УДК 517.956

**С. А. Алдашев** (Казах. акад. трансп. и коммун., Алматы, Казахстан)

# КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ – ПРОТТЕРА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

We obtain a criterion of uniqueness of regular solution of the Darboux – Protter problem for degenerating multidimensional hyperbolic equations.

Отримано критерій єдиності регулярного розв'язку задачі Дарбу – Проттера для багатовимірних гіперболічних рівнянь, що вироджуються.

Пусть $D_\varepsilon$ — конечная область евклидова пространства $E_{m+1}$ точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями

$$|x| = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2} + \varepsilon, \quad |x| = 1 - \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2}$$

и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $0 \le t \le \le \left(\frac{(2+p)(1-\varepsilon)}{4}\right)^{\frac{2}{2+p}}$, $0 \le \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial D_\varepsilon$ области $D_\varepsilon$, обозначим через $S_\varepsilon$, $S_1$ и $S$ соответственно.

В области $D_\varepsilon$ рассмотрим взаимно сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv t^p \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$$L^* v \equiv t^p \Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} - b v_t + d v = 0, \tag{1'}$$

где $p = \text{const} > 0$, $d(x,t) = c - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$, $\Delta_x$ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \ge 2$.

Рассмотрим следующие задачи Дарбу–Проттера для уравнений (1) и (1′).

**Задача 1.** Найти в области $D_\varepsilon$ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = 0, \quad u|_{S_\varepsilon} = 0 \tag{2}$$

или

$$u_t|_S = 0, \quad u|_{S_\varepsilon} = 0. \tag{3}$$

**Задача 1′.** Найти в области $D_\varepsilon$ решение уравнения (1′), удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_S = 0, \quad v|_{S_1} = 0 \tag{2'}$$

или

$$v_t\big|_S = 0, \quad v\big|_{S_1} = 0. \tag{3'}$$

Перейдем от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r$, $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, сохранив обозначения, использованные в [1].

Пусть $\Omega_\varepsilon$ — проекция области $D_\varepsilon$ на плоскость $(r, t)$ с границами

$$\Gamma_\varepsilon : r = \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2} + \varepsilon, \quad \Gamma_1 : r = 1 - \frac{2}{2+p} t^{(2+p)/2} \quad \text{и} \quad \Gamma: \ t = 0, \ \ \varepsilon \le r \le 1;$$

$\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка $n$, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространство Соболева.

Через $\bar{a}_{in}^k(r,t)$, $\hat{a}_{in}^k(r,t)$, $\bar{b}_n^k(r,t)$, $\bar{c}_n^k(r,t)$, $\bar{d}_n^k(r,t)$, $\rho_n^k$ обозначим коэффициенты разложения ряда по сферическим функциям $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \dfrac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \ldots, m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(S)$.

Если $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \ge m+1$, то имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *При* $\varepsilon > 0$ *решение задачи* 1 *в классе* $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ *тривиально.*

***Доказательство.*** Пусть $\varepsilon > 0$. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение (1′) имеет вид [1]

$$L^* v \equiv t^p v_{rr} + \frac{m-1}{r} t^p v_r - \frac{t^p}{r^2}\delta v - v_{tt} -$$

$$- \sum_{i=1}^m a_i(r,\theta,t) v_{x_i} - b(r,\theta,t) v_t + d(r,\theta,t) v = 0. \tag{4}$$

Построим решение $v(r, \theta, t)$ уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$v\big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_0^1(r) Y_{0,m}^1(\theta), \quad v\big|_{S_1} = 0, \quad \bar{\tau}_0^1(r) \in V_0, \tag{5}$$

где $V_0$ — множество $\tau(r)$ из класса $C^1(\varepsilon \le r \le 1) \cap C^2(\varepsilon < r < 1)$.

Очевидно, что $V_0$ плотно всюду в $L_2(\varepsilon, 1)$. Решение $v(r, \theta, t)$ будем искать в виде ряда

$$v(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} \bar{v}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{v}_n^k(r,t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Подставив (6) в (4), аналогично [1] получим уравнение вида

$$t^p \rho_0^1 \bar{v}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{v}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} t^p \rho_0^1 - \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1\right) \bar{v}_{0r}^1 - \bar{b}_0^1 \bar{v}_{0t}^1 + \bar{d}_0^1 \bar{v}_0^1 +$$

$$+ \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ t^p \rho_n^k \bar{v}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{v}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} t^p \rho_n^k - \sum_{i=1}^m \hat{a}_{in}^k\right) \bar{v}_{nr}^k - \bar{b}_n^1 \bar{v}_{nt}^1 + \right.$$

$$+\left[\tilde{d}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}t^k+\sum_{i=1}^m\left(n\tilde{a}_{in}^k-\hat{a}_{in-1}^k\right)\right]\overline{v}_n^k\Bigg\} = 0, \quad \lambda_n = n(n+m-2). \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$t^p\rho_0^1\overline{v}_{0rr}^1-\rho_0^1\overline{v}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1\overline{v}_{0r}^1 = 0, \tag{8}$$

$$t^p\rho_1^k\overline{v}_{1rr}^k-\rho_1^k\overline{v}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k\overline{v}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}t^p\rho_1^k\overline{v}_1^k = -\frac{1}{k_1}\left(-\sum_{i=1}^m\hat{a}_{i0}^1\overline{v}_{0r}^1-\tilde{b}_0^1\overline{v}_{0t}^1+\tilde{d}_0^1\overline{v}_0^1\right),$$

$$n=1, \quad k=\overline{1,k_1},$$

$$t^p\rho_n^k\overline{v}_{nrr}^k-\rho_n^k\overline{v}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k\overline{v}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}t^p\rho_n^k\overline{v}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_{n-1}}\left\{-\sum_{i=1}^m\hat{a}_{in-1}^k\overline{v}_{n-1r}^k-\tilde{b}_{n-1}^k\overline{v}_{n-1t}^k+\left[\tilde{d}_{n-1}^k-\sum_{i=1}^m\left((n-1)\hat{a}_{in-1}^k-\tilde{a}_{in-2}^k\right)\right]\overline{v}_{n-1}^k\right\}, \tag{9}$$

$$k=\overline{1,k_n}, \quad n=2,3,\ldots .$$

Нетрудно показать, что если $\left\{\overline{v}_n^k\right\}$, $\overline{1,k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, — решение системы (8), (9), то оно является и решением уравнения (7).

Учитывая ортогональность сферических функций $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ [2], из краевого условия (5) имеем

$$\overline{v}_0^1\big|_\Gamma = \overline{\tau}_0^1(r), \qquad \overline{v}_0^1\big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{10}$$

$$\overline{v}_n^k\big|_\Gamma = 0, \qquad \overline{v}_n^k\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad k=\overline{1,k_n}, \quad n=1,2,\ldots . \tag{11}$$

Таким образом, задача (1), (2) сведена к системе задач Дарбу для уравнений (8), (9). Теперь будем искать решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8), (9) можно представить в виде

$$t^p\overline{v}_{nrr}^k-\overline{v}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\overline{v}_{nr}^k-\frac{\lambda_n t^p}{r^2}\overline{v}_n^k = f_n^k(r,t), \tag{12}$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t)\equiv 0$.

Произведя в (12) замену переменных $\overline{v}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}v_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r$, $x_0=\dfrac{2}{2+p}t^{(2+p)/2}$, получим уравнение

$$L_\alpha v_{\alpha,n}^k = v_{\alpha,nrr}^k-v_{\alpha,nx_0x_0}^k-\frac{\alpha}{x_0}v_{\alpha,nx_0}^k+\frac{\left[(m-1)(3-m)-4\lambda_n\right]}{4r^2}v_{\alpha,n}^k = f_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{13}$$

$$0<\alpha=\frac{p}{2+p}<1, \qquad f_{\alpha,n}^k(r,x_0) = r^{(m-1)/2}\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha}f_n^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right].$$

При этом краевые условия (10), (11) примут вид

$$v_{\alpha,0}^1(r,0) = \tau_0^1(r), \qquad v_{\alpha,0}^1(r,1-r) = 0, \tag{14}$$

$$v_{\alpha,n}^{k}(r,0) = 0, \quad v_{\alpha,n}^{k}(r,1-r) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{15}$$

$$\tau_0^1(r) = r^{(m-1)/2}\bar{\tau}_0^1(r).$$

Наряду с уравнением (13) рассмотрим уравнение

$$L_0 v_{0,n}^{k} \equiv v_{0,nrr}^{k} - v_{0,ntt}^{k} + \frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}v_{0,n}^{k} = f_{0,n}^{k}(r,x_0). \tag{16}$$

Как доказано в [1] (см. также [3]), существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (13) и (16).

**Утверждение 1.** *Если* $v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ *— решение задачи Коши для уравнения* (16), *удовлетворяющее условиям*

$$v_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r), \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}v_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{17}$$

*то функция*

$$v_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) = \gamma_\alpha \int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi \equiv$$

$$\equiv 2^{-1}\gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_0^{1-\alpha}D_{0,x_0^2}^{-\alpha/2}\left[\frac{v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0^2}\right] \tag{18}$$

*при* $\alpha > 0$ *является решением уравнения* (13) *с условиями* (17).

**Утверждение 2.** *Если* $v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)$ *— решение задачи Коши для уравнения* (16), *удовлетворяющее условиям*

$$v_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{v_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}v_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \tag{19}$$

*то при* $0 < \alpha < 1$ *функция*

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q\left[x_0^{1-\alpha+2q}\int_0^1 v_{0,n}^{k,1}(r,\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}}d\xi\right] \equiv$$

$$\equiv \gamma_{2-k+2q}2^{q-1}\Gamma\left(q-\frac{\alpha}{2}+1\right)D_{0x_0^2}^{\alpha/2-1}\left[\frac{v_{0,n}^{k,1}(r,x_0)}{x_0}\right] \tag{20}$$

*является решением уравнения* (13) *с начальными условиями*

$$v_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \qquad \lim_{x_0\to 0} x_0^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_0}v_{\alpha,n}^{k,2} = v_n^k(r), \tag{21}$$

*где*

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

$\Gamma(z)$ *— гамма-функция,* $D_{0t}^{\alpha}$ *— оператор Римана – Лиувилля* [4], *а* $q \geq 0$ *— наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству* $2-\alpha+2q \geq m-1$.

При этом функции $f_{\alpha,n}^{k}(r,x_0)$, $f_{0,n}^{k}(r,x_0)$ связаны формулами (18) в случае утверждения 1 и формулами (20) в случае утверждения 2.

Сначала решим задачу (13), (14). Ее решение будем искать в виде $\upsilon^1_{\alpha,0}(r,x_0) = \upsilon^{1,1}_{\alpha,0} + \upsilon^{2,1}_{\alpha,0}$, где $\upsilon^{1,1}_{\alpha,0}(r,x_0)$ — решение задачи Коши (13), (17), а $\upsilon^{2,1}_{\alpha,0}(r,x_0)$ — решение задачи Дарбу для (13) с условиями

$$\upsilon^{2,1}_{\alpha,0}(r,0) = 0, \quad \upsilon^{2,1}_{\alpha,1}(r,1-r) = -\upsilon^{1,1}_{\alpha,0}(r,1-r), \quad \varepsilon \le r \le 1. \tag{22}$$

Учитывая формулы (18), (20), а также обратимость оператора $D^{\alpha}_{0t}$ [4], задачи (13), (17) и (13), (22) соответственно сводим к задаче Коши (16), (17) и к задаче Дарбу для $L_0 \upsilon^{2,1}_{0,0} = 0$ с условиями $\upsilon^{2,1}_{0,0}(r,0) = 0$, $\upsilon^{2,1}_{0,0}(r,1-r) = \sigma^1_0(r)$, которые однозначно разрешимы [1], где функция $\sigma^1_0(r)$ выражается через $\tau^1_0(r)$.

Аналогично, используя формулу (20), задачу (13), (15) сводим к задаче Дарбу для (16) с условиями $\upsilon^k_{0,n}(r,0) = 0$, $\upsilon^k_{0,n}(r,1-r) = 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, которая также имеет единственное решение в классе $C(\overline{H}_\varepsilon) \cap C^2(H_\varepsilon)$ [1].

Следовательно, учитывая утверждения 1 и 2, находим последовательно однозначные решения задач (8), (10) и (9), (11).

Таким образом, решение задачи (4), (5) в виде

$$\upsilon(r, \theta, t) = \overline{\upsilon}^1_0(r,t) Y^1_{0,m}(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} \overline{\upsilon}^k_n(r,t) Y^1_{n,m}(\theta) \tag{23}$$

построено.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1), а также оценки [2]

$$k_n \le C_1 n^{m-2}, \qquad \left| \frac{\partial^p}{\partial \theta_j^p} Y^k_{n,m}(\theta) \right| \le C_2 n^{\frac{m}{2}-1+p}, \qquad C_1,\ C_2 = \text{const},$$

$j = 1, \ldots, m-1$, $p = 0, 1, \ldots$, как и в [5], можно показать, что полученное решение (23) принадлежит искомому классу, если $l > \dfrac{3m}{2}$.

Аналогично строится решение этой задачи, если $\tau(r,\theta) = \overline{\tau}^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что решение задачи (1), (2) в классе $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $u(x,t) \equiv 0$.

Из определения сопряженных операторов [6]

$$\upsilon L u - u L^* \upsilon = -\upsilon P(u) + u P(\upsilon) - u \upsilon Q,$$

где

$$P(u) = t^p \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \cos(N', x_i) - u_t \cos(N', t),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos(N', x_i) + b \cos(N', t),$$

а $N'$ — внутренняя нормаль к границе $\partial D_\varepsilon$, по формуле Грина имеем

$$\int_{D_\varepsilon} (\upsilon L u - u L^* \upsilon) dD_\varepsilon = \int_{\partial D_\varepsilon} \left[ \left( \upsilon \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial \upsilon}{\partial N} \right) M + u \upsilon Q \right] ds, \tag{24}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial N}$ — конормаль к $\partial D_\varepsilon$, а

$$M^2 = t^{2p}\sum_{i=1}^{m}\cos^2(N', x_i) + \cos^2(N', t).$$

Принимая во внимание граничные условия (2) и тот факт, что на характеристических каноидах $S_\varepsilon$ и $S_1$ конормальная производная $\frac{\partial}{\partial N}$ совпадает с производной по касательному направлению [6], из (24) получаем

$$\int_S \tau(r, \theta) u_t(x_0, 0) ds = 0. \tag{25}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна [7] в $L_2(S)$, то из (25) заключаем, что $u_t(x, 0) = 0 \;\; \forall x \in S$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ для уравнения (1) [6] будем иметь $u(x, t) = 0 \;\; \forall (x, t) \in D_\varepsilon$ в классе $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$.

Таким образом, теорема 1 для задачи (1), (2) доказана. Докажем ее для задачи (1), (3).

Сначала построим решение уравнения (4), удовлетворяющее краевому условию

$$v_t\big|_S = \nu(r, \theta) = \bar{\nu}_0^1(r) Y_{0,m}^1(\theta), \qquad v\big|_{S_1} = 0, \tag{26}$$

где $\bar{\nu}_0^1(r) \in V_0$, в виде (6).

В этом случае нетрудно заметить, что функции $\bar{v}_n^k(r, t)$ удовлетворяют уравнениям (8), (9) и краевым условиям

$$\bar{v}_{0t}^1\big|_\Gamma = \bar{\nu}_0^1(r), \qquad \bar{v}_0^1\big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{27}$$

$$\bar{v}_{nt}^k\big|_\Gamma = 0, \qquad \bar{v}_n^k\big|_{\Gamma_1} = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots, \tag{28}$$

которые, в свою очередь, сводятся к уравнению (13) с условиями

$$\lim_{x_0 \to 0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} v_{\alpha,0}^1 = \bar{\nu}_0^1(r), \qquad v_{\alpha,0}^1(r, 1-r) = 0, \tag{29}$$

$$\lim_{x_0 \to 0} x_0^\alpha \frac{\partial v_{\alpha,n}^k}{\partial x_0} = 0, \qquad v_{\alpha,n}^k(r, 1-r) = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\nu_0^1(r) = (1-\alpha)^\alpha r^{(m-1)/2} \bar{\nu}_0^1(r). \tag{30}$$

Решение задачи (13), (29) будем искать в виде $v_{\alpha,0}^1(r, x_0) = v_{\alpha,0}^{1,1} + v_{\alpha,0}^{2,1}$, где $v_{\alpha,0}^{2,1}(r, x_0)$ — решение задачи Коши (13), (21), а $v_{\alpha,0}^{1,1}(r, x_0)$ — решение задачи Дарбу для уравнения (13) с краевыми условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_0} v_{\alpha,0}^{1,1}(r, 0) = 0, \qquad v_{\alpha,0}^{1,1}(r, 1-r) = -v_{\alpha,0}^{2,1}(r, 1-r). \tag{31}$$

Учитывая формулы (18), (20), а также обратимость оператора $D_{0t}^\alpha$, задачи (13), (21) и (13), (31) сводим соответственно к задаче Коши (16), (19) и к задаче Дарбу для (16) с условиями

$$\frac{\partial v_{0,0}^{1,1}(r,0)}{\partial x_0} = 0, \qquad v_{0,0}^{1,1}(r,1-r) = \overline{\sigma}_0^1(r),$$

которые однозначно разрешимы [1], где $\overline{\sigma}_0^1(r)$ — функция, выражающаяся через $v_0^1(r)$.

Аналогично, используя формулу (18), задачу (13), (30) сводим к задаче Дарбу для (16) с условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_0} v_{0,n}^k(r,0) = 0, \qquad v_{0,n}^k(r,1-r) = 0, \qquad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

которая имеет единственное решение [1].

Следовательно, с учетом утверждений 1 и 2 найдем последовательно однозначные решения задач (8), (27) и (9), (28).

Таким образом, решение задачи (4), (26) в виде (23) построено. Аналогично строятся решение этой задачи, если $v(r, \theta) = \overline{v}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ .

Далее, как и в случае задачи (1), (2), устанавливается справедливость теоремы 1 для задачи (1), (3).

Теорема доказана.

Пусть теперь решение задачи 1 в классе $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $u(x, t) \equiv 0$.

Покажем, что $\varepsilon > 0$.

Предположим противное, т. е. $\varepsilon = 0$. В этом случае в [5, 8] показано, что задача 1 имеет бесчисленное множество нетривиальных решений. Приходим к противоречию.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Решение задачи* 1 *в классе* $C^1(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$ $u(x, t) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $\varepsilon > 0$.

Отметим, что теорема 2 анонсирована в [9, 10].


1. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
2. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
3. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1973. – 143 с.
4. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1985. – 301 с.
5. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – 34, № 1. – С. 1 – 5.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1981. – Т. 4, Ч. 2. – 550 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
8. *Нуржанов Ш. Т.* О неединственности решения задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Вестн. Казах. ун-та. Сер. мат. мех., инф. – 1999. – № 2. – С. 117 – 122.
9. *Алдашев С. А.* О критериях единственности задачи Дарбу–Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Тез. второй междунар. конф. „Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики". – Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2001.
10. *Алдашев С. А.* Критерий единственности решения задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Докл. НАН РК. – 2002. – № 3. – С. 5 – 8.


Получено 12.04.2002