В. К. Дзядык

Исследования по теории приближений и геометрической теории функций в Институте математики АН УССР за 50 лет

По исследованиям в области теории функций математики Советского Союза занимали и занимают ведущее место в мировой науке. Фундамент для этих исследований в нашей стране был заложен еще в трудах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, Д. Ф. Егорова и др. После революции они возглавились известными во всем мире учеными Н. Н. Лузиным, С. Н. Бернштейном, А. Н. Колмогоровым, М. А. Лаврентьевым, С. М. Никольским, М. В. Келдышем и др.

Исследования по теории функций в Институте математики АН УССР в большой мере продолжают и существенно развивают исследования отмеченных ученых. Можно выделить три основных направления в теории функций, по которым ученые института достигли наиболее существенных результатов: теория приближений, геометрическая теория функций, аппроксимационные методы в других разделах математики.

1. Теория приближений. Е. Я Ремез в начале 30-х годов разработал и теоретически обосновал численный алгоритм, позволяющий для любой непрерывной функции эффективно строить со сколь угодно большой точностью полиномы ее наилучшего чебышевского приближения. Этот алгоритм известен в литературе как алгоритм Ремеза и используется в практике как в нашей стране, так и за рубежом. Впоследствии был построен алгоритм для рационального приближения непрерывных функций на конечном отрезке.

На развитие исследований по теории приближений на Украине и, в частности, в Институте математики, очень большое влияние оказали идеи и работы С. М. Никольского. В послевоенное время наиболее важные результаты в этой теории получены в научных школах, созданных его учениками В. К. Дзядыком и Н. П. Корнейчуком.

В результате исследований, проведенных в 1947—1958 гг. С. М. Никольским, В. К. Дзядыком и др., установлена (в отличных от периодического случая терминах) конструктивная характеристика непериодических функций, столь же завершенная, как и конструктивная характеристика периодических функций, установленная Д. Джексоном, С. Н. Бернштейном, Ш.-Ж. Валле-Пуссеном, А. Зигмундом и др. В. К. Дзядыком в 60 — 70-х гг. установлена конструктивная характеристика функций на широком классе множеств комплексной плоскости. Следует отметить, что благодаря этим результатам выяснилась, в частности, природа конструктивных характеристик в периодическом и непериодическом случаях.

С целью получения прямых теорем В. К. Дзядыком разработаны операции обобщенного поворота и обобщенного растяжения, на произвольных замкнутых спрямляемых жордановых кривых построена свертка двух функций. Построены важные многочисленные ядра с мероморфными коэффициентами, которые очень хорошо аппроксимируют ядро Коши. Для кусочно-гладких множеств с некоторыми ограничениями получены обратные теоремы полиномиального приближения функций комплексного переменного и для этого в терминах расстояния от граничных точек до линии уровня установлены оценки производной от многочлена.

В институте получили значительное развитие исследования по экстремальным задачам теории приближений. Речь идет об отыскании верхних граней погрешностей на классах функций, а также о построении для данного класса функций наилучшего (в том или ином смысле) аппарата приближения. Из результатов по этой проблематике отметим следующие.

Н. П. Корнейчук разработал эффективный метод решения экстремальных задач наилучшего приближения, базирующийся на теоремах двойственности и использовании аппарата перестановок. Этот метод позволил, в частности, найти точные верхние грани наилучших приближений полиномами и сплайнами на классах функций, задаваемых с помощью модуля непрерывности. Найдены точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения полиномами и сплайнами в равномерной и интегральной метриках, вычислены поперечники (как колмогоровские, так и линейные) классов непрерывных и дифференцируемых функций в пространствах C и L_p.

Рассмотрены задачи оптимального восстановления функций и линейных функционалов по дискретной информации и установлено, что аппарат интерполяционных сплайнов позволяет в ряде важных ситуаций с наименьшей погрешностью восстановить функцию (а иногда и ее производную) по значениям в отдельных точках (Н. П. Корнейчук). Получен ряд окончательных результатов в задачах интерполирования сплайнами кривых и поверхностей (Н. А. Назаренко).

В. К. Дзядык установил, что если $(A)_c$ — класс абсолютно монотонных на $(-\infty, c)$ и суммируемых на $(c-2\pi, c)$ функций, то при любых $\varphi_1(x)\in(A)_{2\pi}$ и $\varphi_2(-x)\in(A)_0$ всякое трансцендентное уравнение вида $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)-\sum\limits_{j=0}^{n}(a_j\cos jx+b_j\sin jx)=0$ имеет на $[0, 2\pi]$ не более, чем $2n+2$ нуля.

Найдены значения наилучших в среднем приближений функции $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ и ее периодических интегралов любого натурального порядка, а также значения наилучших в среднем приближений абсолютно монотонной и суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции. В частности, полностью решена известная задача Фавара (и ее обобщения) о точных верхних гранях наилучших приближений и соответствующих наилучших линейных методах на классах функций с ограниченной дробной производной.

Усилена классическая теорема Чебышева — Маркова о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля при весе многочленного характера (В. К. Дзядык).

В конце 60-х годов Н. П. Корнейчуком, В. К. Дзядыком и А. И. Степанцом был разработан метод для нахождения асимптотических равенств для верхних граней уклонений полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$, порождаемых Λ-методами суммирования рядов Фурье на классах $W^r H_\omega$, в результате чего были найдены такие равенства для ряда линейных процессов суммирования, и в том числе для классических процессов Рогозинского, Рисса, Бернштейна и др. Позже этот метод был распространен А. И. Степанцом на многомерный случай. Это позволило получить асимптотические равенства для уклонений многомерных прямоугольных сумм Фурье на классах H_ω^N, а также решить подобную задачу в случае кратных сферических сумм Рисса.

В 1983 г. А. И. Степанцом был предложен новый подход к определению классов периодических функций, в основу которого положено разбиение функций на классы в зависимости от скорости убывания к нулю их коэффициентов Фурье. Введенные таким образом классы $\bar{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ при фиксированных значениях их параметров совпадают с хорошо известными классами функций. Такой подход позволил классифицировать широкое множество периодических функций, включая бесконечно дифференцируемые, аналитические и целые функции. Разработана основа теории приближения функций этих классов. В частности, найдена точная асимптотика уклонений сумм Фурье на классах $C_{\beta,\infty}^\Psi$ и $C_\beta^\Psi H_\omega$; получены интегральные представления для соответствующих уклонений $f(\cdot) - U_n(f; \cdot; \Lambda)$; доказаны прямые и обратные теоремы приближения на классах $L_{\beta,p}^\Psi$, $L_\beta^\Psi H_{\omega_p}$; прямые теоремы для классов $C_{\beta,\infty}^\Psi$ и $C_\beta^\Psi H_\omega$ и найдены точные по порядку оценки поперечников по Колмогорову и Александрову.

На произвольном множестве прямой дано конструктивное описание следов функций, гладкость которых (или их производных) характеризуется модулем непрерывности натурального порядка (В. К. Дзядык, И. А. Шевчук). Для таких же классов в многомерном случае получен аналог теоремы Уитни о продолжении (В. Н. Коновалов).

Разработаны новые эффективные методы построения целых функций с заданными асимптотическими свойствами, что в дальнейшем нашло применение в теории представляющих систем (Ю. И. Мельник).

Найдены необходимые и достаточные условия сходимости многомерных сингулярных интегралов в точках Лебега суммируемых функций. Получены точные оценки скорости сходимости рядов Фурье непрерывных функций, выражающиеся через константы Лебега и значения модулей непрерывности в фиксированных точках (В. Т. Гаврилюк).

Получены асимптотические формулы для норм четных тригонометрических полиномов двух переменных (П. В. Задерей).

2. Геометрическая теория функций начала развиваться в Институте математики под влиянием М. А. Лаврентьева, который работал здесь с 1939 по 1950 г.

Еще в 1935 г. М. А. Лаврентьев ввел (одновременно с Л. Альфорсом) одно из основных понятий современной математики — понятие квазиконформного отображения и установил, что для таких отображений сохраняется ряд свойств, которыми обладают конформные отображения. В 1948 г. М. А. Лаврентьев ввел следующее далеко идущее обобщение понятия квазиконформности.

Пусть задана система из двух уравнений (обобщающая систему Коши — Римана) вида

$$F_i(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{1}$$

Тогда гомеоморфное отображение $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ области $D \in \mathbb{R}^2$ на область $\Delta \in \mathbb{R}^\alpha_{uv}$ называется квазиконформным, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют системе (1). Установлено, что при некотором естественном ограничении на функции F_i (так называемое условие эллиптичности) имеет место целый ряд самых важных фактов, присущих теории конформных отображений: теорема существования (аналог теоремы Римана), обобщение принципа Шварца — Линделефа, принцип максимума и др.

П. Ф. Фильчаковым получены важные результаты по эффективному приближенному построению функции Римана, осуществляющей конформное отображение односвязной области на круг, и, в частности, ряд результатов по определению констант в интегралах Кристоффеля — Шварца.

В работах Ю. Ю. Трохимчука развита теория множеств моногенности комплексных функций, на основе которой получены новые критерии голоморфности. Найдено применение теории дифференциальных свойств комплексных функций, а также различных топологических теорем о продолжении внутренних отображений к задаче об устранимости особенностей аналитических функций.

А. В. Бондарь ввел и исследовал новые в многомерном комплексном анализе понятия производных операторов, операторов растяжения и операторов вращения. На этой основе получены теоремы о характеризации голоморфных отображений в терминах локальных геометрических характеристик — операторных аналогов известных в плоском случае свойств постоянства растяжений и консерватизма углов. Исследована в многомерном случае структура множеств моногенности непрерывного отображения, получены критерии голоморфности непрерывных отображений в терминах C-дифференцируемости вдоль пары конусов, находящихся в общем положении в C^n.

На основе использования теории многозначных отображений получены результаты о строении линейно выпуклых компактов в комплексном пространстве, что имеет существенное значение для различных специальных представлений голоморфных функций (Ю. Б. Зелинский).

В. В. Шарко получил существенное развитие конечномерной теории Морса и связанных с ней вопросов стабильной алгебры.

В. К. Дзядык получил простую геометрическую характеристику аналитических и сопряженных к ним функций и ввел понятие k-ужей.

Н. П. Корнейчук разработал геометрические методы решения экстремальных задач теории функций действительного переменного и теории аппроксимации, оказавшиеся эффективными, в частности, при отыскании точных верхних граней наилучших приближений и при вычислении поперечников классов функций.

И. П. Митюк разработал методы исследования, развивающие и уточняющие симметризационные методы Штейнера, Полиа — Сеге, Сеге— Маркуса.

П. М. Тамразов решил важную общую задачу о граничном поведении голоморфных функций. Установил локальную равновесность экстремальных метрик, сформулировал предельную задачу модуля семейств кривых и доказал единственность экстремальной метрики в этой задаче, изучил вопросы непрерывности модулей и единственности экстремальных отображений. Решил экстремальные задачи конформного отображения с многополюсными квадратичными дифференциалами, задачу о конформных искажениях, поставленную Дьюренсм

А. К. Бахтин доказал, что одновременные максимумы модулей двух коэффициентов в известной проблеме о коэффициентах однолистных функций могут достигаться только на функциях Кебе.

П. М. Тамразов решил экстремальную проблему А. А. Гончара о емкостях конденсаторов, для чего создал новый метод в теории потенциала. Н. В. Зорий изучила некоторый пространственный аналог этой задачи.

Обобщая указанные выше обратные теоремы В. К. Дзядыка, П. М. Тамразов совместно с Н. А. Лебедевым установили на произвольном ограниченном континууме оценки производных от полинома и контурные обратные теоремы полиномиального приближения функций. П. М. Тамразов и В. В. Бардзинский получили теоремы приближения нового типа — сильно локальные, решили задачу о локальной конструктивной характеристике функций.

П. М. Тамразов и И. А. Шевчук разработали метод исследования конечно-разностных свойств функций в комплексной плоскости.

В. Ф. Ковалевым и И. П. Мельниченко заложены основы теории алгебр с голоморфными функциями, ассоциированными с важнейшими уравнениями в частных производных в многомерных пространствах.

3. Аппроксимационные методы в других разделах математики. В. К. Дзядыком осуществлен синтез результатов и методов Чебышева в теории аппроксимации с аналитическими ме-

тодами решения дифференциальных уравнений. Им разработаны следующие три аппроксимационные метода приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений: (I) метод применения аппроксимационных операторов к решению задачи Коши (ЗК) и интегральных уравнений; (II) аппроксимационно-итеративный метод решения ЗК с аналитической правой частью и (III) A-метод решения ЗК и краевой задачи для линейных уравнений с многочленными коэффициентами. Эти методы были обобщены на системы уравнений, на основные задачи для уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов, на различные типы нелинейных интегральных уравнений, на уравнения с запаздыванием и др.

Отметим, что эти методы строго обоснованы; получены эффективные очень точные априорные и апостериорные оценки допускаемой погрешности; метод III более точен и применим к значительно более обширному классу задач, чем широко известный (теоретически не обоснованный) численный τ-метод Ланцоша. Отметим также, что, наряду с давно известными методами цепных дробей и Паде-аппроксимаций, при помощи метода III разработаны новые эффективные методы рациональной аппроксимации (на отрезке и в звезде Миттаг — Леффлера). Введена и исследована обобщенная проблема моментов. Полученные по ней результаты обобщают результаты П. Л. Чебышева по классической проблеме моментов.

С. В. Переверзев предложил адаптивный подход к задаче оптимизации численных методов решения интегральных уравнений. Эффективно построены прямые и аппроксимационно-итеративные методы, дающие значительно более высокую точность приближения по сравнению с другими методами.

Таким образом, в Институте математики АН УССР по теории функций получено большое количество важнейших результатов и в целом ряде направлений имеются четкие пути ее дальнейшего развития.