В. С. Королюк, А. В. Скороход

Исследования по теории вероятностей в Институте математики АН УССР за пятьдесят лет

Развитие исследований по теории вероятностей и математической статистике в Институте математики АН УССР можно разделить на два периода. Первый,— довоенный период, связан с именами таких выдающихся ученых, как М. Ф. Кравчук, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов.

Из многогранного творческого наследия М. Ф. Кравчука можно выделить работы, посвященные изучению ортогональных многочленов, соответствующих дискретным вероятностным распределениям, и приложениям метода моментов в математической статистике. Фундаментальные работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по изучению динамических систем, подверженных случайным воздействиям, послужили впоследствии исходным пунктом для развития целого ряда направлений теории случайных процессов и прежде всего теории стохастических дифференциальных уравнений — одного из ведущих направлений исследований в институте в настоящее время.

Начало второго периода следует отнести к 1945 г., когда в составе Львовского филиала АН УССР под руководством Б. В. Гнеденко был создан отдел теории вероятностей и математической статистики Института математики АН УССР, основные направления исследований которого были связаны с изучением свойств вариационного ряда и предельными теоремами для сумм независимых случайных величин. Исследования по локальным предельным теоремам проводились О. С. Парасюком, Е. Л. Рвачевой и другими и применялись для решения задач статистической механики и физики.

Развитие теоретико-вероятностных исследований в Киеве получило мощный импульс в 1949 г., когда в Институте математики АН УССР был создан отдел теории вероятностей и математической статистики во главе с Б. В. Гнеденко. С этого времени начинаются интенсивные исследования по непараметрическим задачам математической статистики (В. С. Королюк, В. С. Михалевич, Е. Л. Рвачева и др.) и по теории массового обслуживания (Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко и др.).

Значительным событием этого периода следует считать выход в свет в 1949 году учебника Б. В. Гнеденко «Курс теорії імовірностей», русский перевод которого долгие годы был основным руководством по курсу теории вероятностей в Советском Союзе.

К началу 60-х годов сформировалась киевская теоретико-вероятностная школа с центром в Институте математики, впоследствии получившая широкое международное признание. Основные направления по теории вероятностей, развиваемые в институте, следующие: теория стохастических дифференциальных уравнений, марковские и ветвящиеся процессы, граничные задачи для случайных процессов, полумарковские процессы и их приложения, распределения в бесконечномерных пространствах и статистика случайных процессов, эволюционные случайные семейства.

1. Стохастические дифференциальные уравнения. Термин «стохастические дифференциальные уравнения» принадлежит С. Н. Бернштейну, который, однако, не строил траекторий процесса, а рассматривал лишь некоторые конечно-разностные схемы для получения последовательности цепей Маркова и изучал условия, при которых одномерные распределения этих цепей сходятся к решению уравнения Фоккера—Планка (1934). В 1939 г. Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов исследовали предельное поведение динамической системы, которая находилась под воздействием случайной силы, переходящей в пределе в «белый шум». Однако предельный переход в этой работе строго обоснован не был. Соответствующее обоснование было сделано в 1941 г. И. И. Гихманом. В конце 40-х годов И. И. Гихман ввел общее определение стохастического дифференциального уравнения, доказал теоремы существования и единственности решения, показал дифференцируемость решения по начальным данным, что позволило ему вывести обратное уравнение Колмогорова для вероятности перехода. Примерно в то же время японский математик К. Ито создал теорию стохастических дифференциальных уравнений, основанную на понятии стохастического интеграла. Им получены теоремы существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений в предположении, что коэффициенты удовлетворяют условию Липшица по пространственной переменной.

Дальнейший прогресс в теории стохастических дифференциальных уравнений связан с попытками найти возможно более широкие условия на коэффициенты уравнения, обеспечивающие существование и единственность решения. В 1961 г. (А. В. Скороход) доказано существование решения в предположении, что коэффициенты уравнения лишь непрерывны. В одномерном случае им была доказана весьма тонкая теорема единственности решения стохастического дифференциального уравнения в предположении, что коэффициент диффузии удовлетворяет условию Гельдера с показателем, большим 1/2 (в дальнейшем эта теорема уточнялась рядом советских и японских математиков). В начале 60-х годов (А. В. Скороход) указаны стохастические дифференциальные уравнения для процессов с границами и найдены условия существования и единственности решений таких уравнений. Цикл работ А. В. Скорохода посвящен проблеме существования сильных решений стохастических дифференциальных уравнений, общей проблеме мартингалов, уравнениям в бесконечномерных пространствах, уравнениям в сложных фазовых пространствах, предельному переходу от последовательности цепей Маркова к решениям стохастических дифференциальных уравнений, проблеме дифференцируемости мер, соответствующих решениям различных уравнений, проблеме управления системами, находящимися под воздействием случайных сил, и др. Ряд работ, выполненных в институте, относится к проблеме существования и единственности решения стохастических дифференциальных уравнений с локально неограниченными и обобщенными коэффициентами (Н. И. Портенко), к проблеме устойчивости решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами (Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко).

2. Марковские процессы. Теория марковских процессов — одно из основных направлений исследований в вероятностных отделах Института математики АН УССР. Исторически первым крупным успехом был результат (А. В. Скороход) о том, что (при слабых дополнительных ограничениях) непрерывный однородный строго марковский процесс в конечномерном пространстве после случайной замены времени и взаимнооднозначного преобразования фазы становится квазидиффузионным. Эти идеи А. В. Скороход применил к однородным марковским процессам без разрывов второго рода и установил их локальную безграничную делимость. Затем он дал полное описание способов возвращения однородных процессов Маркова со значениями в локально компактном пространстве после момента выхода из всех компактов. В дальнейшем (И. И. Ежов и А. В. Скороход) построена общая теория марковских процессов, однородных по второй компоненте, которая имеет разнообразные применения в теории массового обслуживания.

Н. И. Портенко детально изучил однородные марковские диффузионные процессы, коэффициент переноса которых есть обобщенная функция.

В. М. Шуренков описал решения уравнения Колмогорова в классе непрерывных по времени неоднородных переходных функций. Им же были указаны краевые условия для полунепрерывных процессов с независимыми приращениями на полуоси и доказана соответствующая эргодическая теорема.

В результате совместной деятельности А. В. Скорохода, И. И. Ежова и В. М. Шуренкова детально исследована эргодичность случайных процессов с вложенными однородными цепями Маркова.

3. Ветвящиеся процессы. В работах сотрудников института получила дальнейшее развитие теория ветвящихся случайных процессов и их модификаций. Ветвящиеся процессы с непрерывным фазовым пространством изучались в работах А. В. Скорохода и В. М. Шуренкова, в которых описаны инфинитезимальные характеристики процессов, установлена связь между переходными явлениями в ветвящихся процессах и их сходимостью к процессам с непрерывным фазовым пространством. В. М. Шуренковым изучена также сходимость близких к критическим ветвящихся процессов с зависимыми от возраста превращениями. Ветвящиеся процессы с груповым ветвлением исследованы И. И. Ежовым. В работах Р. В. Бойко изучены ветвящиеся процессы с переменным режимом ветвления, описывающие развитие популяций в активных средах, оказывающих стимулирующее или лимитирующее воздействие на интенсивности превращения частиц.

4. Граничные задачи для случайных процессов. Исследование граничных задач для случайных блужданий, описываемых однородными процессами с независимыми приращениями, занимает значительное место в работах украинских вероятностников. Исторически такие задачи возникли в теории систем обслуживания, теории надежности, теории управления запасами, теории порядковых статистик, в связи с задачами страхования и т. д. После того как прикладные постановки задач были сформулированы в виде граничных задач для случайных блужданий, возникла классификация таких задач и были созданы новые аналитические методы их исследования, основанные на факторизационных тождествах для производящих и характеристических функций. Была изучена связь между канонической и безгранично делимой факторизацией кумулянты безгранично делимых распределений, получены факторизационные соотношения, устанавливающие связь между распределениями однородного процесса с независимыми приращениями и его основными функционалами.

Факторизационная методика изучения граничных задач позволила продвинуться в изучении не только непрерывных функционалов в топологии Скорохода, но и таких функционалов, как время пребывания над произвольным уровнем и момент первого достижения экстремальных значений, не обладающих свойством непрерывности в указанной топологии (В. С. Королюк, Д. В. Гусак).

Для решения граничных задач случайных блужданий, описываемых полунепрерывными однородными процессами с независимыми приращениями, предложен и развит метод потенциала. Построены и изучены аналитические свойства потенциала и резольвенты таких процессов на полуоси, что позволило с их помощью единообразно решить различные граничные задачи, в том числе о разорении на отрезке, граничные задачи с отражающим или задерживающим экранами. Наличие хороших асимптотических свойств потенциала и резольвенты позволило получить ряд новых предельных теорем и асимптотические разложения для распределений граничных функционалов при возрастании уровня до бесконечности (В. С. Королюк, В. М. Шуренков и др.).

Использование формулы Ито преобразования стохастического интеграла привело к значительному обобщению принципа инвариантности М. Донскера и установлению предельных теорем для аддитивных функционалов от последовательности нормированных сумм независимых случайных величин в случае, когда последовательность функционалов сходится лишь в обобщенном (интегральном) смысле.

Эта техника позволила в дальнейшем установить ряд предельных теорем для аддитивных функционалов от случайных блужданий, а также для аддитивных функционалов от броуновского процесса (А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк).

5. Полумарковские процессы и их приложения. Исследования по теории полумарковских процессов (начатые в Советском Союзе в 1965 г.) стимулировались не только теоретическим интересом к этому новому классу случайных процессов, в определенном смысле обобщающему класс скачкообразных марковских процессов, но и их прикладной значимостью, связанной, в частности, с задачами теории массового обслуживания, теории надежности, теории стохастических автоматов и др.

В 1965 г. решена (В. С. Королюк) основная для таких приложений задача об определении среднего времени пребывания полумарковского процесса в фиксированной области фазового пространства. Дальнейшие исследования были связаны с асимптотическим анализом распределений различных функционалов от полумарковских процессов, для чего был развит новый аналитический подход, основанный на теории обращения линейных операторов, возмущенных на спектре. Привлечение идей и методов функционального анализа, в частности развитие для этой цели асимптотической теории сингулярно возмущенных полугрупп (В. С. Королюк, А Ф. Турбин) позволило в дальнейшем значительно расширить классы марковских и полумарковских процессов, для которых оказалось возможным доказать теоремы типа асимптотического фазового укрупнения, установить глубокие связи теории асимптотического фазового укрупнения с проекционными методами статистической механики, методами сокращенного описания в неравновесных задачах статистической физики, рассмотреть ряд задач, связанных с гидродинамическим и квазирелятивистскими приближениями.

В 1978—1981 гг. введен и исследован (В. С. Королюк, А. Ф. Турбин) специальный класс процессов марковского восстановления, описывающих суперпозицию важных классов полумарковских процессов. Рассмотрение таких процессов позволило провести анализ показателей надежности многих восстанавливаемых систем без ограничительного условия экспоненциальной распределенности времен безотказной работы элементов, образующих систему. В сочетании с результатами по «существенно многомерным процессам», предложенными И. Н. Коваленко, это ставит общую теорию надежности восстанавливаемых систем на прочную аналитическую базу.

6. Распределения в бесконечномерных пространствах. Исследования по теории вероятностных мер в бесконечномерных пространствах, проводимые сотрудниками Института математики АН УССР, восходят к работам Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова. В цикле работ, выполненном в конце 30-х годов и посвященном теории меры в нелинейной механике, заложены основы эргодической теории в общих метрических пространствах. Существенное развитие теория вероятностных мер в бесконечномерных пространствах получила в работах А. В. Скорохода. Так, была развита теория квазиинвариантных мер в гильбертовых пространствах, в которой установлены наиболее общие условия абсолютной непрерывности мер при нелинейных преобразованиях и приведен вид плотностей. Построена теория поверхностных интегралов и получена формула Грина в гильбертовом пространстве. Построена общая теория интегрирования в гильбертовых пространствах. Исследования А. В. Скорохода в области гауссовских мер получили широкое приложение в статистике случайных процессов.

В работах Г. Н. Сытой получена асимптотическая формула для гауссовской меры малой сферы в гильбертовом пространстве, которая в дальнейшем была использована рядом авторов при изучении свойств выборочных функций случайных процессов и в статистике случайных процессов. Установлена также асимптотическая эквивалентность гауссовских мер малых сфер при допустимых сдвигах в различных метриках. В работах В. В. Булдыгина изучены условия сходимости случайных элементов в линейных топологических пространствах и, в частности, развита теория бесконечных сверток вероятностных мер в таких пространствах.

7. Эволюционные случайные семейства. Изучение указанных семейств представляет собой новое направление в теории случайных процессов, заложенное работами сотрудников института в последние 20 лет. В 60-е годы (А. В. Скороход) предложен метод описания матричных некоммутационных случайных процессов с независимыми и мультипликативными приращениями с помощью соответствующих классических случайных процессов с независимыми аддитивными приращениями. Эта работа в дальнейшем была развита Г. П. Буцаном, который ввел общее понятие стохастической полугруппы как случайного двупараметрического семейства операторов, удовлетворяющих эволюционному соотношению, и описал важнейшие классы стохастически непрерывных мультипликативных полугрупп. В последующих работах А. В Скорохода, Г. П. Буцана и Т. А. Скороход указанное направление получило дальнейшее развитие; в частности, были описаны полугруппы без условия стохастической непрерывности и исследована сходимость бесконечных произведений независимых случайных операторов.

В настоящее время исследования по теории вероятностей, теории случайных процессов и их приложениям проводятся в институте в отделах теории вероятностей и математической статистики (зав. отделом акад. АН УССР В. С. Королюк), теории случайных процессов (зав. отделом чл.-кор. АН УССР А. В. Скороход), теории надежности вероятностных систем (зав. отделом доктор физ.-мат. наук Г. П. Буцан) и двух специализированных лабораториях (зав. лабораториями доктор физ.-мат. наук И. И. Ежов и доктор физ.-мат. наук А. Ф. Турбин). Научно-исследовательская работа координируется постоянно действующими семинарами (руководители В. С. Королюк и А. В. Скороход).