УДК 517.925.7

А. З. Мохонько, В. Д. Мохонько (Нац. ун-т „Львов. политехника")

О ВОЗРАСТАНИИ МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ*

We prove that if an analytic function f with isolated singular point in ∞ is a solution of the differential equation $P(z, \ln z, f, f') = 0$, where P is a polynomial of all variables, then f is of a finite order. We study asymptotic properties of a meromorphic solution with logarithmic singular point.

Доведено, що коли аналітична функція f з ізольованою особливою точкою у ∞ є розв'язком диференціального рівняння $P(z, \ln z, f, f') = 0$ (P — многочлен по всіх змінних), то f має скінченний порядок. Вивчаються асимптотичні властивості мероморфного розв'язку із логарифмічною особливою точкою.

Уравнения первого порядка, алгебраические относительно неизвестной функции и ее производной, не могут иметь в интегралах подвижных трансцендентных и существенно особых точек [1, с. 54], однако могут иметь неподвижные трансцендентные и существенно особые точки. Так, интеграл уравнения $2zff' = 1$ имеет вид $f(z) = \sqrt{\ln(z/C)}$, $C = \text{const}$. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\sum_{s+j=n} p_{sj}(z) z^{a_{sj}} (\ln z)^{b_{sj}} f'^{s} f^{j} = \sum_{s+j\le n-1} p_{sj}(z) z^{a_{sj}} (\ln z)^{b_{sj}} f'^{s} f^{j}, \tag{1}$$

$$\sum_{s+j=n} p_{sj}(z) z^{a_{sj}} f'^{s} f^{j} = \sum_{s+j\le n-1} p_{sj}(z) z^{a_{sj}} (\ln z)^{b_{sj}} f'^{s} f^{j}, \tag{2}$$

a_{sj}, $b_{sj} \in \mathbb{R}$; $p_{sj}(z)$, $z \in G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$ — аналитические функции,

$$p_{sj}(z) = c_{sj} + o(1), \quad z \to \infty, \quad c_{sj} \in \mathbb{C}, \quad c_{sj} \ne 0,$$
$$\text{если} \quad p_{sj}(z) \not\equiv 0, \quad z \in G. \tag{3}$$

Если $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — целое трансцендентное решение уравнения $P(z, f, f') = 0$, P — многочлен по всем переменным, $M(r, f) = \max |f(z)|$, $z \in \{z : |z| = r\}$, то из соотношения Вимана – Валирона [2, с. 220] следует оценка роста этого решения

$$\ln M(r, f) = (c + o(1)) r^{\rho}, \quad c, \rho = \text{const}, \quad r \to +\infty. \tag{4}$$

Метод Вимана – Валирона использует возможность представления целой функции сходящимся в $\mathbb{C}$ рядом Тейлора и неприменим к многозначным аналитическим или мероморфным решениям. В настоящей статье получены асимптотические оценки роста мероморфных решений f уравнений (1), (2) с логарифмической особой точкой. В случае целых решений из этих оценок следует соотношение (4). Уточним, как мы понимаем операции над многозначными функциями. Рассмотрим круг $g = \{z : |z - r_0| < \varepsilon\}$, r_0, $\varepsilon > 0$, ε — достаточно малое. Выберем правильные элементы [3, с. 480] $\exp(a_{sj} \ln_0 z)$, $(\ln_0 z)^{b_{sj}}$, $z \in g$, соответственно функций $z^{a_{sj}} = \exp(a_{sj} \ln z)$, $(\ln z)^{b_{sj}}$, $s + j = 0$,

* Выполнена при поддержке INTAS (проект № 99-00089).

$1, \ldots, n$. Предположим, что существует правильный элемент $f_0(z)$, $z \in g$, такой, что при подстановке $f_0(z)$, $\exp(a_{sj} \ln_0 z)$, $(\ln_0 z)^{b_{sj}}$, $z \in g$, в (1) вместо соответственно f, $z^{a_{sj}}$, $(\ln z)^{b_{sj}}$ образуется тождество при $z \in g$. Мы предполагаем, что элемент $f_0(z)$, $z \in g$, можно аналитически продолжить вдоль любой непрерывной кривой $z = \lambda(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, $\lambda(t_0) = r_0$, $\lambda(t_1) = z_1$, принадлежащей G, причем результатом продолжения является либо правильный элемент $f_1(z)$, $z \in \{z: |z - z_1| < \varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 > 0$, либо элемент, имеющий в точке z_1 неразветвленный полюс. Предположим, что для любого $z_1 \in G$ существует бесконечное множество различных элементов указанного вида с центром z_1, которые являются аналитическими продолжениями элемента $f_0(z)$, $z \in g$. Множество таких элементов обозначим через $f(z)$, $z \in G$. Будем говорить, что $f(z)$, $z \in G$, — мероморфная функция с логарифмической особой точкой в ∞.

Выберем произвольные α, β, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Пусть, например, $\alpha > 0$. Рассмотрим кривую $z = r_0 e^{it} = \mu(t)$, $0 \le t \le \alpha$, $\mu(0) = r_0$, $\mu(\alpha) = r_0 e^{i\alpha}$. Аналитически продолжим элемент $f_0(z)$, $z \in g$, вдоль кривой $\mu(t)$, $0 \le t \le \alpha$. В результате продолжения получим элемент $f_\alpha(z)$ с центром в точке $r_0 e^{i\alpha}$. Аналитически продолжим этот элемент вдоль всевозможных кривых $z = r(t) e^{i\theta(t)}$, $t \in [t_1, t_2]$, где $r(t)$, $\theta(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, — непрерывные функции, такие, что $r_0 \le r(t) < \infty$, $\alpha \le \theta(t) \le \beta$, $t_1 \le t \le t_2$. Множество элементов, полученных в результате таких продолжений, обозначим через

$$f(z), \; z \in g_{\alpha\beta} = \{z = re^{i\theta}: \alpha \le \theta \le \beta, \; r_0 \le r < +\infty\}, \tag{5}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — угловая область на римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$. Если $\beta - \alpha < 2\pi$, то согласно теореме о монодромии [3, с. 488] функция (5) — однозначная аналитическая функция в области $g_{\alpha\beta} \subset \mathbb{C}$. Если $\beta - \alpha \ge 2\pi$, то область $g_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как односвязную область на римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$. В этой области применима теорема о монодромии. Поэтому (5) — однозначная аналитическая функция на куске римановой поверхности $g_{\alpha\beta}$.

Будем предполагать, что асимптотические соотношения (3) выполняются равномерно по θ в любой угловой области $g_{\alpha\beta}$, а именно $(\forall \alpha, \beta;\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty)$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)$: $p_{sj}(z) = c_{sj} + v_{sj}(z)$, $|v_{sj}(z)| < \varepsilon$, $z \in \{z = re^{i\theta}: d \le r < +\infty,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$, $v_{sj}(z)$ — некоторая аналитическая функция.

Замечание **1.** Пусть $f(z)$ — аналитическая функция с изолированной существенно особой точкой в ∞ или n-значная аналитическая функция с алгебраической точкой ветвления в ∞. Запишем ее аргумент в показательной форме; функция $f(re^{i\theta})$, $r_0 \le r < +\infty$, $-\infty < \theta < +\infty$, имеет по θ период 2π (период $2n\pi$). Это позволяет рассматривать функцию $f(re^{i\theta})$ с существенно особой точкой (с алгебраической точкой ветвления) как разновидность функции с логарифмической особой точкой в ∞, имеющей по θ период 2π (период $2n\pi$.) Аналогично, если $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — мероморфная функция, то $f(re^{i\theta})$, $r_0 \le r < +\infty$, $-\infty < \theta < +\infty$, имеет по θ период 2π. Поэтому мероморфная функция $f(re^{i\theta})$ — частный случай мероморфной функции с логарифмической особой точкой в ∞.

Определим порядок роста бесконечнозначной функции $f(z)$, $z \in G$. Выберем произвольные α, β, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Рассмотрим угловую область $g_{\alpha\beta}$ и соответствующую однозначную ветвь $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$ (см. (5)). Вначале предположим, что $f(z)$, $z \in G$, не имеют полюсов. Пусть $M_{\alpha\beta}(r, f) = \max|f(z)|$, $z \in \in \{z = te^{i\theta}: R_1 \le t \le r,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$. Для $x \in \mathbb{R}$ обозначим $x^\wedge = \max(x, 1)$. Положим

$$\rho^{\circ}_{\alpha\beta} = \overline{\lim} \frac{\ln\left(\ln M_{\alpha\beta}(r, f)\right)^\wedge}{\ln r}, \quad r \to +\infty. \tag{6}$$

Назовем порядком роста функции $f(z)$, $z \in G$, величину

$$\rho^* = \sup \rho^{\circ}_{\alpha\beta} \quad \forall\, \alpha, \beta, \quad -\infty < \alpha < \beta < +\infty. \tag{7}$$

Если f — функция с существенно особой точкой или с алгебраической точкой ветвления в ∞, то порядок ее роста, определяемый формулами (6), (7), совпадает с порядком, определяемым обычным способом [4, с. 61, 65].

Если $f(z)$, $z \in G$, — мероморфная функция с логарифмической особой точкой в ∞, то рассмотрим неванлинновскую характеристику $S_{\alpha\beta}(r, f)$ ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$ [4, с. 40], и положим $p_{\alpha\beta} = \overline{\lim} \ln\left(S_{\alpha\beta}(r, f)\right)^\wedge / \ln r$, $r \to +\infty$. Порядком роста функции $f(z)$, $z \in G$, называется величина $p = \sup p_{\alpha\beta}$ $\forall\, \alpha, \beta$, $-\infty < \alpha < < \beta < +\infty$. Можно показать, что если $f(z)$, $z \in G$, не имеет полюсов, то порядки ρ^* и p этой функции либо конечны, либо бесконечны.

Пусть k — наибольшая степень, в которой f' входит в уравнение (1), $\xi = = \max\{a_{kj}: c_{kj} \ne 0\}$, $\mu = \max\{(a_{kj} - \xi)/(k - s): c_{sj} \ne 0,\ s \le k - 1\}$. Если мероморфная функция $f(z)$, $z \in G$, с логарифмической особой точкой в ∞ является решением уравнения (1), то порядок роста решения $p \le \max(0, 2\mu + 2)$ [5] (теорема 1), [6]. Если это решение имеет в ∞ изолированную логарифмическую особую точку, то $(\forall\, \alpha, \beta;\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty)$ $(\exists\, c = c(\alpha, \beta) > 0)$:

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \begin{cases} cr^{2\mu+1}, & \mu > \dfrac{1}{2}; \\ cr\ln r, & \mu = \dfrac{1}{2}, \\ cr, & \mu < \dfrac{1}{2}. \end{cases} \quad r > r_0,\ \alpha \le \theta \le \beta; \tag{8}$$

Отсюда и из (6), (7) следует, что функция f имеет конечный порядок роста. Поэтому с учетом замечания 1 справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если решением уравнения* (1) *является аналитическая функция f с изолированной особой точкой в ∞ или мероморфная функция с логарифмической особой точкой в ∞, то ее порядок роста $p < +\infty$.*

Пусть E — некоторое множество кругов на части римановой поверхности $g_{\alpha\beta}$ с центрами в нулях и полюсах ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, с конечной суммой радиусов. Положим $M_*(r, f) = \max|f(z)|$, $z \in \{z = |z|e^{i\theta}: \alpha \le \theta \le \beta,\ R_1 \le |z| \le \le r\} \setminus E$.

Теорема 2. *Если мероморфная функция $f(z)$, $z \in G$, с логарифмической особой точкой в ∞ является решением уравнения* (2), *то либо для любой ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$* $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)$:

$$|f(z)| \le |z|^{\kappa+\varepsilon}, \quad z \in \{z = |z|e^{i\theta} : \alpha \le \theta \le \beta,\ d \le |z| < +\infty\} \setminus E, \tag{9}$$

либо $(\exists\, \alpha', \beta'; \alpha' < \beta')\ (\forall\, \alpha, \beta;\ \alpha \le \alpha' < \beta' \le \beta)$:

$$\ln M_*(r,f) = (c + o(1))r^{\rho}, \quad r \to +\infty, \quad c, \rho > 0. \tag{10}$$

Числа c, κ *и* ρ *определяются видом уравнения.*

Замечание 2. Если целая функция $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, — решение уравнения (2), то из соотношений (9), (10) следует, что либо f — многочлен степени $\le \kappa$, либо f — целая трансцендентная функция порядка $\rho > 0$. Неравенство (9) выполняется для функции Вейерштрасса $\wp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — мероморфного решения уравнения $f'^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3$, $g_2, g_3 = \mathrm{const}$ [3, с. 362]. Целая функция $\cos\sqrt{z}$ — решение уравнения $f^2 + 4zf'^2 = 1$, для нее справедлива оценка $\ln M(r,f) = (1 + o(1))r^{1/2}$, $r \to +\infty$, $M(r,f) = \max|f(z)|$, $z \in \in \{z : |z| = r\}$.

Теорема 3. *Пусть мероморфная функция* $f(z)$, $z \in G$, *с логарифмической особой точкой в* ∞ *является решением уравнения* (1). *Тогда возможны три случая:*

1) *для любой ветви* $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$ $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)$:

$$\begin{gathered} \ln f(z) = \ln^{\tau+1} z(b + v(z)), \quad |v(z)| < \varepsilon, \\ z \in g_{\alpha\beta}, \quad |z| > d, \quad \tau > 0, \quad b \in \mathbb{C}; \end{gathered} \tag{11}$$

2) *для любой ветви* $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$ $(\forall\, \varepsilon > 0)$ $(\exists\, d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)$:

$$\ln|f(z)| < \varepsilon \ln^{\tau+1}|z|, \quad z \in \{z = |z|e^{i\theta} : \alpha \le \theta \le \beta,\ d \le |z| < +\infty\} \setminus E; \tag{12}$$

3) $(\exists\, \alpha', \beta'; \alpha' < \beta')\ (\forall\, \alpha, \beta;\ \alpha \le \alpha' < \beta' \le \beta)$

$$\ln M_*(r,f) = (c + o(1))r^{\rho}\ln^{\tau} r, \quad r \to +\infty, \quad c, \rho > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Числа c, b, τ *и* ρ *определяются видом уравнения.*

Пример. Функция $\exp(\ln^2 z)$ является решением уравнения $zf' = 2f\ln z$, для нее выполняется соотношение (11).

Доказательство теоремы 2. Пусть в (2), (3) $m = \max\{s : s + j = n,\ c_{sj} \ne \ne 0\}$, $q = \min\{s : s + j = n,\ c_{sj} \ne 0\}$. Разделим (2) на $f^n p_{m,n-m}(z) z^{a_{m,n-m}}$, где $p_{m,n-m}(z) = c_{m,n-m} + o(1)$, $c_{m,n-m} \ne 0$. После преобразования и переобозначения коэффициентов и показателей степеней уравнение (2) можно представить в виде

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^m + \sum_{s=1}^{m-q}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{m-s}(c_s + o(1))z^{d_s} = \omega(z), \quad z \to \infty, \quad q \ge 0; \tag{14}$$

$$\omega(z) = \sum_{s+j \le n-1}\left(c_{sj}^{\circ} + o(1)\right)z^{m + a_{sj} - a_{m,n-m}} \ln^{b_{sj}} z \frac{(f'/f)^s}{f^{n-s-j}}, \tag{15}$$

c_s, $c_{sj}^{\circ} \in \mathbb{C}$, $c_{m-q} \ne 0$, $d_s \in \mathbb{R}$. Обозначив

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = L(z), \quad c_0 = 1, \quad d_0 = 0, \tag{16}$$

перепишем уравнение (14) в виде

$$\sum_{s=0}^{m-q}(c_s+o(1))z^{d_s}L^{m-s}(z) = \omega(z), \quad z\to\infty, \qquad c_0 = 1, \quad d_0 = 0, \quad c_{m-q}\neq 0. \tag{17}$$

Для множества $F=\{(s,d_s): c_s\neq 0,\ s\in\{0,1,\dots,m-q\}\}$ точек плоскости построим ломаную Ньютона: рассмотрим выпуклую оболочку множества F; границей оболочки является многоугольник, который точками $(0,d_0)$ и $(m-q, d_{m-q})$ делится на две ломаные линии, верхняя из которых — ломаная Ньютона. Пусть ее вершины имеют абсциссы $0=i_0<i_1<\dots<i_T=m-q$. Обозначим $\rho_s = \left(d_{i_s}-d_{i_{s-1}}\right)/(i_s-i_{s-1})$, $s=1,\dots,T$; ρ_s — угловые коэффициенты отрезков ломаной Ньютона, $\rho_1>\rho_2>\dots>\rho_T$. Обозначим $\rho_s(m-q-j)+d_j=l(j,s)$, $j=0, 1,\dots,m-q$. Из свойств ломаной Ньютона следует $l(i_{s-1},s)=l(i_s,s) = \max_{j=0,\dots,m-q}l(j,s)=l(s)$. Положим $\upsilon=\max(-\rho_T,0)$, $l=\max((-l_s,0))$, $s = 1,\dots,T$. Известна (см. [7]) следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть непрерывная функция $L(z)$, $z\in E_*$, — решение уравнения* (17), *коэффициенты которого непрерывны на неограниченном множестве E_*,*

$$\omega(z) = O\left(z^{-2(l+\upsilon q)-\varepsilon}\right), \quad z\to\infty, \quad \varepsilon>0, \quad z\in E_*, \tag{18}$$

E_0 — связная компонента множества E_*. Тогда если в (17) *$q=0$, то*

$$L(z) = (b+u(z))z^{\rho}, \quad z\in E_0, \qquad |u(z)|<\varepsilon_1, \quad |z|>r(\varepsilon_1), \quad \rho\in\mathbb{R}, \quad b\in\mathbb{C}, \tag{19}$$

$b\neq 0$, $\varepsilon_1>0$, ρ — одно из чисел $\rho_1,\dots,\rho_T$, b — одно из $m-q$ чисел $b_j = |b_j|e^{i\tau_j}$, определяемых видом уравнения (17); *числа $b=b(E_0)$, $\rho=\rho(E_0)$ не изменяются в пределах компоненты E_0. Если $q\geq 1$, то либо на E_0 выполняется* (19), *либо*

$$|L(z)| < M|z|^{-\upsilon-\varepsilon_2}, \quad z\in E_0, \quad \upsilon\geq 0, \quad \varepsilon_2>0, \quad M=\mathrm{const}. \tag{20}$$

Если среди значений $\rho_1,\dots,\rho_T$, которые ρ может принимать в формуле (19), есть $\rho_j>0$, то для всех таких ρ_j и соответствующих им, согласно (19), значений $b_j=|b_j|e^{i\tau_j}$ определим множества чисел

$$\varphi_j = \varphi(j,k) = \frac{2\pi k-\tau_j}{\rho_j}, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad \alpha_j = \varphi_j - \frac{\pi}{2\rho_j}, \quad \beta_j = \varphi_j + \frac{\pi}{2\rho_j} \tag{21}$$

(величины ρ_j, τ_j принимают конечное число возможных значений).

Как следует из теоремы 1, решение $f(z)$, $z\in G$, имеет порядок роста $p<\infty$. Выберем произвольные α,β, $-\infty<\alpha<\beta<+\infty$. Пусть A, B такие, что $A<\alpha < \beta<B$. Рассмотрим ветви $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}=\{z=re^{i\theta}:\alpha\leq\theta\leq\beta,\ r_0\leq r<\infty\}$, и $f(z)$, $z\in g_{AB}=\{z=re^{i\theta}: A\leq\theta\leq B,\ r_0\leq r<\infty\}$, функции $f(z)$, $z\in G$. Пусть

$\{c_q\}$ — множество нулей и полюсов ветви $f(z)$, $z \in g_{AB}$. Выберем $\varepsilon > 0$ и для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим окружность с центром c_q радиуса $\delta_q = |c_q|^{-p-1-\varepsilon/2}$. Пусть E — множество точек области g_{AB} римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$, лежащих внутри этих окружностей. Тогда [5] (лемма 4) $\exists\, d = d(A, B, \varepsilon) > 0$:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < |z|^{2p+2+\varepsilon}, \quad z \in g_{AB}\backslash E, \quad |z| \geq d,$$
$$\sum \delta_q = \sum |c_q|^{-p-1-\varepsilon/2} < K = \text{const} < +\infty, \quad c_q \in g_{AB}. \tag{22}$$

Отсюда следует, что E — множество кругов с конечной суммой радиусов $< K$. Поскольку $g_{\alpha\beta} \subset g_{AB}$, то соотношение (22) выполняется для любого z, $z \in g_{\alpha\beta}\backslash E$, $|z| \geq d$. Далее, рассматривая множество $g_{\alpha\beta}$, полагаем, что $|z| \geq d = d(A, B, \varepsilon)$.

Можно считать, что α и β не совпадают ни с одним из чисел φ_j, α_j, β_j и лучи $S(\alpha) = \{z : z = re^{i\alpha},\ r \geq d\}$, $S(\beta) = \{z : z = re^{i\beta},\ r \geq d\}$ не пересекаются с E, когда d — достаточно большое. Действительно, пусть одно из этих условий не выполняется для α. Множество чисел φ_j, α_j, β_j, определенных в (21), не имеет в $\mathbb{R}$ точек сгущения. Поэтому существуют α', α'', $A \leq \alpha' < \alpha'' \leq \alpha$, такие, что ни одно из чисел φ_j, α_j, β_j не принадлежит отрезку $[\alpha', \alpha'']$. Поскольку E — множество кругов с конечной суммой радиусов, то существует α_*, $\alpha' < \alpha_* < \alpha''$ $(\exists\, d = d(\alpha', \alpha'') > 0)$ такое, что луч $S(\alpha_*) = \{z : z = re^{i\alpha_*},\ r \geq d\}$ не пересекает круги из множества E $(S(\alpha_*) \cap E = \varnothing)$ [7] (формула (31)). Аналогично, существует β_*, $\beta \leq \beta_* < B$, такое, что β_* не совпадает ни с одним из чисел φ_j, α_j, β_j и луч $S(\beta_*) = \{z : z = re^{i\beta_*},\ r \geq d\}$ не пересекает множество кругов E $(S(\beta_*) \cap E = \varnothing)$. Поэтому вместо ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, можно рассмотреть ветвь $f(z)$, $z \in g_{\alpha_*\beta_*}$, где $A < \alpha_* \leq \alpha < \beta \leq \beta_* < B$, значения α_*, β_* отличны от чисел φ_j, α_j, β_j и $E \cap (S(\alpha_*) \cup S(\beta_*)) = \varnothing$.

Положим $\zeta = \max\left(2p + 2, \max_{j=1,\ldots,T} \rho_j\right)$. Учитывая неравенство (22), имеем $|f'(z)/f(z)| < |z|^{\zeta+\varepsilon}$, $z \in g_{\alpha\beta}\backslash E$, поэтому множество

$$Q = \left\{z : z \in g_{\alpha\beta},\ \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| > |z|^{\zeta+\varepsilon}\right\} \subset E. \tag{23}$$

Пусть ∂Q — граница множества Q. Поскольку функции $|z|^{\zeta+\varepsilon}$, $|f'(z)/f(z)|$ непрерывны, то с учетом формулы (23) получаем

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = |z|^{\zeta+\varepsilon}, \quad z \in \partial Q, \tag{24}$$

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq |z|^{\zeta+\varepsilon}, \quad z \in g_{\alpha\beta}\backslash Q, \quad Q \subset E. \tag{25}$$

Обозначим

$$\kappa = \max\left[\max_{j=1,\ldots,m-q} |b_j|;\ \max_{k+s\leq n-1}\left(m + a_{sj} - a_{m,n-n} + s\zeta + 2(l + vq)\right)\right], \tag{26}$$

$$E_1 = \{z : z \in g_{\alpha\beta},\ |f(z)| \geq |z|^{\kappa+\sigma}\},$$
$$E_2 = g_{\alpha\beta} \setminus E_1, \quad \sigma = (n+1)\varepsilon > 0. \tag{27}$$

Учитывая (25), (26), находим

$$\left| \left(c_{sj}^{\circ} + o(1)\right) z^{m+a_{sj}-a_{m,n-m}} (\ln z)^{b_{sj}} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{s} \right| < |z|^{\kappa+n\varepsilon-2(l+\nu q)},$$
$$z \in g_{\alpha\beta} \setminus Q, \quad |z| > R_1.$$

Отсюда и из (14) – (16), (27) следует, что на множестве $E_* = E_1 \setminus Q$ выполняется условие (18) леммы, и (17) имеет вид

$$\sum_{s=0}^{m-q} (c_s + o(1)) z^{d_s} (L(z))^{m-s} = o(1), \quad z \in E_1 \setminus Q, \quad |z| \to +\infty,$$
$$c_0 = 1, \quad d_0 = 0, \quad c_{m-q} \neq 0. \tag{28}$$

Если (28) не зависит от L, то в левой части (2) только одно слагаемое $p_{0n}(z) z^{a_{0n}} f^{n}$, $p_{0n}(z) = c_{0n} + o(1) \neq 0$, $c_{0n} \neq 0$, имеет степень n по f и f'. Тогда существует $R_1 > 0$ такое, что $\{z : z \in E_1 \setminus Q,\ |z| > R_1\} = \varnothing$. Действительно, в противном случае уравнение (28) имеет вид $c_0 + o(1) = o(1)$, $z \in E_1 \setminus Q$, $|z| \to +\infty$, а значит, $c_0 = 0$. Получили противоречие. Поэтому из (27) следует $|f(z)| < |z|^{\kappa+\sigma}$, $z \in g_{\alpha\beta} \setminus Q$, $|z| > R_1$, т. е. в рассматриваемом случае выполняется (9). Отметим, что в примере с функцией Вейерштрасса $\wp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, рассмотренном в замечании 2, уравнение (28) не зависит от L, поэтому для нее справедлива оценка (9).

Пусть (28) зависит от L. Учитывая (16), (19), (20), убеждаемся, что либо для любого $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$ существует $R > 0$ такое, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (b + u(z)) z^{\rho-1}, \quad z \in E_0 \subset E_1 \setminus Q,$$
$$|u(z)| < \frac{\delta}{2}, \quad |z| \geq R, \quad b \neq 0, \tag{29}$$

либо выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < M|z|^{-\nu-\varepsilon_2-1}, \quad z \in E_0, \quad \nu \geq 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad M = \text{const}, \tag{30}$$

где E_0 — связная компонента $E_1 \setminus Q$, числа ρ, b зависят от E_0 и могут принимать соответственно одно из конечного множества значений ρ_j, $b_j = |b_j| e^{i\tau_j}$.

Покажем, что если $z \in \partial Q$ — границе Q, $|z| > R_1$, то $z \in E_2$ и (см. (27))

$$|f(z)| < |z|^{\kappa+\sigma}, \quad z \in \partial Q, \quad |z| > R_1. \tag{31}$$

Действительно, пусть $z \in E_1 \cap \partial Q$. Учитывая (29), (26) и равенство $\zeta = \max\left(2p + 2, \max_{j=1,\ldots,T} \rho_j\right)$, получаем $|f'(z)/f(z)| < 3\left|b_j z^{\rho_j-1}\right|/2 < |z|^{\zeta}$, что противоречит (24).

Выберем достаточно большое R_1 так, чтобы $f(R_1 e^{i\theta}) \neq 0, \infty$, $\alpha \le \theta \le \beta$,

$$0 < c \le |f(R_1 e^{i\theta})| \le C, \quad \alpha \le \theta \le \beta, \quad c, C = \text{const}. \tag{32}$$

Множество E_1 — замкнутое. Пусть E_1^0 — внутренность E_1, ∂E_1 — граница E_1, $E_1 = E_1^0 \cup \partial E_1$. Учитывая непрерывность функций $|f(z)|$, $|z|^{\kappa+\sigma}$ и определение E_1, имеем

$$|f(z)| = |z|^{\kappa+\sigma}, \quad z \in \partial E_1. \tag{33}$$

Выберем некоторое φ, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Рассмотрим луч $S = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const}, r \ge R_1\} \subset g_{\alpha\beta}$. Может случиться, что $E_1^0 \cap S = \varnothing$. Тогда из (27), (33) следует

$$|f(z)| \le |z|^{\kappa+\sigma}, \quad z \in S = S(\varphi, R_1).$$

Пусть $E_1^0 \cap S \neq \varnothing$. Множество $E_1^0 \cap S$ представляет собой [8, с. 73] сумму конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов $\omega_t = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const}, r_{1t} < r < r_{2t}\} \subset E_1^0 \cap S$ таких, что

$$|f(z)| \ge |z|^{\kappa+\sigma}, \quad z \in \omega_t \subset E_1^0, \tag{34}$$

а на концах интервала (если $r_{1t} > R_1$, $r_{2t} < +\infty$) (см. (33))

$$|f(r_{1t} e^{i\varphi})| = r_{1t}^{\kappa+\sigma}, \quad |f(r_{2t} e^{i\varphi})| = r_{2t}^{\kappa+\sigma}. \tag{35}$$

Если Q — часть топологического пространства X, то любое связное подмножество B, имеющее общие точки с внутренностью и внешностью множества Q, пересекает границу Q [9, с. 92] (теорема 1). Интервал ω_t — связное множество. На границе ∂Q множества Q выполняется (31), поэтому, учитывая (34), получаем $\partial Q \cap \omega_t = \varnothing$. Следовательно, либо $\omega_t \subset Q$, либо $\omega_t \cap (Q \cup \partial Q) = \varnothing$, и тогда $\omega_t \subset E_1 \setminus Q$. Отбросим все интервалы ω_t, для которых $\omega_t \subset Q \subset E$ (E — множество кругов с конечной суммой радиусов). Далее рассматриваем только интервалы $\omega_t \subset E_1 \setminus Q$; обозначим множество таких интервалов через $\{\omega_t\}$. Связное множество ω_t принадлежит некоторой связной компоненте $E_0 \subset E_1 \setminus Q$, поэтому для любого $z \in \omega_t$ выполняется либо равенство (29), либо неравенство (30). Через ω_t^+ обозначим те из отрезков $\omega_t \in \{\omega_t\}$, для которых в (29) $\rho > 0$, а через ω_t^- — те из отрезков ω_t, для которых либо в (29) $\rho \le 0$, либо выполняется (30).

В соответствии с (29), (30) для $s \in \omega_t^-$ $|f'(s)/f(s)| < (|b| + \delta)/|s|$. Поэтому, интегрируя (29) и (30) на ω_t^-, получаем (далее, используя формулы (34), (35), индекс t не пишем; $|z| = r$, $|z_1| = r_1 > 1$)

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right| \le \left|\int_{r_1}^{r} \frac{f'(xe^{i\varphi})}{f(xe^{i\varphi})} dx\right| < (|b| + \delta) \int_{r_1}^{r} \frac{dx}{x} = (|b| + \delta) \ln\left(\frac{r}{r_1}\right), \quad \delta < \varepsilon. \tag{36}$$

Если $r_1 > R_1$, то из (36), (26) имеем $\ln|f(z)/f(z_1)| < (|b| + \delta)\ln(r/r_1) < (\kappa + \sigma)\ln(r/r_1)$. Согласно (35) $\ln|f(z_1)| = (\kappa + \sigma)\ln r_1$, поэтому из предыдущего следует $\ln|f(z)| < (\kappa + \sigma)\ln r$. Если $r_1 = R_1$, то из (27), (32), (36) получаем $\ln|f(z_1)| < \ln C$, и $\ln|f(z)| < (|b| + \delta)\ln r + \ln C < (\kappa + \sigma)\ln r$, $|z| = r > R_2$.

Итак, $|f(z)| < |z|^{\kappa+\sigma}$, $z \in \omega_l^-$, $|z| > R_2 \geq R_1$, что противоречит (34). Поэтому

$$\omega_l^- \bigcap \{z : z \in g_{\alpha\beta},\ |z| > R_2\} = \varnothing, \tag{37}$$

R_2 не зависит от φ, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Если в (28) z входит только с неположительными степенями, то в (29) для всех решений $\rho \leq 0$. Поэтому на S отрезков ω_l^+ нет и, учитывая (37), (34), (27), имеем луч $\{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const},\ r \geq R_2\} \setminus Q \subset E_2$. Поскольку $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, φ — любое, то на множестве $\{z : z \in g_{\alpha\beta},\ |z| > R_2\} \setminus Q$ выполняется (9), и теорема доказана.

Предположим, что существует $\omega_l^+ \in \{\omega_l\}$. Интегрируя (29) на отрезке ω_l^+ при $r_1 \leq \nu < r \leq r_2$, выделяя действительные части, получаем

$$\ln\left(\frac{f(re^{i\varphi})}{f(\nu e^{i\varphi})}\right) = \frac{\left[(re^{i\varphi})^\rho - (\nu e^{i\varphi})^\rho\right]\left(b + \upsilon(re^{i\varphi})\right)}{\rho}, \quad re^{i\varphi} \in \omega_l^+,$$
$$\ln\left|\frac{f(re^{i\varphi})}{f(\nu e^{i\varphi})}\right| = \rho^{-1}(r^\rho - \nu^\rho)(|b|\cos(\rho\varphi + \tau) + w(re^{i\varphi})), \quad b = |b|e^{i\tau}, \tag{38}$$

$r_1 \leq \nu < r \leq r_2$, $|\upsilon(z)|, |w(z)| < \delta$, $\upsilon(z)$ и $w(z)$ — некоторые функции.

Есть две возможности: а) все отрезки ω_l^+ имеют конечную длину (тогда с учетом предыдущего все отрезки из множества $\{\omega_l\}$ имеют конечную длину); б) один из отрезков ω_l^+ имеет бесконечную длину. Рассмотрим случай а). Пусть в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) = 0$; это возможно только при значениях $\varphi = \varphi_\zeta$,

$$\varphi_\zeta = \frac{\pi + 2\pi\zeta}{2\rho} - \frac{\tau}{\rho}, \quad \alpha < \varphi_\zeta < \beta, \tag{39}$$

ζ — целые числа, τ, ρ и ζ принимают конечное число возможных значений $(\alpha < \varphi_\zeta < \beta)$, φ_ζ совпадает с некоторыми из чисел α_j, β_j, определенными в (21). Тогда из (38), (35) следует

$$\ln\left|f(re^{i\varphi_\zeta})\right| \leq \rho^{-1}r^\rho\left|w(re^{i\varphi_\zeta})\right| + (\kappa + \sigma)\ln r_1 < \delta_1 r^\rho,$$
$$R < r_1 \leq r \leq r_2, \quad |w(z)| < \delta, \tag{40}$$

$\delta_1 > 0$, δ_1 — заданное число, $R = R(\delta_1)$. Теперь предположим, что в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) \neq 0$, тогда из (38), (35) имеем

$$(\kappa + \sigma)\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \ln\left|\frac{f(r_2e^{i\varphi})}{f(r_1e^{i\varphi})}\right| =$$
$$= (|b|\cos(\rho\varphi + \tau) + w(r_2e^{i\varphi}))\rho^{-1}\left(r_2^\rho - r_1^\rho\right), \quad |w| < \delta. \tag{41}$$

Существует такое $r(\varphi)$, что

$$\{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const},\ r \geq r(\varphi)\} \bigcap \omega_l^+ = \varnothing,$$
$$\cos(\rho\varphi + \tau) \neq 0, \quad r_{2l} < +\infty. \tag{42}$$

Действительно, выберем δ такое, что $0 < \delta < |b\cos(\rho\varphi + \tau)|/2$. Пусть r_* настолько большое, что в (29), (38) выполняется $|u(z)|, |w(z)| < |b\cos(\rho\varphi +$

$+\tau)|/2$, $|z| > r_*$. Тогда из (41) следует $(\kappa + \sigma)\ln(r_2/r_1) > |b|2^{-1}\rho^{-1} \times$ $\times|\cos(\rho\varphi+\tau)|\left(r_2^{\rho} - r_1^{\rho}\right)$, т. е.

$$c(\ln x_2 - \ln x_1) > x_2 - x_1, \quad x_1 = r_1^{\rho}, \quad x_2 = r_2^{\rho},$$
$$c = \frac{2(\kappa+\sigma)}{|b\cos(\rho\varphi+\tau)|}, \quad r_1 > r_*. \tag{43}$$

Функция $x - c\ln x$ строго возрастающая на $[c, +\infty)$, поэтому (43) невозможно, если $r_1(x_1)$, $r_1 > r(\varphi)$, достаточно большое. Следовательно, выполняется (42).

Если R достаточно большое, то на основании (37) на луче $S(\varphi, R) = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const},\ r \geq R\}$ отрезков ω_l^- нет. Значит, точки луча $S(\varphi, R)$ могут принадлежать либо множеству $E_2 \cup \partial E_1$ (см. (27), (33)), либо Q, либо отрезкам ω_l^+ конечной длины. Для каждого отрезка $\omega_l^+ \subset S(\varphi, R)$ выполняется (38), где $b = b_j$, $\rho = \rho_j$, $\tau = \tau_j$ — некоторые из конечного множества чисел (см. (29)). Из (42) следует, что при достаточно большом $r(\varphi)$ луч $S(\varphi, r(\varphi)) = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const},\ r \geq r(\varphi)\}$ не содержит отрезков ω_l^+ конечной длины, для которых в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) \neq 0$. Значит, если $\varphi \neq \varphi_\zeta$, φ_ζ — одно из конечного множества чисел, определенных в (39), то $S(\varphi, r(\varphi)) \subset E_2 \cup \partial E_1 \cup Q$, $Q \subset E$ — множеству кругов с конечной суммой радиусов. Поэтому, учитывая определение E_2 (см. (27)) и (33), имеем

$$|f(re^{i\varphi})| \leq r^{\kappa+\sigma}, \quad r \geq r(\varphi), \quad \varphi = \text{const} \neq \varphi_\zeta,$$
$$r \notin \Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta < +\infty, \tag{44}$$

$\Delta = S(\varphi, r(\varphi)) \cap Q$, $Q \subset E$, Δ — множество интервалов на луче $S(\varphi, r(\varphi))$. Поскольку E — множество кругов с конечной суммой радиусов, то $\operatorname{mes}\Delta < +\infty$.

Если луч $S(\varphi, r(\varphi))$ содержит отрезки ω_l^+ конечной длины, для которых в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) = 0$, то $\varphi = \varphi_\zeta$ (см. (39)), и на ω_l^+ имеет место оценка (40), а на множестве $E_2 \cup \partial E_1$ выполняется (27), (33). Поэтому из (27), (33), (40) следует

$$\ln|f(re^{i\varphi_\zeta})| = o(r^{\rho}), \quad r \notin \Delta,$$
$$\operatorname{mes}\Delta < +\infty, \quad r \to +\infty, \quad \rho = \max\rho_j, \tag{45}$$

максимум берется по ρ_j, которые соответствуют отрезкам $\omega_l^+ \subset S(\varphi, r(\varphi))$.

Предположим теперь, что один из отрезков ω_l^+ имеет бесконечную длину. Если в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) = 0$, то $\varphi = \varphi_\zeta$ (см. (39)), и на $S = S(\varphi, R_1)$ выполняется

$$\ln|f(re^{i\varphi_\zeta})| = o(r^{\rho}), \quad r \to +\infty. \tag{46}$$

Пусть в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) < 0$. Выберем δ так, чтобы $0 < \delta < -|b|\cos(\rho\varphi + \tau)$, и пусть для $|z| > R$, $R = R(\delta)$, в (38) выполняется $|w(z)| < \delta < -|b|\cos(\rho\varphi + \tau)$. Тогда получаем $\ln|f(z)/f(z_1)| < (|b|\cos(\rho\varphi + \tau) + \delta)\rho^{-1}\left(r^{\rho} - r_1^{\rho}\right) < 0$, $\ln|f(re^{i\varphi})| < \ln|f(z_1)|$ $\forall r > r_1 = |z_1| > R$, что противоречит определению ω_l (см. (34)). Поэтому в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) > 0$, и на отрезке бесконечной длины ω_l^+ выполняется

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = r^\rho \rho^{-1}(|b|\cos(\rho\varphi+\tau)+o(1)), \quad \rho > 0,$$
$$\cos(\rho\varphi+\tau) > 0, \quad r\to+\infty.$$

Существует такое целое k, что $|\rho\varphi+\tau-2\pi k|<\pi/2$. Пусть φ' удовлетворяет условиям $|\rho\varphi+\tau-2\pi k| < \rho\varphi'+\tau-2\pi k < \pi/2$, k определено выше. Тогда

$$\cos(\rho\psi+\tau) \ge \cos(\rho\varphi'+\tau) > 0, \quad \varphi < \psi \le \varphi'. \tag{47}$$

Из определения ω_l^+ следует, что $\omega_l^+ \subset E_0$, E_0 — связная компонента множества $E_1\setminus Q$, причем на E_0 в (29) $\rho, b = \text{const}$. Если ν достаточно большое, то угловая область

$$\{z=re^{i\theta}\colon \varphi\le\theta\le\varphi',\ r\ge\nu\}\subset E_0. \tag{48}$$

Действительно, пусть ψ — наибольшее значение такое, что дуга $\lambda = \{z = re^{i\theta}\colon \varphi\le\theta\le\psi,\ r=\text{const}\ge\nu\}\subset E_0$. Предположим, что $\psi<\varphi'$. Напомним, что если $z\in\partial Q$ — границе Q, то выполняется (31) и $z\in E_2$. Поэтому, учитывая определение точки $re^{i\psi}$ и определение связной компоненты E_0 множества $E_1\setminus Q$, получаем, что $re^{i\psi}\in\partial E_1$, и из (33) следует

$$|f(re^{i\psi})| = r^{\kappa+\sigma}. \tag{49}$$

Проинтегрируем (29) по λ; выделяя действительные части, имеем

$$\ln\left|\frac{f(re^{i\psi})}{f(re^{i\varphi})}\right| = (|b|\rho^{-1}(\cos(\rho\psi+\tau)-\cos(\rho\varphi+\tau)) + u_1(re^{i\psi}))r^\rho, \tag{50}$$

u_1 — некоторая функция, $|u_1(z)|<\delta(\beta-\alpha)$, $r\ge\nu$. Из (50), (49), (38), (47) следует

$$\begin{aligned}\ln r^{\kappa+\sigma} &\ge (|b|\rho^{-1}(\cos(\rho\psi+\tau)-\cos(\rho\varphi+\tau))-\delta(\beta-\alpha))r^\rho + \\ &+ (|b|\cos(\rho\varphi+\tau)-\delta)(r^\rho-\nu^\rho)\rho^{-1} + \ln|f(\nu e^{i\varphi})| \ge \\ &\ge r^\rho(|b|\rho^{-1}(\cos(\rho\varphi'+\tau)-\delta(\beta-\alpha)-\delta\rho^{-1}) - \\ &- |b|\rho^{-1}\nu^\rho\cos(\rho\varphi+\tau) + \ln|f(\nu e^{i\varphi})|, \quad r>\nu.\end{aligned} \tag{51}$$

Учитывая (47), находим $\cos(\rho\varphi'+\tau)>0$. Выберем $\delta>0$ настолько малое, чтобы в (51) выполнялось

$$|b|\rho^{-1}\cos(\rho\varphi'+\tau) - \delta(\beta-\alpha)-\delta\rho^{-1} > 0. \tag{52}$$

Отрезок ω_l^+ имеет бесконечную длину и ν можно выбрать так, чтобы соотношения (29), (38), (52) выполнялись с указанным δ. Если r достаточно большое, то из (52) следует, что неравенство (51) невозможно. Поэтому $\psi\ge\varphi'$ и (48) доказано.

Обозначим ($\tau=\tau_j$, $\rho=\rho_j$ (см. (29), (21)))

$$\alpha_j = \frac{2\pi k-\tau_j-\pi/2}{\rho_j}, \quad \beta_j = \frac{2\pi k-\tau_j+\pi/2}{\rho_j}, \tag{53}$$

k — определенное выше целое число. Из (48) следует, что

$$(\forall\upsilon>0)\ \ (\exists\nu>0)\colon\{z=re^{i\theta}\colon \alpha_j+\upsilon\le\theta\le\beta_j-\upsilon,\ r\ge\nu\}\subset E_0\subset E_1\setminus Q. \tag{54}$$

Поэтому для любого $\theta\in[\alpha_j+\upsilon, \beta_j-\upsilon]$ на луче $S(\theta)=\{z=re^{i\theta}\colon r\ge\nu\}\subset E_0$

выполняются условия, необходимые для доказательства равенства (38). Следовательно, $\ln(f(re^{i\theta})/f(\nu e^{i\theta})) = \left[(re^{i\theta})^{\rho_j} - (\nu e^{i\theta})^{\rho_j}\right](b_j + \upsilon(re^{i\theta}))\rho_j^{-1}$, $\alpha_j + \upsilon \le \theta \le \beta_j - \upsilon$, $r \ge \nu$, $|\upsilon(re^{i\theta})| < \delta$. Поэтому $(\forall\,\upsilon > 0)$ $(\forall\,\delta > 0)$ $(\exists\,\nu = \nu(\upsilon, \delta) > 0)$:

$$\ln f(re^{i\theta}) = (b_j + \upsilon(re^{i\theta}))(re^{i\theta})^{\rho_j}\rho_j^{-1} + W(re^{i\theta}), \quad r \ge \nu,$$
$$\ln|f(re^{i\theta})| = (|b_j|\cos(\rho_j\theta + \tau_j) + w(re^{i\theta}))r^{\rho_j}\rho_j^{-1} + H(re^{i\theta}), \quad r \ge \nu,$$
$$\alpha_j + \upsilon \le \theta \le \beta_j - \upsilon, \quad |\upsilon(re^{i\theta})|, |w(re^{i\theta})| < \delta, \tag{55}$$
$$|W(re^{i\theta})|, |H(re^{i\theta})| < \text{const}.$$

Итак, если луч $S(\varphi, R)$ содержит отрезок ω_l^+ бесконечной длины, то на этом луче справедливо (38), где $\cos(\rho\varphi + \tau) \ge 0$. Если $\cos(\rho\varphi + \tau) = 0$, то $\varphi = \varphi_\zeta$ (39) и имеет место оценка (46), а тем более выполняется (45). Если $\cos(\rho\varphi + \tau) > 0$, то

$$\ln f(z) = z^\rho(b\rho^{-1} + o(1)), \quad z \in \{z = re^{i\varphi}: \varphi = \text{const}, r \ge \nu\}, \quad z \to \infty. \tag{56}$$

Существует также отрезок (α_j, β_j), $\varphi \in (\alpha_j, \beta_j)$, на котором справедлива равномерная оценка (55). Поскольку числа ρ_j, b_j, τ_j принимают конечное число возможных значений (см. (29)), то для взятых α, β промежуток $[\alpha, \beta]$ содержит не более конечного числа значений φ_ζ, α_j, β_j, определенных в (39), (53). Поэтому существуют не более конечного числа отрезков (α_j, β_j), $(\alpha_j, \beta_j) \cap [\alpha, \beta] \ne \varnothing$, на которых имеют место оценки, аналогичные (55). Пусть таких отрезков s, $s \ge 1$. Если (α_j, β_j), $(\alpha_\iota, \beta_\iota)$ — два из указанных отрезков, то они либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, если существует θ_0, $\alpha_j < \theta_0 < \beta_j$, $\alpha_\iota < \theta_0 < \beta_\iota$, то выберем такое $\upsilon > 0$, что $\alpha_j + \upsilon < \theta_0 < \beta_j - \upsilon$, $\alpha_\iota + \upsilon < \theta_0 < \beta_\iota - \upsilon$. Из определения отрезков (α_j, β_j), $(\alpha_\iota, \beta_\iota)$ следует, что в областях $g_j = \{z = re^{i\theta}: \alpha_j + \upsilon \le \theta \le \beta_j - \upsilon,\ r \ge \nu\}$, $g_\iota = \{z = re^{i\theta}: \alpha_\iota + \upsilon \le \theta \le \beta_\iota - \upsilon,\ r \ge \nu\}$ выполняются соотношения, аналогичные (55). Луч $\{z: z = re^{i\theta_0},\ r \ge \nu\} \subset g_j \cap g_\iota$. Поэтому области g_j и g_ι принадлежат одной и той же связной компоненте E_0 (см. (54)). В формуле (29) числа $\rho = \rho_j$, $b = b_j = |b_j|e^{i\tau_j}$ остаются неизменными для любого $z \in E_0$. Поэтому α_j, β_j, α_ι, β_ι определяются формулами (53) при одних и тех же значениях ρ_j, τ_j. Следовательно, отрезки (α_j, β_j), $(\alpha_\iota, \beta_\iota)$ могут пересекаться только в случае, когда в (53) целое число k принимает для α_j, β_j то же значение, что и для α_ι, β_ι. С учетом предыдущего из (53) следует $\alpha_j = \alpha_\iota$, $\beta_j = \beta_\iota$.

Указанные отрезки (α_j, β_j) можно перенумеровать так, что будут выполняться неравенства $\alpha_1 < \beta_1 \le \alpha_2 < \beta_2 \le \ldots \le \alpha_s < \beta_s$. Обозначим

$$D(r) = \{z = |z|e^{i\theta}: \alpha \le \theta \le \beta,\ R_1 \le |z| \le r\}, \quad B(r) = D(r) \setminus Q, \tag{57}$$

где Q определено в (23), $Q \subset E$. На замкнутом множестве $B(r)$ функция $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, достигает наибольшего значения на границе в некоторой точке η. Пусть

$$\max_{z \in B(r)} |f(z)| = |f(\eta)| \overset{\text{df}}{=} M_*(r, f). \tag{58}$$

Предположим, что $(\forall\,\alpha, \beta;\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty)$ $(\exists\, a = a(\alpha, \beta) > 0)$:

$$M_*(r,f) = \max_{z \in B(r)} |f(z)| \le r^{\kappa+\sigma} \quad \forall\, r \ge a. \tag{59}$$

Тогда выполняется неравенство (9). Пусть теперь $\exists\,\alpha, \beta;\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty$,

$$(\forall\, a > 0) \quad (\exists\, r > a): \max_{z \in B(r)} |f(z)| = |f(\eta)| > r^{\kappa+\sigma}. \tag{60}$$

В (60) точка η принадлежит границе замкнутого множества $B(r)$. Поскольку лучи $S(\alpha) = \{z : z = re^{i\alpha},\ r \ge R\}$, $S(\beta) = \{z : z = re^{i\beta},\ r \ge R\}$ не пересекаются с кругами из множества E, $Q \subset E$, то точки этой границы принадлежат лучам $S(\alpha)$, $S(\beta)$, дугам $\lambda(r) = \{z = re^{i\theta} : \alpha \le \theta \le \beta,\ r = \text{const}\}$, $\lambda(R_1) = \{z = R_1 e^{i\theta} : \alpha \le \theta \le \beta\}$ и множеству ∂Q — границе Q. Из (31), (32), (60) следует, что $\eta \notin \partial Q \cup \lambda(R_1)$. Как показано выше, на любом луче $S(\varphi, R_1) = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const},\ r \ge R_1\}$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, выполняется одна из оценок (44), (45), (56).

Если $\eta \in S(\alpha)$, то с учетом (60), (27), (37) $\eta \notin (E_2 \cup \omega_l^-)$, $r > a$, a — достаточно большое. Поэтому $\eta \in \omega_l^+$. Поскольку $\alpha \ne \varphi_\zeta$, из (42) следует, что ω_l^+ имеет бесконечную длину, если $r > a > r(\alpha)$ (см. (42) и определение $r(\varphi)$). Выполняется также (38). Равенство (38) в данном случае запишется так:

$$\ln|f(re^{i\alpha})| = \left(|b_j|\rho_j^{-1}\cos(\rho_j\alpha + \tau_j) + o(1)\right)r^{\rho_j}, \quad r \to +\infty. \tag{61}$$

Аналогично, если $\eta \in S(\beta)$, $r > a > r(\beta)$, то $\eta \in \omega_l^+$, $r_{2l} = +\infty$ и

$$\ln|f(re^{i\beta})| = \left(|b_1|\rho_1^{-1}\cos(\rho_1\beta + \tau_1) + o(1)\right)r^{\rho_1}, \quad r \to +\infty. \tag{62}$$

Если $\eta \notin (S(\alpha) \cup S(\beta))$, то $\eta \in \{z = re^{i\theta} : \alpha < \theta < \beta,\ r = \text{const}\} \setminus (Q \cup \cup\, \partial Q)$. Поэтому выполняется формула Макинтайра [10, с. 59 – 62]

$$\frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)} = \frac{rM_*'(r,f)}{M_*(r,f)} = K(r) \ge 0, \quad |\eta| = r, \tag{63}$$

$K(r)$ — производная справа от $\ln M_*(r,f)$ по $\ln r$. Учитывая (58), (60), (27), (33), (63), получаем, что $\eta \in E_0$ и в точке η выполняется (29). Из (63), (29) имеем

$$(b + u(\eta))\eta^\rho = K(r) \ge 0, \quad b = |b|e^{i\tau}, \quad \eta = re^{i\varphi}, \quad \varphi = \varphi(r),$$

$$\eta \in E_0, \quad |u(\eta)| < \frac{\delta}{2}, \quad |\eta| > R.$$

Из предыдущего следуют асимптотические соотношения для аргумента

$$\begin{gathered} \rho\varphi + \tau = 2\pi n(1 + o(1)), \quad r \to +\infty, \\ \cos(\rho\varphi + \tau) = 1 + o(1), \quad \cos(\rho\varphi + \tau) > \frac{1}{2}, \end{gathered} \tag{64}$$

n — целое число, ρ, τ, n принимают конечное число возможных значений $(\alpha < \varphi < \beta)$. Поскольку $\eta \in E_0$, то $\eta \in \omega_l^-$ или $\eta \in \omega_l^+$. Из (37) следует, что если $r > R_2$, то $\eta \notin \omega_l^-$. Следовательно, $\eta \in \omega_l^+$. Если ω_l^+ — отрезок конечной длины, то выполняется (41), (43). Согласно (64) $\cos(\rho\varphi + \tau) > 1/2$.

Поэтому из (43) следует

$$c(\ln x_2 - \ln x_1) > x_2 - x_1, \quad x_1 = r_1^{\rho}, \qquad x_2 = r_2^{\rho}, \quad c = 4(\kappa+\sigma)|b|^{-1}. \tag{65}$$

Поскольку функция $x - c\ln x$ возрастает на промежутке $(c, +\infty)$, то (65) возможно, если $x_1 = r_1^{\rho} < x_* = \text{const}$. Поэтому существует r_* такое, что

$$(\forall\,\varphi \in (\alpha, \beta)) \quad (\forall\,\omega_t^+ \subset S(\varphi),\ \cos(\rho_t\varphi + \tau_t) > 1/2,\ r_{2t} < +\infty) \Rightarrow$$

$$S(\varphi) \cap \omega_t^+ = \varnothing, \quad S(\varphi) = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const},\ r \geq r_*\}. \tag{66}$$

Точка $\eta \in S(\varphi)$. Учитывая (60), можно считать, что $|\eta| > a > r_*$, r_* определено в (66) и не зависит от φ, следовательно, $\eta \in \omega_t^+$ — отрезку бесконечной длины. Поэтому на луче $S(\varphi)$ выполняются (38) и (55). Таким образом, для точки $\eta = re^{i\varphi}$, в которой достигается максимум, аргумент φ, $\varphi = \varphi(r)$, принадлежит одному из s отрезков (α_j, β_j), на которых справедливы соотношения (55). Из (64) следует, что когда во второй из формул (55) $\theta = \varphi$ — аргументу точки максимума $\eta = re^{i\varphi}$, то $\cos(\rho\varphi + \tau) = 1 + o(1)$. Поэтому в точке η формула (55) запишется так:

$$\ln|f(\eta)| = \frac{(|b_j| + o(1))r^{\rho}}{\rho}, \quad r \to +\infty. \tag{67}$$

Таким образом, либо точка максимума $\eta \in (S(\alpha) \cup S(\beta))$ и выполняются равенства (61), (62), либо η принадлежит одной из s областей $\{z : \alpha_j \leq \arg z \leq \beta_j : |z| \geq a\}$ и выполняется (67). Из (61), (62), (67) следует формула (10):

$$\ln M_*(r, f) = (c + o(1))r^{\rho}, \quad c = \text{const} > 0, \quad r \to +\infty,$$
$$M_*(r, f) = \max_{z \in B(r)} |f(z)|.$$

Доказательство теоремы 3 в основном повторяет доказательство теоремы 2, при этом вместо равенства (19) используется равенство $L(z) = (b + u(z))z^{\rho}\ln^{\tau} z$, $z \in E_0$, $|z| \geq r_0$, $|u(z)| < \varepsilon_1$; $\rho, \tau \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$; E_0 — связная компонента множества $E_1 \setminus Q$ (см. [7], формула (17)).

1. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
2. *Валирон Ж.* Аналитические функции. – М.: Гостехтеориздат, 1957. – 235 с.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
5. *Mokhon'ko A. Z., Mokhon'ko V. D.* On order of growth of analytic solutions for algebraic differential equations having logarithmic singularity // Mat. Stud. – 2000. – **13**, № 2. – P. 203–218.
6. *Гольдберг А. А., Мохонько А. З.* О скорости роста решений алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 9. – С. 1568–1574.
7. *Мохонько А. З., Мохонько В. Д.* Асимптотические оценки роста мероморфных решений дифференциальных уравнений в угловых областях // Сиб. мат. журн. – 2000. – **41**, № 1. – С. 185–199.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
9. *Шварц Л.* Анализ: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 824 с.
10. *Стрелец Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 467 с.

Получено 13.03.2002