Зауважимо, що довільний зв'язний граф може перетинати лише дві незамкнені рекурентні криві. Інакше, після видалення даного графа, заклеїмо межі диском і стягнемо його в точку, отримаємо сідло валентності більше ніж 2, що неможливо.

З описаних міркувань отримаємо, що G має хоча б один підграф рівно з двома ребрами з вершинами валентності 1.

Якщо є підграфи без вершин валентності 1, то вони розміщені таким чином, щоб замкнені криві навколо них не перетиналися з незамкненими рекурентними кривими, тобто щоб підграфи без вершин валентності 1 і ребра з вершинами валентності 1 не були межами спільної області (наприклад, зображений на рис. 6). Глобальна поведінка незамкнених кривих не зміниться, тому число ν не зміниться і залишиться ірраціональним.

Оскільки на поверхні задана замкнена 1-форма, то граф задовольняє правило знаків.

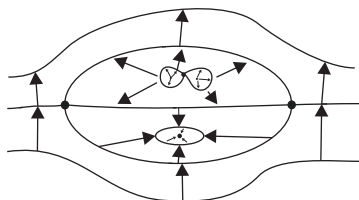


Рис. 6

Отже, показано, що незалежно від вигляду кривих ω для G виконується правило знаків і умови 1–3.

Достатність. Нехай G — граф, що описаний у теоремі, для якого виконується правило знаків. Розглянемо випадки 1–3 окремо і побудуємо по кожному замкнену 1-форму.

1. Нехай G не має вершин валентності 1, тоді за теоремою 1 [9] на M існує замкнена 1-форма ω з графом $G = G(\omega)$, а криві ω можуть бути замкненими без особливостей, або мати сідла, центри, сепаратриси. Тоді на підставі теореми 4.2 [1] число обертання Пуанкаре ν кривих ω існує і або є раціональним, або дорівнює ∞ . Оскільки раціональні числа обертання (включаючи ∞) завжди сумірні [1], то гомеоморфно можна так перетворити криві ω , щоб вони мали ν — число обертання Пуанкаре.

2. $G = \emptyset$, ν — ірраціональне. Побудуємо на M незамкнені криві, для яких ірраціональне число ν є числом обертання Пуанкаре. Тоді за п. 2 теореми 4.3 [1] на M немає замкнених траєкторій і M містить рівно одну нетривіальну (відмінну від станів рівноваги і замкненої траєкторії) мінімальну множину, яка або збігається з усім тором (транзитивний потік), або ніде не щільна на торі (сингулярний потік). Оскільки незамкнені інтегральні криві замкненої 1-форми можуть бути лише рекурентними, то, розглянувши випадок транзитивного потоку, отримаємо поверхню M , заповнену незамкненими рекурентними кривими замкненої 1-форми.

3. $G \neq \emptyset$ і має хоча б один підграф рівно з двома ребрами з вершинами валентності 1; підграфи без вершин валентності 1 і ребра з вершинами валентності 1 не є межами спільної області, ν — ірраціональне. Побудуємо на M незамкнені рекурентні криві, для яких ірраціональне число ν є числом обертання Пуанкаре. Розглянемо деяку частину $(a; b)$ на деякій незамкненій кривій і видалимо її з кривої.

Розглянемо підграф з двома ребрами з вершинами валентності 1. Якщо ребра з вершинами валентності 1 не мають спільної вершини, то одну таку вершину ототожнимо з точкою a , іншу — з точкою b , ребра з вершинами валентності 1 покладемо на відповідні незамкнені криві (щоб сам граф знаходився у видаленій частині кривої), потім відкриті частини $(a; b)$ отожднимо з відповідними зовнішніми частинами підграфа.

Якщо ребра з вершинами валентності 1 мають спільну вершину, то спочатку стягнемо одну з двох відкритих частин $(a; b)$ в точку $a = b$, потім спільну вершину ребер з вершинами валентності 1 ототожнимо з $a = b$, ребра з вершинами валентності 1 покладемо на відповідні незамкнені криві (щоб сам граф знаходився в розрізаній частині кривої — петлі) і відкрити частину $(a; b)$ отожднимо з відповідними зовнішніми частинами підграфа.

Таким чином ми „вставили” даний граф в незамкнену криву.

За умовою підграфи без вершин валентності 1 і ребра з вершинами валентності 1 не є межами спільної області, тому такі підграфи розташуємо у внутрішності попередніх. Оскільки для G виконується правило знаків, то дана перебудова не змінить порівнюючих напрямків в околі вставлених графів. Провівши аналогічні міркування для всіх підграфів, отримаємо замкнену 1-форму на M .

Теорему 3.1 доведено.

Орієнтована поверхня роду більше ніж 1.

Теорема 3.2. *Нехай M — замкнена поверхня роду $p > 1$, G — граф, вкладений у M , кожна зв'язна компонента якого має наступні властивості:*

не має вершин валентності 2,

має або вершини парної валентності, або парне число ребер з однією вершиною валентності 1.

Граф G розбиває поверхню на області, тобто $M \setminus G = \cup U_i$. Кожній U_i роду 1 зіставимо число $\nu_i \in \mathbb{R}$, U_i роду більше ніж 1 — геодезичну ламінацію G_i , що задана на крузі Пуанкаре.

Граф G , числа ν_i , геодезичні ламінації G_i визначають замкнену 1-форму ω з графом $G = G(\omega)$, ν_i — числами обертання Пуанкаре кривих ω на відповідних U_i та $G_i = G_i(\omega)$ — геодезичними каркасами кривих ω на відповідних U_i тоді і лише тоді, коли:

- 1) для G виконується правило знаків;
- 2) для U_i роду 0 $\partial(M \setminus U_i)$ не має вершин валентності 1;
- 3) для U_i роду 1 кожен зв'язний підграф $\partial(M \setminus U_i)$ має рівно два ребра, в кожному з яких є по одній вершині валентності 1, ν_i — ірраціональне число;
- 4) для U_i роду більше ніж 1 $\partial(M \setminus U_i)$ має вершини валентності 1, G_i — ірраціональна орієнтована геодезична ламінація.

Доведення. Граф G розбиває поверхню M на області U_i таких типів: двозв'язні області роду 0, області роду 1, області роду більше ніж 1. Оскільки M орієнтована, то всі U_i також орієнтовані. Далі у доведенні будемо використовувати це без пояснень.

Необхідність. Оскільки граф $G(\omega)$ замкненої 1-форми ω має таку ж будову, як і граф G , то розглянемо $G = G(\omega)$ — граф, що вкладений у поверхню M .

Як і при доведенні леми 3.2, за допомогою порівнюючих напрямків задамо знаки $+$ і $-$ на довільній замкненій кривій, що перетинає G . Оскільки порівнюючі напрямки скрізь узгоджені, то і знаки будуть змінюватися так само узгоджено, тобто для G виконується правило знаків. Отримали умову 1.

Умова 2 виконується, бо ребро з вершиною валентності 1 задає незамкнену рекурентну півкриву, а таких на області роду 0 бути не може.

Для доведення умови 3 покажемо, що область роду 1 не може бути заповнена замкненими кривими. Припустимо від супротивного, що область U_i заповнена замкненими кривими. Розглянемо зв'язну суму U_i з її копією. Отримаємо замкнену орієнтовану поверхню, заповнену замкненими кривими. При цьому рід новоутвореної поверхні залежить від кількості меж області U_i і буде дорівнювати щонайменше 2 (при наявності лише однієї межі в U_i). Використовуючи теорему Пуанкаре–Хопфа, переконуємося, що замкненими кривими може бути заповнена лише орієнтована поверхня роду 1, а не роду 2 чи більше. Отримали суперечність.

Отже, область роду 1 заповнена незамкненими рекурентними кривими. За лемою 3.1 $\partial(M \setminus U_i)$ має парну кількість вершин валентності 1. Заклеївши $\partial(M \setminus U_i)$ дисками, отримаємо тор.

Покажемо, що тор з незамкненими рекурентними кривими не може мати сідел. Ізольовані нулі замкненої 1-форми можуть бути сідлами парної валентності або центрами (стоків чи витоків не буде). За теоремою Пуанкаре–Хопфа на торі можливі сідла при одночасному існуванні центрів. Навколо кожного центра розташовані замкнені криві. В розглядуваному випадку тор заповнений незамкненими рекурентними кривими. Якщо на ньому існують сідла і центри, то будуть одночасно задані замкнені і незамкнені криві, чого за лемою 3.1 не може бути. Тому новоутворений тор з незамкненими рекурентними кривими не має сідел.

Сідла можливі на межі області, але такі, щоб після стягнення приклеєних до $\partial(M \setminus U_i)$ дисків в точку не утворилися сідла. Це виконується, якщо $\partial(M \setminus U_i)$ має лише два ребра, в

кожному з яких є по одній вершині валентності 1 (наприклад, зображений на рис. 7). Заклеївши межі дисками і постягувавши ці диски в точки, одержимо тор, що заповнений незамкненими рекурентними кривими. За теоремою 4.2 [1] число обертання Пуанкаре ν_i є ірраціональним числом.

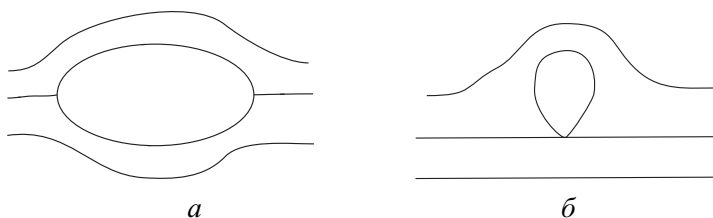


Рис. 7

4. Як і у випадку з областю роду 1, область роду більше ніж 1 буде заповнена лише незамкненими рекурентними кривими. За лемою 3.1 $\partial(M \setminus U_i)$ має парну кількість ребер з вершинами валентності 1. Заклеївши $\partial(M \setminus U_i)$ дисками і постягувавши ці диски в точки, отримаємо орієнтовану поверхню роду більше ніж 1; при цьому криві, що задавали ребра з вершинами валентності 1 в графі $G(\omega)$, утворять сідла парної валентності (сідла валентності 2 розглядати не будемо, утвориться суцільна крива). Нехай $G_i(\omega)$ — ірраціональний орієнтований геодезичний каркас 1-форми ω , що задана на новоутвореній поверхні. Тоді за теоремою 3.2 [2] $G_i = G_i(\omega)$ — ірраціональна орієнтована геодезична ламінація.

Достатність. За допомогою графа G , ірраціональних чисел ν_i , що відповідають областям U_i роду 1, ірраціональних орієнтованих геодезичних ламінацій G_i , що відповідають U_i роду більше ніж 1, та умов 1–4 побудуємо замкнену 1-форму на поверхні M . Спочатку заповнимо кривими кожену область U_i .

Двов'язні області роду 0 заповнимо замкненими кривими без самоперетинів від однієї межі до іншої.

В областях U_i роду 1 позаклеюємо межі дисками, диски постягуємо в точки, отримаємо тор. Оскільки областям U_i роду 1 зіставлено ірраціональні числа ν_i і $\partial(M \setminus U_i)$ має вершини роду 1, то заповнимо тор незамкненими рекурентними кривими, що мають ν_i — число обертання Пуанкаре. При цьому ребра кожної зв'язної підмежі $\partial(M \setminus U_i)$ з вершинами валентності 1 або продовжуються на незамкнені криві, або з'єднуються з такими ж ребрами іншої підмежі і тоді продовжуються на незамкнені криві.

В областях U_i роду більше ніж 1 позаклеюємо межі дисками, диски постягуємо в точки, отримаємо замкнену орієнтовану поверхню роду більше ніж 1. За теоремою 3.3 [2] на даній поверхні існує замкнена 1-форма така, що $G_i(\omega) = G_i$ — її геодезичний каркас.

Об'єднавши всі області U_i , отримаємо поверхню M з заданими на кожній області інтегральними кривими. Оскільки для графа G виконується умова 1, то порівнюючі напрямки будуть узгодженими як на самих областях, так і на межах між областями. Тому побудовані криві будуть інтегральними кривими деякої замкненої 1-форми на поверхні M .

Теорему 3.2 доведено.

1. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация потоков на замкнутых поверхностях // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, вып. 1(247). – С. 149–169.
2. *Aranson S. Kh., Grines V. Z., Zhuzhoma E. V.* Using the Lobachevsky plane to study surfaces and 2-webs flows, foliation // Proc. Int. Conf. BGL-4, Nizhny Novgorod; Kiev, 7–11 Sept. 2004. – P. 8–24.
3. *Арансон С. Х., Жужома Е. В., Медведев В. С.* О непрерывности геодезических каркасов потоков на поверхностях // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 7. – С. 3–22.
4. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем) // Мат. сб. – 1973. – **90(132)**, № 3. – С. 372–401.
5. *Білун С. В., Пришляк О. О.* Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Математика. Механіка. – 2002. – № 8. – С. 77–81.
6. *Будницька Н. В., Пришляк О. О.* Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених орієнтованих поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Математика. Механіка. – 2008. – № 19. – С. 36–38.
7. *Будницька Н. В.* Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених неорієнтованих поверхнях // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 2. – С. 155–167.
8. *Будницька Н. В., Пришляк О. О.* Еквівалентність замкнених 1-форм на поверхнях з краєм // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1455–1472.
9. *Будницька Н. В.* Реалізація замкненої 1-форми з замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. наук. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 2. – С. 340–348.
10. *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface // Topology and Appl. – 2002. – № 119. – P. 257–267.

Одержано 22.09.10,
після доопрацювання — 27.02.12