УДК 517.5

Т. О. Кононович (Полтав. пед. ун-т)

ОЦІНКА НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ „КУТОМ" У МЕТРИЦІ L_p ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

We obtain an upper bound in terms of the Fourier coefficients for the best approximation by an "angle" and for the norm in the metric L_p of functions of two variables. These functions are determined by trigonometric series with coefficients $a_{l_1 l_2} \to 0$, $l_1 + l_2 \to \infty$, satisfying the condition

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{l_1=k_1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1 l_2} \right| \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} < \infty.$$

for some p, $1 < p < \infty$.

Отримано виражену через коефіцієнти Фур'є оцінку зверху найкращого наближення „кутом" та норми у метриці L_p функцій двох змінних, які задані тригонометричними рядами з коефіцієнтами $a_{l_1 l_2} \to 0$, $l_1 + l_2 \to \infty$, що при деякому p, $1 < p < \infty$, задовольняють умову

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{l_1=k_1}^{\infty} \sum_{l_2=k_2}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1 l_2} \right| \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} < \infty.$$

Нехай L_p, $1 \le p < \infty$ $(L_1 = L)$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною сумовних у p-му степені на $T^2 = [-\pi, \pi]^2$ функцій $f(x_1, x_2)$ із нормою

$$\| f(x_1, x_2) \|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p}.$$

Покладемо $N_0 = N \cup \{0\}$, $Z_+^2 = N_0 \times N_0$,

$$\check{Q}_{m_1 m_2} = \left\{ (l_1, l_2) \in Z_+^2 : 0 \le l_1 \le m_1,\ 0 \le l_2 < \infty \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (l_1, l_2) \in Z_+^2 : 0 \le l_1 < \infty,\ 0 \le l_2 \le m_2 \right\}, \quad m_1, m_2 \in N_0.$$

Позначимо через $E_{n_1 n_2}(f)_p$, $n_1, n_2 \in N_0$, величину найкращого наближення „кутом" функції $f \in L_p$:

$$E_{n_1 n_2}(f)_p = \inf_{t_{n_i} \in T_{n_i},\, i=1,2} \left\| f(x_1, x_2) - t_{n_1}(x_1, x_2) - t_{n_2}(x_1, x_2) \right\|_p,$$

де T_{n_i} — множина функцій простору L_p, які є тригонометричними поліномами степеня не вище n_i за змінною x_i.

Через $f_{ij}(x_1, x_2)$, $i, j \in \{0, 1\}$, позначимо суми подвійних тригонометричних рядів вигляду

$$f_{ij}(x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma} a_{l_1 l_2} \cos\left(l_1 x_1 - \frac{i\pi}{2} \right) \cos\left(l_2 x_2 - \frac{j\pi}{2} \right), \tag{1}$$

де $a_{l_1 l_2}$ — дійсні числа.

Для довільної послідовності дійсних чисел $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, покладемо

$$\Delta^1 a_{l_1 l_2} = a_{l_1 l_2} - a_{l_1+1\, l_2}, \quad \Delta^2 a_{l_1 l_2} = a_{l_1 l_2} - a_{l_1\, l_2+1},$$

$$\Delta^{12} a_{l_1 l_2} = \Delta^2(\Delta^1 a_{l_1 l_2}) = \Delta^1(\Delta^2 a_{l_1 l_2}) = a_{l_1 l_2} - a_{l_1+1\, l_2} - a_{l_1\, l_2+1} + a_{l_1+1\, l_2+1},$$

$$\sigma_{m_1m_2}(a) = \sum_{l_1=m_1}^{\infty}\sum_{l_2=m_2}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|, \quad m_1, m_2 \in N_0.$$

Через C позначимо додатні сталі, які залежать лише від p і можуть бути неоднаковими у різних формулах.

Нехай $E_n(g)_p$, $n \in N_0$, — величина найкращого наближення функції $g \in \in L_p(\cdot)$ тригонометричними поліномами степеня не вище n, де $L_p(\cdot)$ — простір 2π-періодичних функцій однієї змінної, сумовних у p-му степені на $[-\pi, \pi]$. Оцінку найкращого наближення функцій $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, для яких $b_k \downarrow 0$, і при деякому p, $1 < p < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p k^{p-2} < \infty$, одержав А. А. Конюшков [1] (теорема 4):

$$E_n(g)_p \le C\left((n+1)^{1/p'} b_{n+1} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^p k^{p-2}\right)^{1/p}\right),$$

де $p' = p/(p-1)$, $n = 0, 1, \ldots$. На підставі теореми Харді і Літтлвуда (див., наприклад, [2, с. 215]) доведено, що при $p \ge 2$ доданок $(n+1)^{1/p'} b_{n+1}$ у правій частині нерівності можна відкинути [1].

Автор отримала подібну оцінку для функцій, що задані синус- або косинус-рядами, коефіцієнти яких можуть бути і немонотонними [3]. Якщо елементи послідовності $\{b_k\}$ такі, що $b_k \to 0$, $k \to \infty$, і при деякому p, $1 < p < 2$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}|\Delta b_i|\right)^p (k+1)^{p-2} < \infty \quad (\Delta b_i = b_i - b_{i+1}),$$

то для функції $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ справджується оцінка

$$E_n(g)_p \le C\left((n+1)^{1/p'}\sum_{i=n+1}^{\infty}|\Delta b_i| + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}|\Delta b_i|\right)^p k^{p-2}\right)^{1/p}\right), \tag{2}$$

де $p' = p/(p-1)$, $n = 0, 1, \ldots$.

За умови монотонності коефіцієнтів b_k нерівність (2) збігається з оцінкою А. А. Конюшкова. Крім того, співвідношення (2), як і наступне зауваження, має місце також для функції

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

при виконанні для коефіцієнтів a_k вказаних умов.

Зазначимо, що оцінка (2) є справедливою і при $p \ge 2$. Але якщо у цьому випадку послабити обмеження, поклавши $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^p (k+1)^{p-2} < \infty$, то за теоремою Харді і Літтлвуда числа $\{b_k\}$ будуть коефіцієнтами Фур'є функції $g \in \in L_p(\cdot)$ $\Big($до того ж на підставі результату Р. Ханта [4, с. 201] майже скрізь $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx\Big)$ і виконуватиметься нерівність

$$\|g(x) - S_n(x)\|_{L_p(\cdot)} \le C\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|^p (k+1)^{p-2}\right)^{1/p}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

($S_n(x)$ — n-та частинна сума ряду Фур'є функції $g(x)$), звідки випливає більш точна у порівнянні з (2) оцінка

$$E_n(g)_p \le C\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k|^p (k+1)^{p-2}\right)^{1/p}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

У даній роботі буде отримано співвідношення, аналогічне (2), для найкращого наближення „кутом", а також оцінки норм функцій двох змінних у метриці L_p, $1 < p < \infty$, які задані тригонометричними рядами, що при накладених на коефіцієнти умовах є рядами Фур'є своїх сум. Оцінки виражатимуться через коефіцієнти Фур'є.

Слід зазначити, що у метриці L_p, $0 < p < \infty$, оцінки норм сум подвійних тригонометричних рядів із монотонними коефіцієнтами отримано у роботах [5, 6]. Оцінки зверху величини $E_{n_1 n_2}(f)_p$, $0 < p < \infty$, для функцій, які задані косинус-рядами з монотонними коефіцієнтами, встановлено у роботі [7].

Теорема 1. *Нехай елементи послідовності* $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, *задовольняють умови*

$$a_{l_1 l_2} \to 0 \quad \textit{при} \quad l_1 + l_2 \to \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sigma_{k_1 k_2}(a)\right)^p (k_1+1)^{p-2}(k_2+1)^{p-2} < \infty \tag{4}$$

при деякому p, $1 < p < \infty$. *Тоді для функцій* $f_{ij}(x_1, x_2)$, $i, j \in \{0, 1\}$, *справедливою є оцінка*

$$\begin{aligned} E_{n_1 n_2}(f_{ij})_p \le C\Bigg(& (n_1+1)^{1/p'}(n_2+1)^{1/p'}\sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a) + \\ & + (n_1+1)^{1/p'}\left(\sum_{k_2=n_2}^{\infty}\left(\sigma_{n_1+1\, k_2+1}(a)\right)^p (k_2+1)^{p-2}\right)^{1/p} + \\ & + (n_2+1)^{1/p'}\left(\sum_{k_1=n_1}^{\infty}\left(\sigma_{k_1+1\, n_2+1}(a)\right)^p (k_1+1)^{p-2}\right)^{1/p} + \\ & + \left(\sum_{k_1=n_1}^{\infty}\sum_{k_2=n_2}^{\infty}\left(\sigma_{k_1+1\, k_2+1}(a)\right)^p (k_1+1)^{p-2}(k_2+1)^{p-2}\right)^{1/p}\Bigg), \end{aligned} \tag{5}$$

де $p' = p/(p-1)$, $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$.

Доведення. Якщо для послідовності $\{a_{l_1 l_2}\}$ виконується умова (4), то $\sigma_{00}(a) = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1 l_2}\right| < \infty$, що разом з (3) забезпечує збіжність за Прінгсхеймом рядів

$$\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}2^{-\gamma}a_{l_1 l_2}\cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2, \qquad \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}2^{-\gamma}a_{l_1 l_2}\cos l_1 x_1 \sin l_2 x_2,$$

$$\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}2^{-\gamma}a_{l_1 l_2}\sin l_1 x_1 \cos l_2 x_2$$

скрізь в T^2, за винятком хіба що точок множин

$$\{(x_1, x_2) \in T^2 : x_1 x_2 = 0\}, \quad \{(x_1, x_2) \in T^2 : x_1 = 0\}, \quad \{(x_1, x_2) \in T^2 : x_2 = 0\}$$

відповідно, а ряду $\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}a_{l_1 l_2}\sin l_1 x_1 \sin l_2 x_2$ — скрізь в T^2. Збіжність рівномірна на будь-якій замкненій множині $F \subset T^2 \setminus E_\varepsilon^2$, де

$$E_\varepsilon^2 = \left\{(x_1, x_2) \in T^2 : |x_i| < \varepsilon_i,\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1, 2\right\}$$

[8] (теорема 1). Отже, за умов теореми майже скрізь визначено функції $f_{ij}(x_1, x_2)$, $i, j \in \{0, 1\}$.

Надалі дотримуватимемось методу доведення теореми 4 з роботи [1]. Покажемо, що за умов (3) і (4) має місце оцінка (5). Продемонструємо це на прикладі функції $f_{11}(x_1, x_2)$ (для $f_{00}(x_1, x_2)$, $f_{01}(x_1, x_2)$, $f_{10}(x_1, x_2)$ доведення аналогічне).

Покладемо

$$\check{S}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sum_{(l_1, l_2) \in \check{Q}_{n_1 n_2}} a_{l_1 l_2} \sin l_1 x_1 \sin l_2 x_2,$$

$$\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = f_{11}(x_1, x_2) - \check{S}_{n_1 n_2}(x_1, x_2), \quad n_1, n_2 \in N_0.$$

Подамо наступний інтеграл у вигляді суми чотирьох інтегралів, які позначимо відповідно $I_1 - I_4$:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \left|\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\, dx_2 = \int_0^{\pi/(n_1+1)} \int_0^{\pi/(n_2+1)} \left|\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \int_0^{\pi/(n_1+1)} \int_{\pi/(n_2+1)}^{\pi} \left|\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\, dx_2 + \int_{\pi/(n_1+1)}^{\pi} \int_0^{\pi/(n_2+1)} \left|\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \int_{\pi/(n_1+1)}^{\pi} \int_{\pi/(n_2+1)}^{\pi} \left|\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\, dx_2. \tag{6}$$

Оцінимо останній доданок у (6). Позначимо через $\overline{D}_{k_i}(x_i)$ спряжене ядро Діріхле порядку k_i, $i = 1, 2$. У виразі $\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)$ за кожною змінною виконаємо перетворення Абеля:

$$\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sum_{k_1 = n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2 = n_2+1}^{\infty} a_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 =$$

$$= \sum_{k_1 = n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2 = n_2+1}^{\infty} \Delta^{12} a_{k_1 k_2} \overline{D}_{k_1}(x_1) \overline{D}_{k_2}(x_2) - \overline{D}_{n_1}(x_1) \sum_{k_2 = n_2+1}^{\infty} \Delta^2 a_{n_1+1\, k_2} \overline{D}_{k_2}(x_2) -$$

$$- \overline{D}_{n_2}(x_2) \sum_{k_1 = n_1+1}^{\infty} \Delta^1 a_{k_1\, n_2+1} \overline{D}_{k_1}(x_1) + a_{n_1+1\, n_2+1} \overline{D}_{n_1}(x_1) \overline{D}_{n_2}(x_2).$$

Враховуючи, що для $0 < x_i < \pi$, $i = 1, 2$, виконується нерівність

$$\left|\overline{D}_{k_i}(x_i)\right| \le \frac{\pi}{x_i}, \tag{7}$$

одержуємо

$$\left|\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\right| \le \frac{4\pi^2}{x_1 x_2} \sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a).$$

Тому при $\pi / (m_i + 1) < x_i \le \pi$, $m_i \in N$, $i = 1, 2$,

$$\left|\check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\right| \le 4(m_1+1)(m_2+1) \sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a) \le 16 m_1 m_2\, \sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a), \tag{8}$$

а отже,

$$I_4 = \sum_{m_1=1}^{n_1} \sum_{m_2=1}^{n_2} \int_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left| \check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right|^p dx_1\, dx_2 \le$$

$$\le 16^p \pi^2 \left(\sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a)\right)^p \sum_{m_1=1}^{n_1} \sum_{m_2=1}^{n_2} (m_1 m_2)^p \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_1+1}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_2+1}\right) \le C \left(\sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a)\right)^p \sum_{m_1=1}^{n_1} \sum_{m_2=1}^{n_2} (m_1 m_2)^{p-2} \le$$

$$\le C \left(\sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a)\right)^p (n_1+1)^{p-1} (n_2+1)^{p-1}.$$

Таким чином,

$$I_4 \le C (n_1+1)^{p-1} (n_2+1)^{p-1} \left(\sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a)\right)^p. \tag{9}$$

Оцінимо перший доданок у (6). Для довільних чисел a і b мають місце нерівності (див. [9, с. 31])

$$|a+b|^p \le \begin{cases} 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right), & \text{якщо} \quad p \ge 1, & (10) \\ |a|^p + |b|^p, & \text{якщо} \quad 0 \le p < 1. & (11) \end{cases}$$

Скориставшись першою з них, отримаємо

$$I_1 = \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \int_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left| \check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right|^p dx_1\, dx_2 \le$$

$$\le C \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \int_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left(\left| \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} a_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \right|^p + \right.$$

$$+ \left| \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} a_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \right|^p +$$

$$\left. + \left| \sum_{k_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} a_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \right|^p + \left| \check{R}_{m_1 m_2}(x_1, x_2) \right|^p \right) dx_1\, dx_2. \tag{12}$$

Позначимо доданки у (12):

$$s_1 = \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \int_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left| \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} a_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \right|^p dx_1\, dx_2,$$

$$s_2 = \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \int_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left| \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} a_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \right|^p dx_1\, dx_2,$$

$$s_3 = \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \int_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left| \sum_{k_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} a_{k_1 k_2} \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \right|^p dx_1\, dx_2,$$

$$s_4 = \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \int_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left| \check{R}_{m_1 m_2}(x_1, x_2) \right|^p dx_1\, dx_2$$

і оцінимо кожну суму окремо.

Оскільки

$$\left|\sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} a_{k_1k_2}\sin k_1x_1\sin k_2x_2\right| \le \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{k_2=n_2+1}^{m_2}\left|a_{k_1k_2}\right| \le$$

$$\le \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{k_2=n_2+1}^{m_2}\sigma_{k_1k_2}(a),$$

то

$$s_1 \le \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\int\limits_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1}\int\limits_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2}\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{k_2=n_2+1}^{m_2}\sigma_{k_1k_2}(a)\right)^p dx_1\,dx_2 \le$$

$$\le \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{k_2=n_2+1}^{m_2}\sigma_{k_1k_2}(a)\right)^p (m_1m_2)^{-2}. \tag{13}$$

Для оцінювання останнього виразу скористаємось доведеною Харді і Літтлвудом [10] (теорема 346) нерівністю

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}d_k\right)^p m^{-c} \le K(p,c)\sum_{m=1}^{\infty}(md_m)^p m^{-c},$$

де $d_m \ge 0,\ c > 1,\ p > 1,$ з якої випливає

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{m}d_k\right)^p m^{-2} \le C\sum_{m=n+1}^{\infty}(md_m)^p m^{-2}. \tag{14}$$

Оскільки, враховуючи (14),

$$\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\left(\sum_{k_2=n_2+1}^{m_2}\sum_{l_2=k_2}^{\infty}\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{l_1=k_1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|\right)\right)^p m_2^{-2} \le$$

$$\le C\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\left(\sum_{l_2=m_2}^{\infty}\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{l_1=k_1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|\right)\right)^p m_2^{p-2},$$

то з (13) одержуємо

$$s_1 \le C\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}m_1^{-2}\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\left(\sum_{l_2=m_2}^{\infty}\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{l_1=k_1}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|\right)\right)^p m_2^{p-2}.$$

Аналогічно,

$$\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\left(\sum_{k_1=n_1+1}^{m_1}\sum_{l_1=k_1}^{\infty}\left(\sum_{l_2=m_2}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|\right)\right)^p m_1^{-2} \le$$

$$\le C\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\left(\sum_{l_1=m_1}^{\infty}\left(\sum_{l_2=m_2}^{\infty}\left|\Delta^{12}a_{l_1l_2}\right|\right)\right)^p m_1^{p-2}.$$

Тому остаточно маємо

$$s_1 \le C\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty}\left(\sigma_{m_1m_2}(a)\right)^p (m_1m_2)^{p-2}. \tag{15}$$

Оцінимо s_2. У наступному виразі виконаємо перетворення Абеля за другою змінною та використаємо нерівність (7):

$$\left| \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} a_{k_1k_2} \sin k_1x_1 \sin k_2x_2 \right| =$$

$$= \left| \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sin k_1x_1 \left(\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \Delta^2 a_{k_1k_2} \overline{D}_{k_2}(x_2) - a_{k_1\, m_2+1} \overline{D}_{m_2}(x_2) \right) \right| \le$$

$$\le \frac{2\pi}{x_2} \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \left| \Delta^2 a_{k_1k_2} \right|.$$

Враховуючи, що $\pi / x_2 < 2m_2$ при $\pi / (m_2 + 1) < x_2 < \pi$, та застосовуючи (14), маємо

$$s_2 \le \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \int\limits_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int\limits_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left(4m_2 \sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \sum_{l_1=k_1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1k_2} \right| \right)^p dx_1\, dx_2 \le$$

$$\le C \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} m_2^{p-2} \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \left(\sum_{k_1=n_1+1}^{m_1} \sum_{l_1=k_1}^{\infty} \left(\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1k_2} \right| \right) \right)^p m_1^{-2} \le$$

$$\le C \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sum_{l_1=m_1}^{\infty} \sum_{l_2=m_2}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{l_1l_2} \right| \right)^p (m_1m_2)^{p-2}.$$

Отже,

$$s_2 \le C \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sigma_{m_1m_2}(a) \right)^p (m_1m_2)^{p-2}. \tag{16}$$

Аналогічно,

$$s_3 \le C \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sigma_{m_1m_2}(a) \right)^p (m_1m_2)^{p-2}. \tag{17}$$

З урахуванням (8) оцінимо s_4:

$$s_4 \le \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \left(16\, m_1m_2\, \sigma_{m_1+1\, m_2+1}(a) \right)^p (m_1m_2)^{-2} \le$$

$$\le C \sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sigma_{m_1m_2}(a) \right)^p (m_1m_2)^{p-2}. \tag{18}$$

Отже, з (12), враховуючи (15) – (18), одержуємо

$$I_1 \le C \sum_{k_1=n_1}^{\infty} \sum_{k_2=n_2}^{\infty} \left(\sigma_{k_1+1\, k_2+1}(a) \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2}. \tag{19}$$

Третій доданок в (6) подамо у вигляді

$$I_3 = \sum_{m_1=1}^{n_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \int\limits_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/m_1} \int\limits_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/m_2} \left| \check{R}_{n_1n_2}(x_1,x_2) \right|^p dx_1\, dx_2. \tag{20}$$

Виконаємо у виразі $\check{R}_{n_1n_2}(x_1,x_2)$ перетворення Абеля за першою змінною. При $m_2 \ge n_2 + 1$ матимемо

$$\left| \check{R}_{n_1n_2}(x_1,x_2) \right| = \left| \sum_{k_2=n_2+1}^{\infty} \sin k_2x_2 \left(\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \Delta^1 a_{k_1k_2} \overline{D}_{k_1}(x_1) - a_{n_1+1\, k_2} \overline{D}_{n_1}(x_1) \right) \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} \sin k_2 x_2 \left(\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \Delta^1 a_{k_1 k_2} \overline{D}_{k_1}(x_1) - a_{n_1+1\, k_2} \overline{D}_{n_1}(x_1) \right) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \sin k_2 x_2 \left(\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \Delta^1 a_{k_1 k_2} \overline{D}_{k_1}(x_1) - a_{n_1+1\, k_2} \overline{D}_{n_1}(x_1) \right) \right|.$$

Виконавши у виразі під останнім знаком модуля перетворення Абеля за другою змінною та врахувавши, що $\left|\overline{D}_{k_i}(x_i)\right| \le \pi / x_i < 2m_i$ при $\pi/(m_i+1) < x_i \le \pi$, $m_i \in N$, $i = 1, 2$, одержимо

$$\left| \check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right| \le 4 m_1 \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} \left| \Delta^1 a_{k_1 k_2} \right| + \left| \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \Delta^{12} a_{k_1 k_2} \times \right.$$

$$\times \overline{D}_{k_1}(x_1) \overline{D}_{k_2}(x_2) - \overline{D}_{n_1}(x_1) \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \Delta^2 a_{n_1+1\, k_2} \overline{D}_{k_2}(x_2) -$$

$$\left. - \overline{D}_{m_2}(x_2) \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \Delta^1 a_{k_1\, m_2+1} \overline{D}_{k_1}(x_1) + a_{n_1+1\, m_2+1} \overline{D}_{n_1}(x_1) \overline{D}_{m_2}(x_2) \right| \le$$

$$\le 4 m_1 \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} \sum_{l_2=k_2}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{k_1 l_2} \right| + 16 m_1 m_2 \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{k_1 k_2} \right|.$$

З (20), враховуючи останню оцінку, нерівності (10) та (14), одержуємо

$$I_3 \le C \left(\sum_{m_1=1}^{n_1} m_1^{p-2} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sum_{k_2=n_2+1}^{m_2} \sum_{l_2=k_2}^{\infty} \left(\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{k_1 l_2} \right| \right) \right)^p m_2^{-2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m_1=1}^{n_1} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{k_1 k_2} \right| \right)^p (m_1 m_2)^{p-2} \right) \le$$

$$\le C \sum_{m_1=1}^{n_1} m_1^{p-2} \sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=m_2}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{k_1 k_2} \right| \right)^p m_2^{p-2} \le$$

$$\le C (n_1+1)^{p-1} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} \left(\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{k_2=m_2+1}^{\infty} \left| \Delta^{12} a_{k_1 k_2} \right| \right)^p (m_2+1)^{p-2}.$$

Отже,

$$I_3 \le C (n_1+1)^{p-1} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} \left(\sigma_{n_1+1\, m_2+1}(a) \right)^p (m_2+1)^{p-2}. \tag{21}$$

Для другого доданка в (6) має місце аналогічне співвідношення

$$I_2 \le C (n_2+1)^{p-1} \sum_{m_1=n_1}^{\infty} \left(\sigma_{m_1+1\, n_2+1}(a) \right)^p (m_1+1)^{p-2}. \tag{22}$$

Таким чином, з (6) на підставі (9), (19), (21) і (22) отримуємо

$$\left\| \check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p^p \le C \left((n_1+1)^{p-1} (n_2+1)^{p-1} \left(\sigma_{n_1+1\, n_2+1}(a) \right)^p + \right.$$

$$+ (n_1+1)^{p-1} \sum_{k_2=n_2}^{\infty} \left(\sigma_{n_1+1\, k_2+1}(a) \right)^p (k_2+1)^{p-2} +$$

$$+ (n_2+1)^{p-1} \sum_{k_1=n_1}^{\infty} \left(\sigma_{k_1+1\, n_2+1}(a)\right)^p (k_1+1)^{p-2} +$$

$$+ \sum_{k_1=n_1}^{\infty} \sum_{k_2=n_2}^{\infty} \left(\sigma_{k_1+1\, k_2+1}(a)\right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \Bigg), \tag{23}$$

звідки, враховуючи (11) та нерівність $E_{n_1 n_2}(f_{11})_p \le \left\| \check{R}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \right\|_p$, одержуємо оцінку (5) для функції $f_{11}(x_1, x_2)$.

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай елементи послідовності* $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, *задовольняють умови*

$$a_{l_1 l_2} \to 0 \quad \textit{при} \quad l_1 + l_2 \to \infty, \tag{24}$$

$$\Delta^{12} a_{l_1 l_2} \ge 0 \quad \textit{для} \quad (l_1, l_2) \in Z_+^2, \tag{25}$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_1 k_2}^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} < \infty \tag{26}$$

при деякому p, $1 < p < \infty$. *Тоді для функцій* $f_{ij}(x_1, x_2)$, i, $j \in \{0, 1\}$, *справедливою є оцінка*

$$E_{n_1 n_2}(f_{ij})_p \le C\Bigg((n_1+1)^{1/p'} (n_2+1)^{1/p'} a_{n_1+1\, n_2+1} + (n_1+1)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\sum_{k_2=n_2}^{\infty} a_{n_1+1\, k_2+1}^p (k_2+1)^{p-2} \right)^{1/p} + (n_2+1)^{1/p'} \left(\sum_{k_1=n_1}^{\infty} a_{k_1+1\, n_2+1}^p (k_1+1)^{p-2} \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\sum_{k_1=n_1}^{\infty} \sum_{k_2=n_2}^{\infty} a_{k_1+1\, k_2+1}^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \right)^{1/p} \Bigg), \tag{27}$$

де $p' = p/(p-1)$, $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$.

Зауваження. Якщо елементи послідовності $\{b_k\}$, $k \in N_0$, такі, що $b_k \to$ $\to 0$, $k \to \infty$, і при деякому p, $1 < p < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\Delta b_i| \right)^p (k+1)^{p-2} < \infty$, то справджується співвідношення (2) і для функції

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{28}$$

має місце одновимірний аналог нерівності (23) (див. [3]):

$$\| g(x) - S_n(x) \|_{L_p(\cdot)}^p \le C\left((n+1)^{p-1} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\Delta b_i| \right)^p + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} |\Delta b_i| \right)^p (k+1)^{p-2} \right), \tag{29}$$

де $S_n(x)$ — n-та частинна сума ряду (28), $n = 0, 1, \ldots$.

Враховуючи (11), з (29) при $n = 0$ отримуємо оцінку

$$\| g(x) - S_0(x) \|_{L_p(\cdot)} \le C\Bigg(\sum_{i=1}^{\infty} |\Delta b_i| + \Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} |\Delta b_i| \right)^p \times$$

$$\times (k+1)^{p-2} \Bigg)^{1/p} \Bigg) \le C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} |\Delta b_i| \right)^p (k+1)^{p-2} \right)^{1/p}. \tag{30}$$

Зауваження справедливе також для функції

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

Теорема 2. *Якщо елементи послідовності* $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, *задовольняють умови* (3) *і* (4), *то функції* $f_{ij}(x_1, x_2) \in L_p$, $1 < p < \infty$, $i, j \in \{0, 1\}$, *і має місце оцінка*

$$\left\| f_{ij}(x_1, x_2) \right\|_p \leq C \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sigma_{k_1 k_2}(a) \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \right)^{1/p}. \tag{31}$$

Доведення. Покажемо, що теорема має місце для функції $f_{00}(x_1, x_2)$ (для $f_{01}(x_1, x_2)$, $f_{10}(x_1, x_2)$, $f_{11}(x_1, x_2)$ доведення аналогічне).

Враховуючи (11), з нерівності (23) при $n_1 = n_2 = 0$ маємо

$$\| \check{R}_{00}(x_1, x_2) \|_p \leq C \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sigma_{k_1+1\, k_2+1}(a) \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \right)^{1/p}. \tag{32}$$

Якщо для послідовності $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, виконується (3), то $a_{l_1 l_2} \to 0$ при $l_2 \to \infty$ і будь-якому фіксованому l_1 або при $l_1 \to \infty$ і будь-якому фіксованому l_2. Крім того, умова (4) забезпечує збіжність цього ряду за кожним з індексів при фіксованому іншому. Зазначені факти гарантують виконання умов, сформульованих у зауваженні, та дозволяють використати нерівність (30) у наступній оцінці. Отже, враховуючи (30) та (32), одержуємо

$$\| f_{00}(x_1, x_2) \|_p \leq C \left(\| \check{R}_{00}(x_1, x_2) \|_p + \| \check{S}_{00}(x_1, x_2) \|_p \right) \leq$$

$$\leq C \left(\| \check{R}_{00}(x_1, x_2) \|_p + \| a_{00} \|_p + (2\pi)^{1/p} \left(\left\| \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1 0} \cos k_1 x_1 \right\|_{L_p(\cdot)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\| \sum_{k_2=1}^{\infty} a_{0\, k_2} \cos k_2 x_2 \right\|_{L_p(\cdot)} \right) \right) \leq$$

$$\leq C \left(\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sigma_{k_1+1\, k_2+1}(a) \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \right)^{1/p} + \sigma_{00}(a) + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\sigma_{k_1+1\, 0}(a) \right)^p (k_1+1)^{p-2} \right)^{1/p} + \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sigma_{0\, k_2+1}(a) \right)^p (k_2+1)^{p-2} \right)^{1/p} \right) \leq$$

$$\leq C \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sigma_{k_1 k_2}(a) \right)^p (k_1+1)^{p-2} (k_2+1)^{p-2} \right)^{1/p}.$$

Таким чином, функція $f_{00}(x_1, x_2) \in L_p$ і для неї має місце оцінка (31).

Теорему доведено.

***Наслідок* 2.** *Якщо послідовність* $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, *задовольняє умови* (24) – (26), *то функції* $f_{ij}(x_1, x_2) \in L_p$, $1 < p < \infty$, $i, j \in \{0, 1\}$, *і має місце оцінка*

$$\left\| f_{ij}(x_1, x_2) \right\|_p \le C \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} a_{k_1k_2}^p (k_1+1)^{p-2}(k_2+1)^{p-2} \right)^{1/p}. \tag{33}$$

Враховуючи, що з $f_{ij}(x_1, x_2) \in L_p$, $1 < p < \infty$, випливає $f_{ij}(x_1, x_2) \in L$, де i, $j \in \{0, 1\}$, отримуємо таке твердження (див. [11, 12]).

Наслідок 3. *Якщо послідовність* $\{a_{l_1 l_2}\}$, $(l_1, l_2) \in Z_+^2$, *задовольняє умови* (3) *і* (4) *або* (24) – (26), *то ряди вигляду* (1) *є рядами Фур'є своїх сум.*

Зауважимо, що оцінку (27) для функції $f_{00}(x_1, x_2)$ встановлено у [7]. Нерівність (33) для $f_{11}(x_1, x_2)$ при $p \ge 1$ одержано в роботі [5], а для функцій $f_{ij}(x_1, x_2)$, $i, j \in \{0, 1\}$, при $0 < p < \infty$ — у [6], де також доведено її точність за порядком при $1 < p < \infty$.

1. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**, № 1. – С. 53 – 84.
2. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении / Пер. с англ.: В 2 т. – М.: Мир, 1985. – Т.2. – 400 с.
3. *Кононович Т. О.* Оцінка найкращого наближення періодичних функцій в метриці L_p // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **36**. – С. 83 – 88.
4. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении / Пер. с англ.: В 2 т. – М.: Мир, 1985. – Т.1. – 262 с.
5. *Moricz F.* On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – **109**, № 2. – P. 417 – 425.
6. *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* Оценки норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Сер. мат. – 1994. – **386**, № 7. – С. 20 – 28.
7. *Вуколова Т. М.* О конструктивных свойствах функций, представимых тригонометрическими рядами по косинусам с монотонными коэффициентами. – М., 1988. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 7049-В88.
8. *Задерей П. В.* Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 340 – 365.
9. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
10. *Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
11. *Талалян А. А.* О единственности двойных тригонометрических рядов // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. – 1985. – **20**, № 6. – С. 426 – 462.
12. *Талалян А. А.* О некоторых свойствах единственности кратных тригонометрических рядов и гармонических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 3. – С. 621 – 650.

Отримано 05.08.2003