Ю. М. Березанский, В. И. Горбачук

Развитие функционального анализа в Институте математики АН УССР

Функциональный анализ, один из основных разделов современной математики, как отдельная математическая дисциплина возник в начале XX ст. Для его методов характерно объединение классического математического анализа с идеями геометрии и алгебры, нахождение аналогий между, на первый взгляд, далекими теориями и задачами и использование этих аналогий для решения поставленных вопросов.

Первые значительные результаты по функциональному анализу на Украине (и одни из первых в СССР) получили в 1935 — 1937 гг. Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов. Они касались доказательства существования инвариантных мер у динамических систем и изучения совокупности таких мер. Эти результаты сыграли большую роль в развитии общей теории динамических систем и в формировании новых геометрических подходов к решению определенных типов задач. В 30-е годы в области функционального анализа начал работать М. Г. Крейн, который внес фундаментальный вклад в его развитие и создал широко известную школу; М. Г. Крейн работал в Институте математики АН УССР в 1940—1941 и 1944—1951 гг. Под влиянием Н. Н. Боголюбова и М. Г. Крейна над проблемами функционального анализа начали работать математики Киева, Харькова и других городов Украины; сложились математические коллективы соответствующих научных направлений, в частности в Институте математики.

В известной степени на развитие функционального анализа на Украине повлияло и то обстоятельство, что один из его основателей польский математик С. Банах после освобождения Львова вместе с несколькими своими сотрудниками и учениками активно включился в работу советских математиков, в 1940—1941 гг. они работали во Львовском филиале Института математики АН УССР. Кстати, украинский перевод книги С. Банаха «Курс функцiонального аналiзу» (польское название «Теория операций»), изданный в Киеве по инициативе Н. Н. Боголюбова в 1948 г., явился первым учебным пособием по этой дисциплине в нашей стране. В течение ряда лет в институте работали и другие видные специалисты по функциональному анализу и его приложениям (М. А. Красносельский, 1947—1952 гг.; С. Г. Крейн, 1940—1951 гг.; О. С. Парасюк, 1952—1966 гг.; Г. Е. Шилов, 1951—1954 гг.).

Кратко охарактеризуем важнейшие результаты в области функционального анализа и его приложений, полученные в Институте математики АН УССР.

1. Геометрия нормированных пространств и операторы в таких пространствах. В функциональном анализе и его применениях важную роль играют банаховы пространства с заданным фиксированным конусом векторов. Это понятие ввел М. Г. Крейн; вместе с С. Г. Крейном он изучил пространства с конусом и сопряженные с ними (1937—1943 гг.). Для оператора, действующего в банаховом пространстве с конусом, оставляющего конус инвариантным, М. Г. Крейну и М. А. Рутману (Одесса) удалось получить (1938—1948 гг.) ряд результатов, касающихся существования собственных векторов этого оператора и сопряженного с ним и обобщающих соответствующие факты о собственных векторах матриц с неотрицательными элементами. Они тесно связаны с довоенными исследованиями М. Г. Крейна, В. Л. Шмуль-

яна (Одесса) и др., относящимися к выпуклым множествам и слабым топологиям в банаховых пространствах. Здесь в первую очередь следует отметить известную теорему Крейна—Мильмана о крайних точках ограниченного регулярно выпуклого множества в пространстве, сопряженном с банаховым. Эта теорема примыкает к описанным результатам Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова, имеет важные применения и легла в основу многих дальнейших открытий.

2. Общая теория эрмитовых и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Операторы этого типа обобщают понятие эрмитовой матрицы и играют исключительно важную роль в математической физике. В их теории в Институте математики был получен ряд существенных результатов. Так, М. Г. Крейном (1944—1948 гг.) описаны все полуограниченные самосопряженные расширения полуограниченного эрмитова оператора, нижняя грань которых не меньше, чем у исходного, а также дано конструктивное описание обобщенных резольвент эрмитова оператора с равными конечными дефектными числами. Им же в эти годы рассмотрен важный класс так называемых целых операторов. Сюда, в частности, входят операторы, фигурирующие в таких классических задачах, как степенная проблема моментов и проблема продолжения положительно определенных функций (неопределенные случаи), проблема Неванлинны—Пика и др. На целые операторы удалось перенести многие конструкции, свойственные проблеме моментов, и благодаря этому дать единый операторный подход к решению перечисленных выше задач и их операторных обобщений. Заметим, что при построении теории целых операторов М. Г. Крейном были использованы как чисто операторные методы, так и методы теории аналитических функций. Их соединение привело не только к возникновению нового направления в теории операторов, но и к постановке и решению новых оригинальных задач в теории аналитических функций.

Указанные результаты по теории расширений относились к эрмитовым операторам с плотной областью определения. М. А. Красносельский (1947 г.) изучил расширения неплотно заданных эрмитовых операторов. Он установил, что каждый такой оператор допускает эрмитовы расширения с плотной областью определения, и выяснил, когда среди таких расширений существуют максимальные. К этому же времени относится важная теорема об инвариантности дефектных чисел произвольного оператора, установленная М. Г. Крейном и М. А. Красносельским.

Построение разложений по собственным функциям самосопряженных операторов на основании общей спектральной теоремы всегда вызывало трудности, которые в каждом конкретном случае так или иначе преодолевались. Первый общий подход к этому вопросу (так называемый метод направляющих функционалов) разработал в 1946 г. М. Г. Крейн для операторов с конечнократным спектром. Таким образом появилась возможность получить единообразно разложения по собственным функциям самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов произвольного порядка. В 1956 г. Ю. М. Березанский на основании идеи работы И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко (Москва, 1955 г.) развил общий подход к теории разложений для самосопряженных операторов, действующих в функциональных гильбертовых пространствах, который позволил строить разложения по собственным функциям дифференциальных операторов с частными производными вплоть до границы области, изучить характер роста собственных функций, рассмотреть ряд других операторов математической физики и т. п. В течение ближайших нескольких лет этот подход был распространен Г. И. Кацем и Ю. М. Березанским на абстрактные гильбертовы пространства, вследствие чего теория разложений по обобщенным собственным векторам произвольного самосопряженного оператора приобрела весьма законченный вид. В дальнейшем эти результаты были обобщены Ю. М. Березанским на произвольные семейства коммутирующих нормальных операторов (теперь спектральные интегралы пишутся в виде континуальных интегралов по пространству собственных значений, отвечающих совместным обобщенным собственным векторам семейства). Следствием этого явилось получение им же в 1977—1984 гг. широких обобщений спектральных представлений для семейств коммутирующих операторов, связанных соотношениями (теоремы типа Стоуна, С. Надя — Хилле и др.). Подобные вопросы спектральной теории семейств самосопряженных операторов, не коммутирующих, а связанных определенными перестановочными соотношениями (например, антикоммутирующих, образующих некоторую алгебру Ли и т. п.), рассмотрены Ю. С. Самойленко. Здесь также удалось в ряде случаев получить спектральные представления.

Другой цикл исследований, относящихся к общей теории операторов, составляет обобщение теории рассеяния на тот случай, когда исходный оператор возмущается таким образом, что полученное выражение нельзя интерпретировать как оператор (например, возмущение потенциалом, являющимся δ-функцией). Такая ситуация постоянно возникает, в частности, в квантовой теории поля, при этом, как правило, возмущенное выражение можно рассматривать как билинейный функционал. В. Д. Кошманенко (1974—1984 гг.) развита общая теория рассеяния в терминах билинейных функционалов, объясняющая ряд закономерностей, наблюдаемых при специальных построениях теории рассеяния в конкретных случаях такого рода. Попутно установлена связь между незамыкаемыми (сингулярными) билинейными формами и расширениями эрмитовых операторов. Получены условия, достаточные для того, чтобы возмущение самосопряженного оператора сингулярной билинейной формой порождало новый самосопряженный оператор в том же или более широком пространстве.

Заметим, наконец, что многие задачи анализа и теории дифференциальных уравнений также не всегда можно записать в операторной форме — зато их можно записать, и это даже более естественно, с помощью линейного (бинарного) отношения — обобщения линейного оператора. В последнее время развитию теории таких отношений уделяется много внимания как у нас, так и за рубежом. М. Л. Горбачуком и его учениками описаны все максимальные диссипативные линейные отношения в гильбертовом пространстве, которые содержат в себе самосопряженные бинарные отношения, описанные ранее Ф. С. Рофе-Бекетовым (Харьков). Это описание послужило отправным пунктом для построения А. Н. Кочубеем и В. А. Михайлецом теории расширений эрмитовых и других классов операторов в терминах абстрактных граничных условий, приспособленной к теории граничных задач для дифференциальных уравнений.

3. Несамосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Многие задачи, встречающиеся в теории дифференциальных уравнений и в механике, приводят к необходимости установления n-кратной полноты корневых векторов операторнозначных функций $f(\lambda)$, аналитически зависящих от спектрального параметра λ. Первые основополагающие результаты в этом направлении были получены М. В. Келдышем (Москва) в 1951 г. и относились к тому случаю, когда (λ) — операторнозначный полином от λ (так называемый пучок Келдыша); они давали возможность использовать метод разделения переменных при решении задачи Коши для операторно-дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие эти результаты получили в работах М. Г. Крейна и его учеников, в которых детально изучены вопросы полноты и базисности части корневых векторов квадратичных пучков самосопряженных операторов, благодаря чему разделение переменных стало применимым и при решении некоторого класса граничных задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси.

Исследования М. В. Келдыша и М. Г. Крейна были продолжены в 1974—1984 гг. Г. В. Радзиевским, который ввел понятие производной цепочки для оператор-функции $f(\lambda)$, установил общие признаки ее полноты и базисности в случае полиномиального пучка. Это открыло возможность для применения метода разделения переменных при решении более общих краевых задач для уравнений произвольного порядка. Им же доказана n-кратная полнота с точностью до конечномерного подпространства корневых векторов пучка Келдыша, возмущенного аналитической вне круга оператор-функцией. Для полиномиальных пучков Г. В. Радзиевский также получил новые признаки кратной полноты как всех, так и части корневых векторов, исследовал вопросы их базисности и минимальности.

В Институте математики рассматривались и некоторые другие вопросы, касающиеся общих несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, например: построение операционного исчисления для неаналитических классов функций от несамосопряженных операторов со спектром, расположенным на вещественной оси, и определенным поведением резольвенты — эти классы определяются порядком роста последней при приближении к спектру (Ю. М. Березанский, В. И. Горбачук); нахождение условий полноты и базисности системы собственных и присоединенных векторов различных несамосопряженных задач как для дифференциальных уравнений эллиптического типа, так и для операторно-дифференциальных уравнений (В. А. Михайлец, М. Л. Горбачук).

4. Теория непрерывных групп и нормированные алгебры. В Институте математики АН УССР получены существенные результаты по гармоническому анализу на группах. Так, в 1941 г. М. Г. Крейн доказал теорему Планшереля для коммутативной локально компактной группы, в 1940—1950 гг. исследовал положительно определенные ядра, заданные на группе или на многообразии, где группа действует, и дал их интегральные представления через элементарные ядра. Он же в 1949 г. изучил двойственный объект к компактной некоммутативной группе (в коммутативном случае этот объект превращается в группу характеров). В. М. Глушков, работавший в институте в 1956—1957 гг., рассмотрел непрерывные группы в более алгебраическом аспекте и получил ряд важных результатов, касающихся пятой проблемы Гильберта относительно структуры некоммутативных локально компактных групп.

К этим вопросам примыкает построение Ю. М. Березанским и С. Г. Крейном в 1950—1957 гг. общей теории коммутативных гиперкомплексных систем с локально компактным базисом, обобщающих понятие группового кольца группы. На такие системы им удалось перенести ряд фактов гармонического анализа. В последние годы Ю. М. Березанский вместе с А. А. Калюжным и Л. И. Вайнерманом возвратился к этой тематике в связи с возобновлением интереса к подобным построениям в особенности за рубежом. В Институте математики изучались и другие вопросы, связанные с нею: строился (В. Г. Палюткин) некоммутативный гармонический анализ в кольцевых группах, введенных Г. И. Кацем в результате развития указанных выше исследований М. Г. Крейна двойственных объектов как естественного обобщения локально компактных групп; исследовались представления бесконечномерных групп, групп и алгебр токов (Ю. С. Самойленко) и т. п.

Упомянутые результаты тесно связаны с общей теорией топологических, в частности нормированных, алгебр, тоже развивавшейся в институте. Так, Г. Е. Шилов в 1953 г. решил одну из проблем теории нормированных алгебр первостепенного значения — доказал, что алгебра с несвязным множеством максимальных идеалов разлагается в прямую сумму идеалов. В 1951—1952 гг. он дал также общую конструкцию для построения важного класса однородных алгебр функций на коммутативной группе из примарных алгебр и детально изучил некоторые примеры групп.

5. Спектральная теория дифференциальных операторов. В 1946—1950 гг. М. Г. Крейн методом направляющих функционалов получил общие теоремы о разложении по собственным функциям самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов, а в 1956—1965 гг. Ю. М. Березанский при помощи развитой им теории разложений доказал подобные теоремы в случае частных производных, причем для эллиптических операторов — вплоть до границы области.

М. Г. Крейн (1947 г.) на основании построенной им теории расширений операторов дал полное описание в терминах граничных условий всех самосопряженных расширений минимального обыкновенного дифференциального оператора и изучил структуру их спектра. В 1950 г. он перенес на операторы Штурма — Лиувилля на полуоси результаты Неванлинны относительно описания всех спектральных функций в теории якобиевых матриц и проблеме моментов, использовав при этом общие идеи теории целых операторов.

Ю. М. Березанский начиная с 1965 г. разработал некоторые приемы доказательства самосопряженности операторов и с их помощью получил ряд условий самосопряженности для эллиптических операторов. В последние годы он вместе со своими учениками Г. Ф. Усом, Ю. Г. Кондратьевым и В. Г. Самойленко развил спектральную теорию эллиптических операторов с бесконечным числом переменных, моделирующих гамильтонианы квантовой теории поля, и на них перенес многие из упомянутых выше результатов. К этому же направлению относятся исследование Л. П. Нижником спектральных свойств неэллиптических операторов с частными производными (самосопряженность, характер спектра и т. п.) и оценки Ю. М. Березанского, Г. И. Каца и А. Г. Костюченко и Ю. Б. Орочко роста на бесконечности собственных функций оператора Шредингера.

Начало систематическому изучению дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с ограниченными операторными коэффициентами было положено в 1947—1948 гг. М. Г. Крейном. Основное внимание при этом уделялось вопросам устойчивости. В 1950—1951 гг. на такие уравнения были перенесены (Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн) асимптотические методы интегрирования, восходящие в своих истоках к работам Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова. В дальнейшем они были развиты Ю. Л. Далецким и для уравнений с неограниченными операторами. В 1949 г. Н. Н. Боголюбов совместно с Б. И. Хацетом свел математическое описание равновесного состояния бесконечных систем классической статистической механики к задаче о разрешимости операторного уравнения в банаховом пространстве (пространстве функций распределения), которая в 1969 г. была решена ими и Д. Я. Петри́ной для случая малых плотностей. Эволюция же неравновесной системы описывается дифференциальным уравнением в банаховом пространстве с неограниченным оператором (цепочка Боголюбова). Д. Я. Петри́на вместе с учениками детально исследовал задачу Коши для этого уравнения в различных функциональных пространствах. С 1968 г. в Институте математики АН УССР развивается спектральная теория граничных задач для дифференциальных уравнений, коэффициентами которых служат также неограниченные операторы в гильбертовом пространстве. Заметим, что наличие неограниченных операторов в коэффициентах позволяет включить в рассмотрение самые разные классы уравнений с частными производными и взглянуть с единой точки зрения как на обыкновенные дифференциальные операторы, так и на операторы с частными производными.

В 1970 г. М. Л. Горбачуком были описаны в терминах граничных условий все самосопряженные расширения минимального оператора, порожденного выражением Штурма — Лиувилля с потенциалом, принимающим значения в множестве самосопряженных операторов. Вместе с В. И. Горбачук он в 1968—1974 гг. выяснил структуру спектра граничных задач, соответствующих этим расширениям, а в гиперболическом случае получил разложение по собственным функциям, подобное разложению Г. Вейля для обычного уравнения Штурма — Лиувилля. М. Л. Горбачуком и его учениками исследованы и другие типы граничных задач (диссипативные, секториальные, разрешимые и т. п.). Резольвентной сравнимости различных граничных задач на полуоси, имеющей прямое отношение к задачам рассеяния, посвящено несколько работ В. А. Кутового. Установлением критериев самосопряженности минимального оператора занимались Ю. Б. Орочко и М. Л. Горбачук.

В 1975—1983 гг. В. И. Горбачук и М. Л. Горбачуком была построена теория граничных значений решений операторно-дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типов, содержащая, в частности, теорию граничных значений аналитических функций. С помощью этой теории удалось найти максимальные классы начальных или краевых данных, естественных для корректной постановки задачи Коши или Дирихле.

В институте был решен также ряд других вопросов спектральной теории дифференциальных операторов. Так, В. И. Горбачук и В. А. Михайлецом рассмотрены самосопряженные операторы L, порожденные общим эллиптическим дифференциальным выражением $\mathcal{L}$ порядка $2m$ в ограниченной подобласти $\mathbb{R}^N$ и произвольными граничными условиями. Исследована связь между этими условиями и спектром оператора. Получены критерии дискретности спектра, справедливости для L предписанных $\mathcal{L}$ асимптотических формул, характеризующих распределение спектра. Граничные задачи для выражения $\mathcal{L}$ со спектральным параметром, линейно входящим в граничные условия, рассматривались В. В. Барковским. Были затронуты вопросы разложения по собственным функциям появляющихся здесь операторов, даны условия их самосопряженности, изучена соответствующая задача рассеяния. В том случае, когда спектральный параметр входит в граничные условия достаточно общим образом, В. Г. Палюткиным развит аналитический подход к получению асимптотических формул, характеризующих распределение собственных значений граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси.

Выше мы касались лишь прямой задачи спектрального анализа. Об обратной задаче см. п. 7.

6. Проблема моментов, положительно определенные функции и спектральная теория разностных уравнений. Классическая проблема моментов была одной из тех задач, решение которой привело к становлению целых направлений в функциональном анализе. На возникновение таких направлений особенно повлияли работы М. Г. Крейна, Н. И. Ахиезера (Харьков) и М. П. Кравчука, работавшего в институте в 1934—1938 гг. Наряду с упоминавшимися в п. 2 результатами отметим следующие исследования, связанные с этой проблемой.

В 1940—1951 гг. М. Г. Крейн доказал теорему о возможности продолжения положительно определенной функции с интервала на всю ось, описал все такие продолжения и построил общую теорию интегральных представлений положительно определенных ядер через собственные функции обыкновенных дифференциальных операторов, частными следствиями которой явились известные теоремы С. Бохнера об интегральном представлении положительно определенной функции, С. Н. Бернштейна о представлении экспоненциально выпуклой функции и др. Аналогичные вопросы для эрмитово-индефинитных ядер с конечным числом отрицательных квадратов рассмотрела В. И. Горбачук. Теорию представлений положительно определенных ядер, зависящих от многих переменных, через собственные функции уравнений с частными производными развил Ю. М. Березанский в 1956—1965 гг., а затем, в 1967—1972 гг., распространил ее и на случай бесконечного числа переменных (обобщив, например, теорему Минлоса — Сазонова на слой гильбертова пространства).

Известно, что проблему моментов можно интерпретировать как теорию якобиевых матриц, т. е. как спектральную теорию разностных уравнений второго порядка на полуоси. В связи с этим М. Г. Крейн в 1949 г. построил подобную теорию для обыкновенных разностных уравнений высокого порядка, а Ю. М. Березанский в 1953—1955 гг.—для уравнений с частными разностями. В дальнейшем Ю. М. Березанским и его учениками, в частности Ю. С. Самойленко и М. Л. Горбачуком, были рассмотрены различные операторные обобщения этих и близких теорий: бесконечномерная и некоммутативная проблемы моментов, теория операторнозначных положительно определенных ядер.

Среди других результатов, примыкающих к указанным выше, отметим исследование С. Г. Крейном и Б. Я. Левиным (Харьков) с сотрудниками сходимости сингулярных интегралов методами функционального анализа; здесь им удалось получить завершающие результаты.

7. Обратные задачи. Под такими задачами понимают задачи определения уравнений (их коэффициентов) по некоторой информации об их решениях. Различают обратные задачи в спектральной постановке, когда исходной информацией является спектральная функция, совокуп-

ность спектров уравнений с различными граничными условиями (обратная задача по двум спектрам для уравнения Штурма — Лиувилля) или другая спектральная информация, и обратные задачи рассеяния — когда исходной информацией служат данные рассеяния, определяемые асимптотикой решений на бесконечности.

Хорошо известными стали нашедшие применение в физике результаты по обратным задачам в спектральной постановке для уравнения Штурма — Лиувилля и более общего уравнения струны. Различные варианты таких задач и разными методами были решены в работах 1951—1960 гг. В. А. Марченко (Харьков), М. Г. Крейна, И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана (Москва), при этом в подходе М. Г. Крейна использовался аппарат, развитый им в исследованиях по проблеме моментов, задаче продолжения положительно определенных функций и т. п., выполненных в Институте математики.

Первым, кто рассмотрел обратные задачи для уравнений с частными производными и частными разностями, был Ю. М. Березанский (1953—1958 гг.). В случае частных разностей он дал полное решение задачи в спектральной постановке; затем его учениками исследовались также обратные задачи рассеяния. Для уравнений в частных производных—для стационарного 2- и 3-мерного уравнения Шредингера — им был указан ряд постановок обратной задачи. Показано, что потенциал однозначно восстанавливается заданием спектральной функции на сколь угодно малом куске границы. Аналогичный результат имеет место и во всем пространстве; здесь установлена также эквивалентность нескольких постановок обратных задач, включая обратные задачи рассеяния.

В 1960 г. Л. П. Нижник начал изучать прямые и обратные задачи нестационарного рассеяния. Им подробно исследованы такие обратные задачи для возмущенного уравнения струны на полуоси (1971 г.) и нестационарной системы уравнений Дирака (1970—1973 гг.). Доказано, что по оператору рассеяния однозначно восстанавливаются коэффициенты уравнений, даны эффективная процедура такого восстановления и полное описание операторов рассеяния. Позже Л. П. Нижник и его ученики Фам Лой Ву, В. Г. Тарасов и др. значительно расширили класс изученных многомерных обратных задач рассеяния (волновое уравнение на всей оси и в 3-мерном пространстве, система двухскоростных волновых уравнений, уравнение переноса, конечная и континуальная системы гиперболических уравнений и др.), были даны применения к интегрированию нелинейных уравнений.

8. Обобщенные функции и их применение к задачам для уравнений с частными производными. Известно, какую огромную роль в математике последних десятилетий сыграла теория обобщенных функций — раздел функционального анализа, возникший благодаря работам С. Л. Соболева (Новосибирск) и Л. Шварца (Франция). Институтом математики также внесен заметный вклад в этом направлении. Здесь нельзя не упомянуть цикла замечательных работ 1950—1960 гг. Я. Б. Лопатинского (работал в институте в 1946—1963 гг.) по фундаментальным решениям и общей теории граничных задач для систем эллиптических дифференциальных уравнений, послуживших началом дальнейших исследований в этой области, в частности применения обобщенных функций (изученная им структура фундаментальной матрицы стала основой для доказательства того, что всякое обобщенное решение эллиптического уравнения является обычным и его гладкость определяется гладкостью коэффициентов).

В 50-х годах Г. Е. Шилов и И. М. Гельфанд (Москва) ввели новые пространства основных и обобщенных функций и, используя их, построили классы единственности и корректности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Затем Н. Н. Чаусом (1964—1984 гг.) эти классы были существенно уточнены; были разработаны новые подходы к их нахождению для определенного класса систем с переменными коэффициентами, исследованы вопросы асимптотической единственности, даны применения к интегральным представлениям положительно определенных ядер и т. п. Единственность решений задачи Коши и асимптотическая единственность для других видов уравнений изучалась В. Г. Палюткиным.

Широкое распространение в теории граничных задач для дифференциальных уравнений получили пространства с позитивной и негативной нормой. Конструкция построения таких пространств в конкретной ситуации (соболевские пространства) принадлежит Ж. Лере и П. Лаксу (Франция, США, 1952—1957 гг.), хотя первым, имеющим непосредственное отношение к этому вопросу, следует назвать результат М. Г. Крейна 1947 г. относительно вполне непрерывных операторов в пространствах с двумя нормами. В абстрактном виде пространства с позитивной и негативной нормой были введены и исследованы Ю. М. Березанским и Г. И. Кацем в 1958—1963 гг. Одним из частных следствий этого исследования явился доказанный Ю. М. Березанским простой и естественный вариант теоремы Л. Шварца о ядре. Применение этих пространств позволило также обнаружить ряд интересных фактов, касающихся разрешимости различных граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Так, Ю. М. Березанский в 1959—1963 гг. установил слабую разрешимость и единственность сильного решения задачи Трикоми и более общих граничных задач для уравнений второго порядка смешанного типа, а для произвольных уравнений с постоянными коэффициентами исследовал задачу Дирихле, а именно: показал, что для каждого такого уравнения существуют области, в которых эта задача имеет слабое решение и сильное решение единственно; эта разрешимость устойчива относительно малых возмущений границы. Чуть позже Н. Г. Сорокина доказала совпадение сильного и слабого решений задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина и ее фредгольмовость, а В. П. Диденко разработал некоторые приемы доказательства энергетических неравенств в негативных нормах для подобных задач.

В 1963—1966 гг. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн и Я. А. Ройтберг (Чернигов) получили теоремы о решении краевых задач для эллиптических уравнений с правыми частями в уравнении и граничных условиях, которые являются обобщенными функциями («теоремы об изоморфизмах»). Эти результаты были применены для доказательства теорем о гладкости вплоть до границы обобщенных решений эллиптических уравнений, в спектральной теории, к исследованию функции Грина и т. п. В последние годы Ю. М. Березанский со своими учениками Ю. С. Самойленко и Ю. Г. Кондратьевым развил теорию обобщенных функций бесконечного числа переменных, нашедшую применение в соответствующих вопросах спектральной теории и квантовой теории поля, а М. Л. Горбачук с учениками—теорию обобщенных функций, строящихся по достаточно общему оператору вместо оператора дифференцирования, играющую существенную роль в спектральной теории операторно-дифференциальных уравнений. О применении обобщенных функций в спектральной теории см. также пп. 2 и 6.

Интегральные уравнения в классе обобщенных функций изучил в нескольких работах О. С. Парасюк (1957 г.).

9. Применение обобщенных функций в задачах квантовой теории поля. Оказалось, что известная теория перенормировок, играющая столь важную роль в теории поля и теории элементарных частиц, требует для своего обоснования привлечения методов функционального анализа, в частности теории обобщенных функций. Первоначально возникла задача регуляризации матриц рассеяния в квантовой электродинамике в любом порядке теории возмущений. Н. Н. Боголюбов впервые заметил (1953 г.), что проблема сводится к правильному определению понятия произведения специальных обобщенных функций—так называемых каузальных пропагаторов, и предложил использовать для этой цели теорему Хана — Банаха о продолжении функционалов. Таким образом он пришел к открытию новой формы вычитательной процедуры, получившей название R-операции Боголюбова.

В 1955—1960 гг. в совместных работах Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка были изучены комбинаторные и аналитические свойства этой операции и доказана фундаментальная теорема о возможности регуляризации матрицы рассеяния в любом порядке теории возмущений. Эти результаты приобрели особое значение в последние годы в связи с тем, что они нашли применение при построении единой теории электромагнитных и слабых взаимодействий, а также при ренормализации калибровочных и суперсимметрических теорий.

К этому разделу примыкают и некоторые другие исследования, выполненные в Институте математики, в частности изучение суммируемости рядов и аналитических свойств амплитуд рассеяния теории возмущений и доказательство существования нетривиальной матрицы рассеяния (Д. Я. Петрина); исследование на самосопряженность полевых операторов и интегральное представление функций Вайтмана, определяющих аксиоматическую теорию поля (Ю. М. Березанский, В. П. Гачок, Ю. С. Самойленко); построение теории рассеяния Хаага — Рюэля в терминах билинейных функционалов, теории рассеяния на языке функций Швингера (В. Д. Кошманенко).

10. Нелинейный функциональный анализ. В 1950—1952 гг. М. А. Красносельский получил существенные результаты по операторным уравнениям с нелинейными операторами. Он разработал новые топологические методы и с их помощью изучил новые классы нелинейных интегральных уравнений.