УДК 517.925

В. М. Евтухов (Одес. нац. ун-т),
Л. И. Кусик (Одес. нац. мор. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We establish asymptotic representations for solutions of a class of systems of differential equations that appear in investigating the asymptotic behavior of solutions of n order quasilinear differential equations.

Встановлюються асимптотичні зображення для розв'язків одного класу систем диференціальних рівнянь, що виникають при дослідженні асимптотики розв'язків квазілінійних диференціальних рівнянь n-го порядку.

В монографии [1] (гл. II) приведены результаты об асимптотическом поведении при $t \to +\infty$ решений квазилинейного дифференциального уравнения

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} [p_{0k}(t) + p_{1k}(t)] u^{(k)} + q(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)})$$

в случае, когда $q : [a, +\infty[\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $p_{1k} : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$, — „малые" в некотором интегральном смысле непрерывные функции, а p_{0k}: $[a, +\infty[\to \mathbf{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$, — непрерывно дифференцируемые функции, для которых существуют дважды непрерывно дифференцируемые функции φ, ψ: $([a, +\infty[\to]0, +\infty[)$ такие, что

$$\lim_{t \to +\infty} a_k(t) = a_{0k} = \text{const}, \qquad \lim_{t \to +\infty} b_k(t) = b_{0k} = \text{const}, \qquad k = 0, \ldots, n-1,$$

где

$$a_k(t) = \varphi^{-1}(t)\psi^{-1-k}(t)\big(\varphi(t)\psi^k(t)\big)', \qquad b_k(t) = \psi^{k-n}(t)\, p_{0k}(t), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

При этом предполагалось, что все корни алгебраического уравнения

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda + a_{0j}) = \sum_{k=1}^{n-1} b_{0k} \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda + a_{0j}) + b_{00}$$

являются простыми.

В случае наличия кратных корней у этого алгебраического уравнения вопрос об асимптотике вещественных решений квазилинейного дифференциального уравнения n-го порядка может быть сведен с помощью некоторого вещественного преобразования к установлению асимптотических представлений решений системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = [W(x) + R(x)]\, y + F(x, y), \tag{1}$$

где $R : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}^{n \times n}$ и $F : [a, +\infty[\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — „малые" в некотором смысле матрица-функция и вектор-функция, $W(x) = \operatorname{diag}[W_1(x), \ldots, W_s(x)]$,

$$W_i(x) = \begin{pmatrix} \omega_{i1}(x)I_2 & I_{i2}(x) & O_2 & \ldots & O_2 & O_2 \\ O_2 & \omega_{i2}(x)I_2 & I_{i3}(x) & \ldots & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & \omega_{i3}(x)I_2 & \ldots & O_2 & O_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_2 & O_2 & O_2 & \ldots & \omega_{in_i-1}(x)I_2 & I_{in_i}(x) \\ O_2 & O_2 & O_2 & \ldots & O_2 & \omega_{in_i}(x)I_2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, r$$

$$W_i(x) = \begin{pmatrix} \omega_{i1}(x) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{i2}(x) & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{i3}(x) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega_{in_i-1}(x) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_{in_i}(x) \end{pmatrix}, \quad i = r+1, \ldots, s,$$

$$r \in \{0, \ldots, s\}, \quad \sum_{i=1}^{r} 2n_i + \sum_{i=r+1}^{s} n_i = n,$$

$$I_{ik}(x) = \begin{pmatrix} l_{ik}^{(2)}(x) & -l_{ik}^{(1)}(x) \\ l_{ik}^{(1)}(x) & l_{ik}^{(2)}(x) \end{pmatrix}, \quad k = 2, \ldots, n_i, \quad i \in \{1, \ldots, r\},$$

I_2 — единичная, а O_2 — нулевая матрицы второго порядка, ω_{ik}, $l_{ik}^{(1)}$, $l_{ik}^{(2)}$ $]x_0, +\infty[\to \mathbf{R}$ непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \to +\infty} l_{ik}^{(1)}(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} l_{ik}^{(2)}(x) = 1, \quad k = 2, \ldots, n_i, \quad i \in \{1, \ldots, r\},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \omega_{ik}(x) = \omega_i^0 = \text{const}, \quad k = 1, \ldots, n_i, \quad i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Если $r = 0$, считаем, что матрица W состоит из блоков W_i второго типа, если $r = s$, то матрица W состоит из блоков W_i первого типа. При $k > m$ полагаем $\sum_{j=k}^{m} * = 0$.

Полученные во многих работах (см., например, [2–6]) результаты об асимптотической эквивалентности между решениями системы квазилинейных и соответствующей системы линейных уравнений, в силу их общего характера, не могут быть здесь эффективно использованы. Это связано, прежде всего, с тем, что для установления асимптотических представлений решений исходного квазилинейного уравнения n-го порядка в силу структуры преобразования, которое приводит его к системе вида (1), требуются асимптотические формулы для решений системы (1) с некоторыми уточнениями малых добавок.

Построению такого типа асимптотических представлений для решений системы дифференциальных уравнений специального вида (1) и посвящена настоящая работа.

Положим

$$N_1 = 0, \quad N_i = \sum_{k=1}^{i-1} m_k, \quad i = 2, \ldots, s,$$

где

$$m_i = \begin{cases} 2n_i, & \text{если } i \in \{1,\dots,r\}; \\ n_i, & \text{если } i \in \{r+1,\dots,s\}, \end{cases}$$

введем два множества

$$J_0 = \{(i,j): j = 1,\dots,n_i, 1 \le i \le s\}, \quad J = \{(i,k): k = 1,\dots,m_i, 1 \le i \le s\}$$

и обозначим через $e_{p\nu}$, где $(p,\nu) \in J$, n-мерный вектор, $(N_p+\nu)$-я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю.

Кроме того, положив для каждого $i \in \{1,\dots,s\}$

$$d_{im}(x) = \exp\int_a^x (\omega_{im}(s) - \omega_{im-1}(s))\,ds, \quad m = 2,\dots,n_i,$$

определим функции B^i_{mk}, $1 \le m \le k \le n_i$, $1 \le i \le s$, и $B^{i\mu}_{mk}$, $1 \le m \le k \le n_i$, $1 \le i \le r$; $\mu = 1, 2$, следующими рекуррентными соотношениями:

$$B^i_{kk}(x) = 1, \quad B^{i1}_{kk}(x) = 0, \quad B^{i2}_{kk}(x) = 1, \quad 1 \le k \le n_i,$$

$$B^i_{mk}(x) = \int_{\beta^i_{mk}}^x B^i_{m+1k}(t)\,d_{im+1}(t)\,dt, \quad 1 \le m < k \le n_i,$$

$$B^{i\mu}_{mk}(x) = \int_{\alpha^{i\mu}_{mk}}^x \left[B^{i\mu}_{m+1k}(t)\,l^{(2)}_{im+1}(t) + (-1)^{3-\mu} B^{i3-\mu}_{m+1k}(t)\,l^{(1)}_{im+1}(t)\right] d_{im+1}(t)\,dt, \quad 1 \le m < k \le n_i,$$

где

$$\beta^i_{mk} = \begin{cases} a, & \text{если } B^i_{mk0} = +\infty; \\ +\infty, & \text{если } B^i_{mk0} < +\infty, \end{cases} \qquad B^i_{mk0} = \int_a^{+\infty} \left|B^i_{m+1k}(t)\right| d_{im+1}(t)\,dt,$$

$$\alpha^{i\mu}_{mk} = \begin{cases} a, & \text{если } B^{i\mu}_{mk0} = +\infty; \\ +\infty, & \text{если } B^{i\mu}_{nk0} < +\infty, \end{cases}$$

$$B^{i\mu}_{mk0} = \int_a^{+\infty} \left|B^{i\mu}_{m+1k}(t)\,l^{(2)}_{im+1}(t) + (-1)^{3-\mu} B^{i3-\mu}_{m+1k}(t)\,l^{(1)}_{im+1}(t)\right| d_{im+1}(t)\,dt.$$

С помощью этих функций определим также функции D^i_{kj}, $1 \le k \le j \le n_i$, $i = r+1,\dots,s$, и $D^{i\mu}_{kj}$, $1 \le k \le j \le n_i$, $i = 1,\dots,r$, $\mu = 1, 2$, рекуррентными соотношениями

$$D^i_{kk}(x) = 1, \quad k = 1,\dots,n_i, \qquad D^i_{kj}(x) = -\sum_{m=k+1}^{j} B^i_{km}(x)\,D^i_{mj}(x), \quad 1 \le k < j \le n_i,$$

$$D^{i1}_{kk}(x) = 1, \quad D^{i2}_{kk}(x) = 0, \quad k = 1,\dots,n_i,$$

$$D^{i\mu}_{kj}(x) = -\sum_{m=k+1}^{j}\left(B^{i2}_{km}(x)\,D^{i\mu}_{mj}(x) + (-1)^{\mu} B^{i1}_{km}(x)\,D^{i3-\mu}_{mj}(x)\right), \quad 1 \le k < j \le n_i, \quad \mu = 1, 2.$$

Теперь рассмотрим укороченную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dx} = W(x)\,u. \tag{2}$$

Интегрируя ее „снизу вверх", получаем

$$u_{N_i+2k-1}(x) = \exp\int_a^x \omega_{ik}(s)\,ds \sum_{j=k}^{n_i}\left(C_{N_i+2j-1}\,B_{kj}^{i2}(x) - C_{N_i+2j}\,B_{kj}^{i1}(x)\right),$$

$$u_{N_i+2k}(x) = \exp\int_a^x \omega_{ik}(s)\,ds \sum_{j=k}^{n_i}\left(C_{N_i+2j-1}B_{kj}^{i1}(x) + C_{N_i+2j}B_{kj}^{i2}(x)\right),\ k=1,\ldots,n_i,\ i=1,\ldots,r,$$

$$u_{N_i+k}(x) = \exp\int_a^x \omega_{ik}(s)\,ds \sum_{j=k}^{n_i} C_{N_i+j}\,B_{kj}^{i}(x), \quad k=1,\ldots,n_i, \quad i=r+1,\ldots,s,$$

где $(C_m)_{m=1}^n = C$ — постоянный вектор. Полагая здесь $C = e_{p\nu}$, $\nu = 1,\ldots,m_p$, $p = 1,\ldots,s$, для (2) находим фундаментальную матрицу решений вида $\Phi(x) = \operatorname{diag}\left[\Phi_1(x),\ldots,\Phi_s(x)\right]$, где

$$\Phi_i(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}^i(x) & \Phi_{12}^i(x) & \ldots & \Phi_{1n_i}^i(x) \\ O^i & \Phi_{22}^i(x) & \ldots & \Phi_{2n_i}^i(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O^i & O^i & \ldots & \Phi_{n_in_i}^i(x) \end{pmatrix}, \quad O^i = \begin{cases} O_2 & \text{при} \quad i\in\{1,\ldots,r\}; \\ 0 & \text{при} \quad i\in\{r+1,\ldots,s\}, \end{cases}$$

$$\Phi_{kj}^i(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} B_{kj}^{i2}(x) & -B_{kj}^{i1}(x) \\ B_{kj}^{i1}(x) & B_{kj}^{i2}(x) \end{pmatrix} \exp\int_a^x \omega_{ik}(s)ds, & \text{если} \quad 1\le k\le j\le n_i, \quad i=1,\ldots,r; \\ B_{kj}^{i}(x)\exp\int_a^x \omega_{ik}(s)ds, & \text{если} \quad 1\le k\le j\le n_i, \quad i=r+1,\ldots,s. \end{cases}$$

Обратной к ней является матрица $\Phi^{-1}(x) = \operatorname{diag}\left[\Phi_1^{-1}(x),\ldots,\Phi_s^{-1}(x)\right]$, в которой

$$\Phi_i^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \left(\Phi_i^{-1}(x)\right)_{11} & \left(\Phi_i^{-1}(x)\right)_{12} & \ldots & \left(\Phi_i^{-1}(x)\right)_{1n_i} \\ O^i & \left(\Phi_i^{-1}(x)\right)_{22} & \ldots & \left(\Phi_i^{-1}(x)\right)_{2n_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O^i & O^i & \ldots & \left(\Phi_i^{-1}(x)\right)_{n_in_i} \end{pmatrix}, \quad i=1,\ldots,s,$$

$$\left(\Phi_i^{-1}(x)\right)_{kj} = \begin{cases} \begin{pmatrix} D_{kj}^{i1}(x) & -D_{kj}^{i2}(x) \\ D_{kj}^{i2}(x) & D_{kj}^{i1}(x) \end{pmatrix} \exp\left(-\int_a^x \omega_{ij}(s)ds\right), & \text{если} \ 1\le k\le j\le n_i, \ i=1,\ldots,r; \\ D_{kj}^{i}(x)\exp\left(-\int_a^x \omega_{ij}(s)ds\right), & \text{если} \ 1\le k\le j\le n_i, \ i=r+1,\ldots,s. \end{cases}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать выполненным следующее условие:

(S_B): при каждом значении $i \in \{1,\ldots,s\}$

$$B_{1m}^i(x) \ne 0, \quad m=1,\ldots,n_i, \quad \text{в некоторой окрестности } +\infty$$

и для любых j, m таких, что $1 \le j \le m \le n_i$,

$$\limsup_{x\to+\infty}\left|\frac{B^i_{1j}(x)B^{i\mu}_{jm}(x)}{B^i_{1m}(x)}\right| < +\infty, \quad \text{если} \quad i\in\{1,\ldots,r\}, \quad \mu=1,2,$$

$$\limsup_{x\to+\infty}\left|\frac{B^i_{1j}(x)B^i_{jm}(x)}{B^i_{1m}(x)}\right| < +\infty, \quad \text{если} \quad i\in\{r+1,\ldots,s\}.$$

Лемма. *Если выполняется условие* (S_B), *то существуют постоянные* $c_1\geq$ ≥ 1 *и* $x_1\geq x_0$ *такие, что для каждого* $i\in\{1,\ldots,s\}$ *и любых натуральных* k,j, *удовлетворяющих неравенству* $1\leq k\leq j\leq n_i$, *при* $x\geq x_1$ *имеет место оценка*

$$\sum_{m=k}^{j}\left|B^i_{1m}(x)D^{i\mu}_{mj}(x)\right| \leq (2c_1)^{j-k}\left|B^i_{1j}(x)\right|, \quad i\in\{1,\ldots,r\}, \quad \mu=1,2,$$

$$\sum_{m=k}^{j}\left|B^i_{1m}(x)D^{i}_{mj}(x)\right| \leq (2c_1)^{j-k}\left|B^i_{1j}(x)\right|, \quad i\in\{r+1,\ldots,s\}.$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 1 из [7].

Для формулировки основного результата, наряду с приведенными выше обозначениями, потребуются еще некоторые вспомогательные обозначения и определение.

Для каждой пары $(i,k)\in J_0$ положим

$$H_{i2k-1}(x) = H_{i2k}(x) = B^i_{1k}(x)\exp\int_a^x(\omega_{i1}(t)-\omega_{ik}(t))\,dt \quad \text{при} \quad i\in\{1,\ldots,r\},$$

$$H_{ik}(x) = B^i_{1k}(x)\exp\int_a^x(\omega_{i1}(t)-\omega_{ik}(t))\,dt \quad \text{при} \quad i\in\{r+1,\ldots,s\}.$$

Введем матрицу

$$\Delta(x) = \operatorname{diag}[\Delta_1(x),\ldots,\Delta_s(x)], \text{ где } \Delta_i(x) = \operatorname{diag}\left[H_{i1}(x),\ldots,H_{im_i}(x)\right], \ i=1,\ldots,s,$$

и через $\mathbf{R}^n_b$ обозначим множество

$$\mathbf{R}^n_b = \left\{(z_j)_{j=1}^n\in\mathbf{R}^n : |z_1|\leq b,\ldots,|z_1|\leq b\right\}.$$

Определение. *Пусть* $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^s$ — *вектор-функция с непрерывными компонентами* $\gamma_i : [a,+\infty] \to\ ]0,+\infty[$, $i=1,\ldots,s$. *Будем говорить, что система непрерывных функций* $\mu_{im} :\ ]a,+\infty[\ \to \mathbf{R}$, $m=1,\ldots,n_i$, $i=1,\ldots,s$, *удовлетворяет на промежутке* $[x_0,+\infty[\ \subset\ ]a,+\infty[$ *условию* $(M-L)_{pq}$ *с весом* γ, *где* $(p,q)\in J_0$, *если для любой пары* $(i,m)\in J_0$ *либо*

$$\inf\left\{\int_\tau^x[\mu_{pq}(s)-\mu_{im}(s)]\,ds-\ln\frac{\gamma_i(x)}{\gamma_i(\tau)} : x\geq\tau\geq x_0\right\} > -\infty$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\int_{x_0}^x[\mu_{pq}(s)-\mu_{im}(s)]\,ds-\ln\frac{\gamma_i(x)}{\gamma_i(x_0)}\right] = +\infty,$$

либо

$$\sup\left\{\int_{\tau}^{x}[\mu_{pq}(s)-\mu_{im}(s)]\,ds-\ln\frac{\gamma_i(x)}{\gamma_i(\tau)}:\ x\geq\tau\geq x_0\right\} < +\infty.$$

При выполнении условия $(M-L)_{pq}$ с весом $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^{s}$ будем также использовать диагональную матрицу

$$\Gamma(x) = \operatorname{diag}\left[\gamma_1(x)I_{m_1},\ldots,\gamma_s(x)I_{m_s}\right],$$

где I_{m_i}, $i=1,\ldots,s$, — единичная матрица m_i-го порядка.

Теорема. *Пусть для некоторой фиксированной пары* $(p,\upsilon)\in J$ *и некоторой вектор-функции* $\gamma=(\gamma_i)_{i=1}^{s}$ *с непрерывными компонентами* $\gamma_i\colon [a,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$, $i=1,\ldots,s$, *вместе с* (S_B) *выполнены следующие условия:*

1) *система функций*

$$\mu_{ik}(x) = \omega_{i1}(x)+\frac{(B_{1k}^{i}(x))'}{B_{1k}^{i}(x)},\quad k=1,\ldots,n_i,\quad 1\leq i\leq s,$$

удовлетворяет условию $(M-L)_{pq}$, *где* q *определено равенством*

$$q = \begin{cases}[(\upsilon+1)/2], & \text{если } p\in\{1,\ldots,r\};\\ \upsilon, & \text{если } p\in\{r+1,\ldots,s\},\end{cases}$$

на промежутке $[x_0,+\infty[\,\subset\,]a,+\infty[$ *с весом* γ ($[\,*\,]$ *обозначает целую часть числа* $*$);

2) *для любых* $(i,k)\in J$ *и* $m\in\{1,\ldots,\upsilon\}$

$$\int_{x_0}^{+\infty}\gamma_i(x)\left|\frac{H_{ik}(x)}{H_{pm}(x)}r_{N_i+kN_p+m}(x)\right|dx < +\infty;$$

3) *для любых* (i,k), $(l,m)\in J$

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{\gamma_i(x)}{\gamma_l(x)}\left|\frac{H_{ik}(x)}{H_{lm}(x)}r_{N_i+kN_l+m}(x)\right|dx < +\infty;$$

4) *существуют число* $b\in\,]0,+\infty[$ *и непрерывная функция* $\phi\colon [a,+\infty[\,\to\mathbf{R}_+$ *такие, что для любых* $(i,k)\in J$ *и* $z\in\mathbf{R}_b^n$

$$\left|F_{N_i+k}(x,\Delta^{-1}(x)\Gamma^{-1}(x)\xi_{pq}(x)z+\Phi(x)e_{p\upsilon})\right| \leq \phi(x),$$

$$\int_{x_0}^{+\infty}\gamma_i(x)\phi(x)\left|\frac{H_{ik}(x)}{\xi_{pq}(x)}\right|dx < +\infty,$$

где

$$\xi_{pq}(x) = B_{1q}^{p}(x)\exp\int_{a}^{x}\omega_{p1}(s)\,ds.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (1) *имеет хотя бы одно решение* $y_{p\upsilon}(x)$, *допускающее при* $x\to+\infty$ *асимптотическое представление*

$$y_{p\upsilon}(x) = \Phi(x)e_{p\upsilon}+\Delta^{-1}(x)\Gamma^{-1}(x)\xi_{pq}(x)\bar{o}(1).$$

Доказательство. Для данных $(p, q) \in J_0$ и вектор-функции γ введем вспомогательные функции

$$g_{im}(x,\tau) = \frac{\gamma_i(x)B^i_{1q}(x)B^p_{1q}(\tau)}{\gamma_i(\tau)B^i_{1q}(\tau)B^p_{1q}(x)}\exp\int_\tau^x(\omega_{l1}(s)-\omega_{p1}(s))\,ds, \quad m=1,\dots,n_l,\ i=1,\dots,s,$$

$$f_{pv}(x) = \frac{\Delta(x)\Phi(x)}{\xi_{pq}(x)}e_{pv}.$$

С учетом вида матриц Δ и Φ компоненты вектора $f_{pv}(x) = \big((f_{pv}(x))_k\big)_{k=1}^n$ определяются следующим образом:

1) если $p \in \{1,\dots,r\}$, то для каждого $\eta \in \{1,\dots,q\}$

$$\big(f_{p2q-1}(x)\big)_{N_p+2\eta-1} = \frac{B^p_{1\eta}(x)B^{p2}_{\eta q}(x)}{B^p_{1q}(x)}, \qquad \big(f_{p2q-1}(x)\big)_{N_p+2\eta} = \frac{B^p_{1\eta}(x)B^{p1}_{\eta q}(x)}{B^p_{1q}(x)},$$

$$\big(f_{p2q}(x)\big)_{N_p+2\eta-1} = -\frac{B^p_{1\eta}(x)B^{p1}_{\eta q}(x)}{B^p_{1q}(x)}, \qquad \big(f_{p2q}(x)\big)_{N_p+2\eta} = \frac{B^p_{1\eta}(x)B^{p2}_{\eta q}(x)}{B^p_{1q}(x)}$$

и

$$\big(f_{p2q-1}(x)\big)_j = 0, \quad \big(f_{p2q}(x)\big)_j = 0, \qquad j \neq N_p+1,\dots,N_p+v;$$

2) если $p \in \{r+1,\dots,s\}$, то для каждого $\eta \in \{1,\dots,q\}$

$$\big(f_{pq}(x)\big)_{N_p+\eta} = \frac{B^p_{1\eta}(x)B^p_{\eta q}(x)}{B^p_{1q}(x)}, \quad \big(f_{pq}(x)\big)_j = 0, \qquad j \neq N_p+1,\dots,N_p+q.$$

Поскольку выполняется условие 1 теоремы, множество J_0 распадается на два непересекающихся подмножества J_{1pq} и J_{2pq}, $J_0 = J_{1pq} \cup J_{2pq}$, таких, что при $(i,m) \in J_{1pq}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g_{im}(x,\tau) = 0$ для любого $\tau \geq x_0$ и $\eta_{im} = \sup\big\{|g_{im}(x,\tau)| : x \geq \tau \geq x_0\big\} < +\infty$, а если $(i,m) \in J_{2pq}$, то $\eta_{im} = \sup\big\{|g_{im}(x,\tau)| : \tau \geq x \geq x_0\big\} < < +\infty$.

В соответствии с этим разбиением множества J_0 представим матрицу Φ в виде суммы двух матриц

$$\Phi^{(\rho)}(x) = \operatorname{diag}\big[\Phi^{(\rho)}_1(x),\dots,\Phi^{(\rho)}_s(x)\big], \quad \rho = 1, 2,$$

где $\Phi^{(\rho)}_i(x)$, $i \in \{1,\dots,s\}$, $\rho = 1, 2$, — матрицы m_i-го порядка с элементами

$$\big(\Phi^{(\rho)}_i(x)\big)_{jm} = \begin{cases} (\Phi_i(x))_{jm}, & \text{если } (i,m) \in J_{\rho pq};\\ 0, & \text{если } (i,m) \notin J_{\rho pq}, \end{cases}$$

и положим

$$\alpha_\rho = \begin{cases} x_2 & \text{при } \rho = 1;\\ +\infty & \text{при } \rho = 2. \end{cases}$$

Покажем, что при достаточно большом значении $x_2 \geq x_1$ (x_1 определено леммой) система интегральных уравнений

$$z(x) = \sum_{\rho=1}^{2} \int_{\alpha_\rho}^{x} K^\rho(x,\tau)\Big[G(\tau)\big\{z(\tau)+\Gamma(\tau) f_{pv}(\tau)\big\} +$$

$$+ \frac{1}{\xi_{pq}(\tau)}\Gamma(\tau)\Delta(\tau)F\Big(\tau, \Delta^{-1}(\tau)\Gamma^{-1}(\tau)\xi_{pq}(\tau)z(\tau)+\Phi(\tau)e_{pv}\Big)\Big]d\tau, \qquad (3)$$

где

$$K^\rho(x,\tau) = \frac{\xi_{pq}(\tau)}{\xi_{pq}(x)}\Gamma(x)\Delta(x)\Phi^{(\rho)}(x)\Phi^{-1}(\tau)\Delta^{-1}(\tau)\Gamma^{-1}(\tau),$$

$$G(\tau) = \Gamma(\tau)\Delta(\tau)R(\tau)\Delta^{-1}(\tau)\Gamma^{-1}(\tau),$$

имеет по крайней мере одно решение $z = (z_k)_{k=1}^n \in C\big([x_2, +\infty[; \mathbf{R}_b^n\big)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$.

В этой системе

$$K^{(\rho)}(x,\tau) = \operatorname{diag}\Big[K_1^{(\rho)}(x,\tau),\ldots,K_s^{(\rho)}(x,\tau)\Big], \quad \rho = 1, 2,$$

$$K_i^\rho(x,\tau) = \frac{\xi_{pq}(\tau)\gamma(x)}{\xi_{pq}(x)\gamma(\tau)}\Delta_i(x)\Phi_i^{(\rho)}(x)\Phi_i^{-1}(\tau)\Delta_i^{-1}(\tau),$$

причем K_i^ρ при $i = 1, \ldots, r$ состоит из блоков вида

$$\Big(K_i^\rho(x,\tau)\Big)_{kj} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Big(K_i^\rho(x,\tau)\Big)_{kj}^{(1)} & -\Big(K_i^\rho(x,\tau)\Big)_{kj}^{(2)} \\ \Big(K_i^\rho(x,\tau)\Big)_{kj}^{(2)} & \Big(K_i^\rho(x,\tau)\Big)_{kj}^{(1)} \end{pmatrix}, & \text{если } 1 \le k \le j \le n_i; \\ O_2, & \text{если } 1 \le j < k \le n_i, \end{cases}$$

где

$$\Big(K_i^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{kj}^{(\mu)} = \sum_{\substack{m=k \\ (i,m)\in J_{\rho pq}}}^{j} g_{im}(x,\tau)\Bigg(\frac{B_{1k}^i(x)B_{km}^{i3-\mu}(x)}{B_{1m}^i(x)}\frac{B_{1m}^i(\tau)D_{mj}^{i1}(\tau)}{B_{1j}^i(\tau)} +$$

$$+ (-1)^\mu \frac{B_{1k}^i(x)B_{km}^{i\mu}(x)}{B_{1m}^i(x)}\frac{B_{1m}^i(\tau)D_{mj}^{i2}(\tau)}{B_{1j}^i(\tau)}\Bigg), \quad \mu = 1, 2,$$

а при $i = r+1, \ldots, s$ — из элементов

$$\Big(K_i^\rho(x,\tau)\Big)_{kj} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{m=k \\ (i,m)\in J_{\rho pq}}}^{j} g_{im}(x,\tau)\frac{B_{1k}^i(x)B_{km}^i(x)}{B_{1m}^i(x)}\frac{B_{1m}^i(\tau)D_{mj}^i(\tau)}{B_{1j}^i(\tau)}, & \text{если } 1 \le k \le j \le n_i; \\ 0, & \text{если } 1 \le j < k \le n_i, \end{cases}$$

матрица G имеет вид

$$G(\tau) = \begin{pmatrix} G_{11}(\tau) & \ldots & G_{1s}(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{s1}(\tau) & \ldots & G_{ss}(\tau) \end{pmatrix},$$

где G_{ll} — блок размерности $m_l \times m_l$ с элементами

$$\left(G_{il}(\tau)\right)_{kj} = \frac{\gamma_i(\tau) H_{ik}(\tau)}{\gamma_l(\tau) H_{lj}(\tau)} r_{N_i+kN_l+j}(\tau), \qquad (i,k),(l,j) \in J.$$

Учитывая эти представления, перепишем (3) в виде

$$z_k(x) = \int\limits_{x_2}^{x} \psi_{1k}(\tau, x, z(\tau))\,d\tau + \int\limits_{x}^{+\infty} \psi_{2k}(\tau, x, z(\tau))\,d\tau, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где функции $\psi_{\rho k}$, $\rho = 1, 2$, $k = 1, \ldots, n$, определяются так:

1) если $\eta \in \{1, \ldots, r\}$, то для каждого $\nu \in \{1, \ldots, n_\eta\}$

$$\psi_{\rho N_\eta+2\nu-1}(\tau, x, z) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{m=1}^{m_l} \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=\nu}^{n_\eta} \Big\{ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(1)} \Big(G_{\eta l}(\tau)\Big)_{2j-1m} -$$

$$- \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(2)} \Big(G_{\eta l}(\tau)\Big)_{2jm} \Big\} z_{N_l+m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{v} \sum_{j=\nu}^{n_\eta} \Big\{ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(1)} \Big(G_{\eta p}(\tau)\Big)_{2j-1m} -$$

$$- \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(2)} \Big(G_{\eta p}(\tau)\Big)_{2jm} \Big\} \gamma_p(\tau) \Big(f_{pv}(\tau)\Big)_{N_p+m} +$$

$$+ \sum_{j=\nu}^{n_\eta} \frac{\gamma_\eta(\tau)}{\xi_{pq}(\tau)} \Big\{ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(1)} H_{\eta 2j-1}(\tau) \bar{F}_{N_\eta+2j-1}(\tau, z) -$$

$$- \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(2)} H_{\eta 2j}(\tau) \bar{F}_{N_\eta+2j}(\tau, z) \Big\},$$

$$\psi_{\rho N_\eta+2\nu}(\tau, x, z) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{m=1}^{m_l} \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=\nu}^{n_\eta} \Big\{ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(2)} \Big(G_{\eta l}(\tau)\Big)_{2j-1m} +$$

$$+ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(1)} \Big(G_{\eta l}(\tau)\Big)_{2jm} \Big\} z_{N_l+m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{v} \sum_{j=\nu}^{n_\eta} \Big\{ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(2)} \Big(G_{\eta p}(\tau)\Big)_{2j-1m} +$$

$$+ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(1)} \Big(G_{\eta p}(\tau)\Big)_{2jm} \Big\} \gamma_p(\tau) \Big(f_{pv}(\tau)\Big)_{N_p+m} +$$

$$+ \sum_{j=\nu}^{n_\eta} \frac{\gamma_\eta(\tau)}{\xi_{pq}(\tau)} \Big\{ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(2)} H_{\eta 2j-1}(\tau) \bar{F}_{N_\eta+2j-1}(\tau, z) +$$

$$+ \Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}^{(1)} H_{\eta 2j}(\tau) \bar{F}_{N_\eta+2j}(\tau, z) \Big\};$$

2) если $\eta \in \{r+1, \ldots, s\}$, то для любого $\nu \in \{1, \ldots, n_\eta\}$

$$\psi_{\rho N_\eta+\nu}(\tau, x, z) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{m=1}^{m_l}\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=\nu}^{n_\eta}\Big\{\Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}\Big(G_{\eta l}(\tau)\Big)_{jm} z_{N_l+m} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\nu}\sum_{j=\nu}^{n_\eta}\Big\{\Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j}\Big(G_{\eta p}(\tau)\Big)_{jm}\gamma_p(\tau)\Big(f_{p\nu}(\tau)\Big)_{N_p+m} +$$

$$+ \sum_{j=\nu}^{n_\eta}\frac{\gamma_\eta(\tau)}{\xi_{pq}(\tau)}\Big\{\Big(K_\eta^{(\rho)}(x,\tau)\Big)_{\nu j} H_{\eta j}(\tau)\bar F_{N_\eta+j}(\tau, z),$$

где $\bar F_k(\tau, z) = F_k\Big(\tau, \Delta^{-1}(\tau)\Gamma^{-1}(\tau)\xi_{pq}(\tau)z + \Phi(\tau)e_{pv}\Big)$, $k = 1, \ldots, n$.

Выберем теперь c_1, как в лемме, введем постоянную

$$c = \sum_{i=1}^{r}(2c_1)^{n_i} n_i^2\eta_i + \sum_{i=r+1}^{s} c_1(2c_1)^{n_i-1} n_i^2\eta_i,$$

где

$$\eta_i = \max\{\eta_{im} : 1 \le m \le n_i\}, \quad i = 1, \ldots, s,$$

и положим

$$\zeta(x,\tau) = \frac{c_1}{c}\left\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j=k}^{n_i}\sum_{\substack{m=k\\(i,m)\in J_{1pq}}}^{j}\big|g_{im}(x,\tau)\big|\left(\left|\frac{B_{1m}^i(\tau)D_{mj}^{i1}(\tau)}{B_{1j}^i(\tau)}\right| + \left|\frac{B_{1m}^i(\tau)D_{mj}^{i2}(\tau)}{B_{1j}^i(\tau)}\right|\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=r+1}^{s}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j=k}^{n_i}\sum_{\substack{m=k\\(i,m)\in J_{1pq}}}^{j}\big|g_{im}(x,\tau)\big|\left|\frac{B_{1m}^i(\tau)D_{mj}^{i1}(\tau)}{B_{1j}^i(\tau)}\right|\right\}, \quad \text{если } J_{1pq} \ne \varnothing,$$

и $\zeta(x,\tau) = 0$, если $J_{1pq} = \varnothing$.

Кроме того, введем функцию

$$g(\tau) = c\left\{\sum_{\eta=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{n_\eta}\left(b\sum_{i=1}^{s}\sum_{m=1}^{m_l}\sum_{l=1}^{s}\sum_{j=\nu_\eta}^{m_\eta}\Big|\Big(G_{\eta l}(\tau)\Big)_{jm}\Big| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + d_p\gamma_p(\tau)\sum_{m=1}^{\upsilon}\sum_{j=\nu_\eta}^{m_\eta}\Big|\Big(G_{\eta p}(\tau)\Big)_{jm}\Big| + \sum_{j=\nu_\eta}^{m_\eta}\gamma_\eta(\tau)\phi(\tau)\left|\frac{H_{\eta j}(\tau)}{\xi_{pq}(\tau)}\right|\right)\right\},$$

где

$$\nu_\eta = \begin{cases} 2\nu - 1, & \text{если } \eta \in \{1, \ldots, r\}; \\ \nu, & \text{если } \eta \in \{r+1, \ldots, s\}, \end{cases} \qquad d_p = \begin{cases} c_1/2 & \text{при } p \in \{1, \ldots, r\}; \\ c_1 & \text{при } p \in \{r+1, \ldots, s\}. \end{cases}$$

Принимая во внимание условия 2–4 теоремы, подберем число $x_2 \ge x_1$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\int_{x_2}^{+\infty} g(\tau)d\tau \le b$. При этом замечаем, что в силу условия (S_B) и условия 1 теоремы

$$\zeta(x,\tau)\le 1 \quad \text{при} \quad x\ge\tau\ge x_2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\zeta(x,\tau)=0 \quad \text{при} \quad \tau\ge x_2$$

и для любого $z\in \mathbf{R}_b^n$ имеют место оценки

$$|\psi_{1k}(\tau,x,z)|\le\zeta(x,\tau)g(\tau) \quad \text{при} \quad x_2\le\tau\le x, \quad k=1,\ldots,n,$$
$$|\psi_{2k}(\tau,x,z)|\le g(\tau) \quad \text{при} \quad x_2\le x\le\tau, \quad k=1,\ldots,n.$$

Таким образом, система (4) при выбранном значении $x_2\ge x_1$ удовлетворяет всем условиям леммы 7.6 из монографии [1, с. 201] (гл. II, § 7) и поэтому имеет место хотя бы одно решение $z_{pv}=(z_{pvk})_{k=1}^n : [x_2,+\infty[\to \mathbf{R}_b^n$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Полагая в (3)

$$z_{pv}(x) = \frac{\Gamma(x)\Delta(x)y_{pv}(x)-\Gamma(x)\Delta(x)\Phi(x)e_{pv}}{\xi_{pq}(x)},$$

замечаем, что y_{pv} является решением системы (1), причем для него имеет место асимптотическое представление

$$y_{pv}(x) = \Phi(x)e_{pv}+\Delta^{-1}(x)\Gamma^{-1}(x)\xi_{pq}(x)\bar{o}(1) \qquad \text{при} \ x\to+\infty.$$

Теорема доказана.

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
2. *Chanturia T. A.* On the asymptotic properties of solutions of perturbed linear systems of differential equations // Ann. mat. pura ed appl. – 1972. – **94**. – P. 41–62.
3. *Kitamura Yuichi.* Remarks of the asymptotic relationships of two systems of ordinary differential equations // Hiroshima Math. J. – 1976. – **6**. – P. 403–420.
4. *Brauer F.* On the asymptotic behavior of perturbed linear systems // J. Different. Equat. – 1960. – **6**. – P. 142–153.
5. *Brauer F., Wong J.* On the asymptotic relationships between solutions of two systems of ordinary differential equations // Ibid. – 1969. – **6**. – P. 527–534.
6. *Костин А. В.* К вопросу о существовании у систем обыкновенных дифференциальных уравнений ограниченных частных решений и частных решений, стремящихся к нулю при $t\to+\infty$ // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 5. – С. 585–604.
7. *Евтухов В. М.* Асимптотическое интегрирование решений некоторых классов систем линейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 3. – С. 334–357.

Получено 15.05.2002