УДК 512.54

Ф. М. Сохацький (Вінниц. пед. ун-т)

АБСТРАКТНА ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАСУ УНІТАРНИХ ПОЗИЦІЙНИХ АЛГЕБР ОПЕРАЦІЙ

We find an abstract characteristic of the class of unitary position algebras of operations, i.e., algebras that contain complete collection of selectors.

Знайдено абстрактну характеристику класу унітарних позиційних алгебр операцій, тобто алгебр, які містять повний набір селекторів.

Вступ. Неодноразове застосування багатомісної функції приводить до досить громіздкого запису при порівняно невеликій інформативності. В деяких випадках для збільшення інформативності використовують записи, в яких несуттєвими елементами нехтують. Одним із таких записів є запис формул без предметних змінних, тобто з використанням суперпозиції функцій. Для вивчення багатомісної асоціативності та розкладів багатомісних квазігруп В. Д. Білоусов [1] запропонував користуватися суперпозиціями, введеними Г. Чупоною [2], що приводять до вивчення часткових алгебр, які названі В. Д. Білоусовим позиційними алгебрами операцій. Зауважимо, що лише одна з цих суперпозицій $\left(\overset{0}{+}\right)$ скрізь визначена і збігається з суперпозицією $(*)$ із сигнатури алгебри Поста – Мальцева [3]; інші суперпозиції також бінарні, але є частковими операціями на множині операцій довільної фіксованої множини. Вивчення суперпозиції Чупони та позиційних алгебр продовжувалось у працях В. Д. Білоусова [4]. У роботі автора [5] знайдено абстрактну характеристику різних класів позиційних алгебр операцій і відношень, вияснено основні залежності з іншими видами суперпозиції. Встановлено, що позиційні алгебри утворюють також мультиоперації, поліоперації [6], підстановки на скінченних множинах [1] та інші об'єкти. У даній статті знаходиться абстрактна характеристика класу унітарних позиційних алгебр. Результати роботи доповідались на „П'ятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука" [7].

1. Допоміжні відомості. Нехай Q — довільна множина, $\Gamma(Q)$ — сукупність всіх визначених на Q операцій, тоді *i-ю суперпозицією Чупони або i-ю позиційною суперпозицією* назвемо часткову операцію $\left(\overset{i}{+}\right)$, яка на множині $\Gamma(Q)$ визначається рівностями

$$(f \overset{i}{+} g)(x_0, \ldots, x_{m+n}) := f(x_0, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, \ldots, x_{i+m}), x_{i+m+1}, \ldots, x_{m+n}). \quad (1)$$

Сукупність всіх суперпозицій Чупони позначатимемо символом Σ:

$$\Sigma := \left\{\overset{0}{+}, \overset{1}{+}, \ldots, \overset{i}{+}, \ldots\right\} = \left\{\overset{i}{+} \,\middle|\, i = 0, 1, 2, \ldots\right\}.$$

Для більш зручного запису закономірностей користуватимемось не арністю операції, а її *типом*, тобто числом, яке на одиницю менше арності цієї операції, і позначатимемо його так: $\|f\| := |f| - 1$. Легко довести справедливість такого твердження.

Лема 1 [1]. *Для будь-яких операцій f, g, h виконуються такі співвідношення*:

$$f \overset{i}{+} g \text{ — визначено} \Leftrightarrow 0 \le i \le \|f\|, \quad (2)$$

$$\left\| f \overset{i}{+} g \right\| = \|f\| + \|g\|, \quad (3)$$

$$f \overset{i}{+} \left(g \overset{j}{+} h\right) = \left(f \overset{i}{+} g\right) \overset{i+j}{+} h, \quad (4)$$

$$\left(f \overset{i}{+} g\right) \overset{j}{+} h = \left(f \overset{j}{+} h\right) \overset{i+\|h\|}{+} g, \quad \text{якщо} \quad i > j. \tag{5}$$

Зауважимо, що операція $\left(\overset{0}{+}\right)$ — це операція $(*)$ в ітеративних алгебрах Поста – Мальцева [3], яка на множині унарних операцій збігається з композицією перетворень, яку позначають $(\circ)$ або $(\cdot)$ чи зовсім пропускають позначення. Операція $\left(\overset{0}{+}\right)$ асоціативна, що випливає з (4) при $i = j = 0$.

Якщо множина операцій Φ замкнена стосовно суперпозицій Чупони, то алгебра $(\Phi; \Sigma)$ називається *позиційною алгеброю операцій*. Природно виникає питання про основні абстрактні властивості цих алгебр, тобто яким умовам має задовольняти однотипна алгебра, щоб міститися в абстрактному класі позиційних алгебр операцій? Для відповіді на це питання введемо таке поняття.

Означення 1. *Часткова бінарна алгебра* $(G; \Sigma)$ *називається позиційною, якщо для довільного* $f \in G$ *значення* $f \overset{n}{+} f$ *визначено не для всіх* n *та виконуються умови* (2) – (5) *для всіх* f, g, h *із множини* G, *де*

$$\|f\| := \min\left\{i \,\middle|\, f \overset{i+1}{+} f \text{ — не визначено}\right\}.$$

При цьому $\|x\| := \rho(x)$ *називається функцією типу.*

Функція ρ визначена в кожній позиційній алгебрі однозначно. Дійсно, якщо ρ_1 — ще одна функція типу в тій же позиційній алгебрі, то для деякого елемента f виконується нерівність $\rho(f) < \rho_1(f)$, і тоді вираз $f \overset{n}{+} f$, де $n := \rho(f)$, визначений згідно з аксіомою (2) для ρ і не визначений згідно з аксіомою (2) для ρ_1, що неможливо.

Вірне і обернене твердження. Таким чином, має місце така теорема.

Теорема 1 [5]. *Позиційні алгебри і тільки вони ізоморфні позиційним алгебрам операцій.*

Іншими словами, *аксіоми позиційної алгебри є абстрактною характеристикою класу позиційних алгебр операцій.*

Легко показати, що в довільній позиційній алгебрі $(G; \Sigma)$ для будь-яких елементів f, g, h має місце таке співвідношення (див. [1]):

$$\left(f \overset{i}{+} g\right) \overset{j}{+} h = \begin{cases} \left(f \overset{j}{+} h\right) \overset{i+\|h\|}{+} g, & \text{якщо} \quad i > j; & (6_1) \\ f \overset{i}{+} \left(g \overset{j-i}{+} h\right), & \text{якщо} \quad i \le j \le i + \|g\|; & (6_2) \\ \left(f \overset{j-\|g\|}{+} h\right) \overset{i}{+} g, & \text{якщо} \quad j > i + \|g\|. & (6_3) \end{cases}$$

Узагальненням нейтрального елемента є поняття селектора: *i-м селектором типу n* називається операція $e_{i,n}$ типу n, яка визначається рівністю

$$e_{i,n}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) := x_i. \tag{7}$$

2. Унітарні позиційні алгебри операцій. Позиційну алгебру операцій назвемо *унітарною*, якщо вона містить повний набір селекторів усіх арностей або ізоморфна такій алгебрі, тобто унітарною називатимемо алгебру із абстрактного класу унітарних позиційних алгебр операцій. Абстрактний опис цього класу дає така теорема.

Теорема 2. *Алгебра* $(G; \Sigma, E)$, *де* $E := \{ e_{i,j} \mid i, j \ge 0\}$, *ізоморфна деякій унітарній позиційній алгебрі операцій точно тоді, коли виконуються такі залежності* $(m := \|z\|)$:

$$e_{i,n} \overset{j}{+} z = \begin{cases} e_{i,n+m}, & \text{якщо} \quad i < j; \\ z \overset{m}{+} e_{0,n-i} \overset{0}{+} e_{i,i}, & \text{якщо} \quad i = j; \\ e_{i+m,n+m}, & \text{якщо} \quad i > j, \end{cases} \tag{8}$$

$$z \overset{i}{+} e_{0,0} = z, \quad e_{0,0} \overset{0}{+} z = z, \quad e_{i,n} \overset{i}{+} e_{s,m} = e_{i+s,n+m}. \tag{9}$$

Нехай виконуються рівності

$$x = a \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{i_0,p_0}, \quad y = b \overset{m}{+} e_{j_m,q_m} \overset{m-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{j_0,q_0},$$

де $n := \| a \| \le m := \| b \|$, *тоді існують такі селектори* $e_{r_0,s_0}, \ldots, e_{r_n,s_n}$, *що*

$$x = y \Rightarrow b = a \overset{n}{+} e_{r_n,s_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{r_0,s_0}, \tag{10}$$

$$a = b \wedge \| x \| = \| y \| \Rightarrow x = y. \tag{11}$$

Доведення. Нехай $(G; \Sigma)$ — довільна унітарна позиційна алгебра. При доведенні властивостей (8), (9) використовуватимемо лише означення позиційної суперпозиції та селектора. Нехай φ є довільною операцією типу m, тоді

$$\left(e_{i,n} \overset{j}{+} \varphi\right)\left(x_0^{n+m}\right) \overset{(1)}{=} e_{i,n}\left(x_0^{j-1}, \varphi\left(x_j^{j+m}\right), x_{j+m+1}^{n+m}\right).$$

Розглянемо всі можливі випадки (тут і надалі x_i^j позначає послідовність x_i, $x_{i+1}, \ldots, x_j$ при $i \le j$ і порожню послідовність при $i > j$):

1) якщо $i < j$, то

$$\left(e_{i,n} \overset{j}{+} \varphi\right)\left(x_0^{n+m}\right) = x_i = e_{i,n+m}\left(x_0^{n+m}\right);$$

2) якщо $i = j$, то

$$\left(e_{i,n} \overset{j}{+} \varphi\right)\left(x_0^{n+m}\right) = \varphi\left(x_i^{i+m}\right) = \varphi\left(e_{i,i}\left(x_0^i\right), x_{i+1}^{i+m-1}, e_{0,n-i}\left(x_{i+m}^{n+m}\right)\right) =$$

$$= \left(\varphi \overset{m}{+} e_{0,n-i} \overset{0}{+} e_{i,i}\right)\left(x_0^{n+m}\right);$$

3) якщо $i > j$, то

$$\left(e_{i,n} \overset{j}{+} \varphi\right)\left(x_0^{n+m}\right) = x_{i+m} = e_{i+m,n+m}\left(x_0^{n+m}\right);$$

4) якщо $\varphi = e_{s,m}$, то при $i = j$ отримуємо

$$\left(e_{i,n} \overset{j}{+} \varphi\right)\left(x_0^{n+m}\right) = e_{s,m}\left(x_i^{i+m}\right) = x_{i+s} = e_{i+s,n+m}\left(x_0^{n+m}\right).$$

Отже, ми довели виконання властивостей (8) та (9).

Для уникнення повторень при подальшому доведенні встановимо справедливість рівності

$$\left(\varphi \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{i_0,p_0}\right)\left(x_0^p\right) = \varphi\left(x_{i_0}, x_{p_0+1+i_1}, \ldots, x_{p_0+\ldots+p_{n-1}+n+i_n}\right) \tag{12}$$

у довільній позиційній алгебрі операцій, де $n := \| \varphi \|$ та $p := n + p_0 + \ldots + p_n$.

Доведення цієї рівності випливає із таких міркувань:

$$\left(\varphi \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{i_0,p_0}\right)(x_0, \ldots, x_p) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \left(\varphi \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{1}{+} e_{i_1,p_1}\right)\left(e_{i_0,p_0}\left(x_0^{p_0}\right), x_{p_0+1}^{p}\right) \overset{(7)}{=}$$

$$\overset{(7)}{=} \left(\varphi \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{1}{+} e_{i_1,p_1}\right)\left(x_{i_0}, x_{p_0+1}^{p}\right) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \left(\varphi \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{2}{+} e_{i_2,p_2}\right)\left(x_{i_0}, e_{i_1,p_1}\left(x_{p_0+1}^{p_0+1+p_1}\right), x_{p_0+p_1+2}^{p}\right) \overset{(7)}{=}$$

$$\overset{(7)}{=} \left(\varphi \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{2}{+} e_{i_2,p_2}\right)\left(x_{i_0}, x_{p_0+1+i_1}, x_{p_0+p_1+2}^{p}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \varphi\left(x_{i_0}, x_{p_0+1+i_1}, \ldots, x_{p_0+\ldots+p_{n-1}+n+i_n}\right).$$

Розглянемо залежність (10). Нехай виконується рівність

$$\varphi \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{i_0,p_0} = \psi \overset{m}{+} e_{j_m,q_m} \overset{m-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{j_0,q_0}.$$

Із (12) випливає така залежність:

$$\varphi\left(x_{i_0}, x_{p_0+1+i_1}, \ldots, x_{p_0+\ldots+p_{n-1}+n+i_n}\right) = \psi\left(x_{j_0}, x_{q_0+1+j_1}, \ldots, x_{q_0+\ldots+q_{m-1}+m+j_m}\right).$$

Легко бачити, що коли змінна є в одній частині, але не міститься в іншій, то така змінна є фіктивною як для однієї операції, так і для іншої, тобто значення операції від цих змінних не залежить.

Оскільки $n \le m$, то в правій частині таких фіктивних змінних більше, ніж у лівій. Занумеруємо в правій частині змінні в порядку зростання. У лівій частині перепозначимо змінні, що входять до правої частини, тими ж літерами, що і в правій. Оскільки інші змінні лівої частини є фіктивними, то позначимо їх тими ж символами, що і в правій частині переіменовані фіктивні змінні, але так, щоб індекси строго зростали. У підсумку отримаємо тотожну рівність

$$\psi(y_0, \ldots, y_m) = \varphi(y_{k_0}, y_{k_1}, \ldots, y_{k_n}),$$

де $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Ввівши селектори, можна зрівняти послідовності змінних у лівій та правій частинах рівності. Для скорочення записів позначимо $\alpha(i) := k_i - k_{i-1} - 1$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$ та $\alpha(0) := k_0$, $p := m - k_{n-1} - 1$. Отже,

$$\psi(y_0^m) = \varphi\left(e_{\alpha(0),\alpha(0)}(y_0^{k_0}), e_{\alpha(1),\alpha(1)}(y_{k_0+1}^{k_1}), \ldots, e_{\alpha(n-1),\alpha(n-1)}(y_{k_{n-2}+1}^{k_{n-1}}),\right.$$

$$\left.e_{\alpha(n),p}(y_{k_{n-1}+1}^{m})\right) =$$

$$= \left(\varphi \overset{n}{+} e_{\alpha(n),p} \overset{n-1}{+} e_{\alpha(n-1),\alpha(n-1)} \overset{n-2}{+} \ldots \overset{1}{+} e_{\alpha(1),\alpha(1)} \overset{0}{+} e_{\alpha(0),\alpha(0)}\right)\left(y_0^m\right)$$

для всіх $y_0, \ldots, y_m$ із множини Q, що й доводить співвідношення (10).

Розглянемо імплікацію (11). Для цього припустимо, що мають місце рівності

$$\|f\| = \|g\| = m,$$

$$f = \varphi \overset{n}{+} e_{i_n,p_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{i_0,p_0},$$

$$q = \varphi \overset{n}{+} e_{j_n,q_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{j_0,q_0}.$$

Застосовуючи рівність (12), для всіх $x_0, \dots, x_m \in Q$ отримуємо рівності

$$f(x_0^m) = \varphi(x_{i_0}, x_{p_0+1+i_1}, \dots, x_{p_0+\dots+p_{n-1}+n+i_n}),$$

$$g(x_0^m) = \varphi(x_{j_0}, x_{q_0+1+j_1}, \dots, x_{q_0+\dots+q_{n-1}+n+j_n}).$$

У першій і другій рівностях змінні в правих частинах перепозначимо через x_0, $x_1, \dots, x_n$:

$$f(y_0, \dots, y_m) = \varphi(x_0, \dots, x_n) = g(z_0, \dots, z_m),$$

де $\{y_0, \dots, y_m\}$ і $\{z_0, \dots, z_m\} = \{x_0, \dots, x_n\}$. Звідси маємо

$$f(y_0, \dots, y_m) = g(z_0, \dots, z_m)$$

для всіх значень змінних $y_0, \dots, y_m$, $z_0, \dots, z_m \in Q$, тобто $f = g$, що й доводить залежність (11).

Навпаки, нехай (G, Σ) — довільна позиційна алгебра, яка задовольняє умови теореми. Перш ніж доводити достатність даної теореми, зауважимо, що з тотожностей (8) і (9) випливає залежність

$$e_{i,n} \overset{j}{+} e_{s,m} = \begin{cases} e_{i,n+m}, & \text{якщо} \quad i < j; \\ e_{i+s,n+m}, & \text{якщо} \quad i = j; \\ e_{i+m,n+m}, & \text{якщо} \quad i > j. \end{cases} \tag{13}$$

Визначимо на множині G відношення μ, поклавши $x\mu y$ тоді і тільки тоді, коли існує елемент $a \in G$ такий, що

$$\begin{aligned} x &= a \overset{n}{+} e_{i_n, p_n} \overset{n-1}{+} \dots \overset{0}{+} e_{i_0, p_0}, \\ y &= a \overset{n}{+} e_{j_n, q_n} \overset{n-1}{+} \dots \overset{0}{+} e_{j_0, q_0} \end{aligned} \tag{14}$$

для деяких селекторів $e_{i_0, p_0}, e_{i_1, p_1}, \dots, e_{i_n, p_n}$, $e_{j_0, q_0}, e_{j_1, q_1}, \dots, e_{j_m, q_m}$.

Рефлексивність відношення μ гарантує перша рівність із (9), а симетричність випливає безпосередньо із означення. Для доведення транзитивності припустимо, що $x\mu y$ і $y\mu z$, тобто виконуються рівності (14), та існує елемент b такий, що

$$\begin{aligned} y &= b \overset{m}{+} e_{i'_m, p'_m} \overset{m-1}{+} \dots \overset{0}{+} e_{i'_0, p'_0}, \\ z &= b \overset{m}{+} e_{j'_m, q'_m} \overset{m-1}{+} \dots \overset{0}{+} e_{j'_0, q'_0} \end{aligned} \tag{15}$$

для деяких селекторів $e_{i'_0, p'_0}, e_{i'_1, p'_1}, \dots, e_{i'_m, p'_m}$, $e_{j'_0, q'_0}, e_{j'_1, q'_1}, \dots, e_{j'_m, q'_m}$. Зокрема, отримуємо рівність

$$a \overset{n}{+} e_{j_n, q_n} \overset{n-1}{+} \dots \overset{0}{+} e_{j_0, q_0} = b \overset{m}{+} e_{i'_m, p'_m} \overset{m-1}{+} \dots \overset{0}{+} e_{i'_0, p'_0}.$$

Не втрачаючи загальності, покладемо $n \le m$, тоді за аксіомою (10)

$$b = a \overset{n}{+} e_{l_n, s_n} \overset{n-1}{+} \dots \overset{0}{+} e_{l_0, s_0}$$

для деяких чисел $l_0, \dots, l_n$, $s_0, \dots, s_n$. Підставимо знайдене значення в (15):

$$z = \left(a \overset{n}{+} e_{l_n,s_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{l_0,s_0}\right) \overset{m}{+} e_{j'_m,q'_m} \overset{m-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{j'_0,q'_0}.$$

Застосовуючи перетворення (6) та (13), отримуємо рівність

$$z = a \overset{n}{+} e_{u_n,v_n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{u_0,v_0},$$

що означає $x\mu z$, тобто транзитивність відношення μ. Отже, μ є відношенням еквівалентності. Якщо блок еквівалентності за цим відношенням містить елемент x, то позначатимемо його через $\langle x\rangle$.

Для визначення операцій на множині G/μ необхідно довести ще одну властивість відношення μ. Припустимо, що $x_i\mu y_i$ для всіх $i = 0,\ldots,n$, тобто існують елементи a_i, $i = 0,\ldots,n$, такі, що

$$x_i = a_i \overset{n_i}{+} e_{k_{i,n_i},p_{i,n_i}} \overset{n_i-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{k_{i,0},p_{i,0}},$$

$$y_i = a_i \overset{n_i}{+} e_{j_{i,n_i},q_{i,n_i}} \overset{n_i-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{j_{i,0},q_{i,0}}, \qquad i = 0,\ldots,n,$$

для деяких селекторів $e_{k_{i,0},p_{i,0}},\ldots,e_{k_{i,n_i},p_{i,n_i}}$, $e_{j_{i,0},q_{i,0}},\ldots,e_{j_{i,n_i},q_{i,n_i}}$. Тоді для будь-якого $g \in G$ виконуються рівності

$$g \overset{n}{+} x_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0 =$$

$$= g \overset{n}{+} \left(a_n \overset{m_n}{+} e_{k_{n,m_n},p_{n,m_n}} \overset{m_n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{k_{n,0},p_{n,0}}\right) \overset{n-1}{+} x_{n-1} \overset{n-2}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0 \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \left(g \overset{n}{+} a_n\right) \overset{n+m_n}{+} e_{k_{n,m_n},p_{n,m_n}} \overset{n+m_n-1}{+} \ldots \overset{n}{+} e_{k_{n,0},p_{n,0}} \overset{n-1}{+} x_{n-1} \overset{n-2}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0 \overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=} \left(g \overset{n}{+} a_n \overset{n-1}{+} x_{n-1} \overset{n-2}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\right) \overset{s}{+} e_{k_{n,m_n},p_{n,m_n}} \overset{s-1}{+} \ldots \overset{s-m_n}{+} e_{k_{n,0},p_{n,0}},$$

де $s := n + m_n + \|x_0\| + \ldots + \|x_{n-1}\|$. Повторюючи проведені міркування та враховуючи співвідношення (6) і (13), отримуємо рівність

$$g \overset{n}{+} x_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0 = \left(g \overset{n}{+} a_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} a_0\right) \overset{m}{+} e_{i'_m,p'_m} \overset{m-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{i'_0,p'_0}$$

для деяких селекторів $e_{i'_0,p'_0},\ldots,e_{i'_m,p'_m}$, де $m := \|g\| + \|a_0\| + \ldots + \|a_n\|$. Аналогічно доводимо, що

$$g \overset{n}{+} y_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} y_0 = \left(g \overset{n}{+} a_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} a_0\right) \overset{m}{+} e_{j'_m,q'_m} \overset{m-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{j'_0,q'_0}$$

для деяких селекторів $e_{j'_0,q'_0},\ldots,e_{j'_m,q'_m}$. А це означає, згідно з означенням, справедливість відношення

$$\left(g \overset{n}{+} x_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\right)\mu\left(g \overset{n}{+} y_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} y_0\right).$$

Доведена властивість дозволяє визначити для кожного елемента $g \in G$ операцію $P(g)$ типу $n := \|g\|$:

$$P(g)(\langle x_0\rangle,\ldots,\langle x_n\rangle) := \left\langle g \overset{n}{+} x_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\right\rangle. \tag{16}$$

Відображення $P : g \mapsto P(g)$ є ізоморфізмом між алгебрами $(G;\Sigma)$ та

$(P(G);\Sigma)$, який переводить елементи підмножини E в селектори. Дійсно, нехай $n := \|f\|$, $m := \|g\|$, тоді отримуємо

$$A := P\Big(f \overset{i}{+} g\Big)(\langle x_0\rangle,\ldots,\langle x_{m+n}\rangle) \overset{(16)}{=} \Big\langle\Big(\Big(f \overset{i}{+} g\Big) \overset{m+n}{+} x_{m+n}\Big) \overset{m+n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\Big\rangle \overset{(6_3)}{=}$$

$$\overset{(6_3)}{=} \Big\langle\Big(\Big(\Big(f \overset{n}{+} x_{n+m}\Big) \overset{i}{+} g\Big) \overset{m+n-1}{+} x_{m+n-1} \overset{m+n-2}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\Big\rangle.$$

Оскільки $m + k > i + \|g\|$ для всіх $k = i + 1, \ldots, n$, то до останнього виразу можна застосувати $n - i$ разів співвідношення (6_3):

$$A \overset{(6_3)}{=} \Big\langle\Big(\Big(\Big(\Big(f \overset{n}{+} x_{m+n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{i+1}{+} x_{i+m+1}\Big) \overset{i}{+} g\Big) \overset{i+m}{+} x_{i+m}\Big) \overset{i+m-1}{+} \ldots$$

$$\ldots \overset{i+1}{+} x_{i+1} \overset{i}{+} x_i \overset{i-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\Big\rangle.$$

На підставі того, що $i \le i + m \le i + \|g\|$, до виділеного дужками виразу можна застосувати співвідношення (6_2):

$$A \overset{(6_2)}{=} \Big\langle\Big(\Big(\Big(f \overset{n}{+} x_{m+n} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{i+1}{+} x_{i+m+1}\Big) \overset{i}{+} \Big(g \overset{i+m}{+} x_{i+m}\Big)\Big) \overset{i+m-1}{+} \ldots$$

$$\ldots \overset{i+1}{+} x_{i+1} \overset{i}{+} x_i \overset{i-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\Big\rangle.$$

Нерівність $i \le i + k \le i + \|g\| + \|x_{i+m}\| + \ldots + \|x_{i+k}\|$ виконується для всіх $k = 0, \ldots, m$, тому після використання співвідношення (6_2) з останнього виразу через m кроків матимемо

$$A \overset{(6_2)}{=} \Big\langle f \overset{n}{+} x_{m+n} \ldots \overset{i+1}{+} x_{m+i+1} \overset{i}{+} \Big(g \overset{m}{+} x_{i+m} \overset{m-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_i\Big) \overset{i-1}{+}$$

$$\overset{i-1}{+} x_{i-1} \overset{i-2}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\Big\rangle.$$

З означення відображення P випливають рівності

$$A \overset{(16)}{=} P(f)\Big(\langle x_0\rangle, \ldots, \langle x_{i-1}\rangle, \Big\langle g \overset{m}{+} x_{i+m} \overset{m-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_i\Big\rangle, \langle x_{i+m+1}\rangle, \ldots, \langle x_{m+n}\rangle\Big) \overset{(16)}{=}$$

$$\overset{(16)}{=} P(f)(\langle x_0\rangle, \ldots, \langle x_{i-1}\rangle, P(g)(\langle x_i\rangle, \ldots, \langle x_{i+m}\rangle), \langle x_{i+m+1}\rangle, \ldots, \langle x_{m+n}\rangle) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \Big(P(f) \overset{i}{+} P(g)\Big)(\langle x_0\rangle, \ldots, \langle x_{m+n}\rangle).$$

Отже, для всіх $f, g \in G$ виконується рівність

$$P\Big(f \overset{i}{+} g\Big) = P(f) \overset{i}{+} P(g).$$

Перевіримо збереження селекторів при відображенні P:

$$B := P(e_{i,n})(\langle x_0\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle) \overset{(16)}{=} \Big\langle e_{i,n} \overset{n}{+} x_n \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0\Big\rangle.$$

Позначимо $p := n + \|x_n\| + \ldots + \|x_{n+i}\|$ і скористаємось першою із рівностей (8):

$$B = \left\langle e_{i,p} \overset{i}{+} x_i \overset{i-1}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0 \right\rangle \overset{5}{=} \left\langle \left(e_{i,p} \overset{i-1}{+} x_{i-1} \overset{i-2}{+} \ldots \overset{0}{+} x_0 \right) \overset{i+q}{+} x_i \right\rangle,$$

де $q := \| x_0 \| + \ldots + \| x_{i-1} \|$. Застосуємо третю і другу рівності з (8), а потім — означення еквівалентності μ:

$$B = \left\langle e_{i+q,\, p+q} \overset{i+q}{+} x_i \right\rangle = \left\langle x_i \overset{s}{+} e_{0,\, p-i} \overset{0}{+} e_{i+q,\, i+q} \right\rangle = \langle x_i \rangle,$$

де $s := \| x_i \|$. Таким чином, операція $P(e_{i,\,n})$ є i-м селектором типу n.

Залишилось встановити ін'єктивність відображення P. Припустимо, що $P(f) = P(g)$. Це, зокрема, означає що операції $P(f)$ та $P(g)$ мають однаковий тип, який позначимо через n. Крім того, виконується рівність

$$P(f)(\langle e_{0,\,0} \rangle, \ldots, \langle e_{0,\,0} \rangle) = P(g)(\langle e_{0,\,0} \rangle, \ldots, \langle e_{0,\,0} \rangle).$$

За означенням операції (див.(16)) маємо рівність

$$\left\langle f \overset{n}{+} e_{0,0} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{0,0} \right\rangle = \left\langle g \overset{n}{+} e_{0,0} \overset{n-1}{+} \ldots \overset{0}{+} e_{0,0} \right\rangle,$$

яка згідно з (9) означає, що $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, тобто $f \mu g$. За означенням відношення μ маємо виконання посилки імплікації (11), з якої отримуємо рівність $f = g$.

Теорему доведено.

1. *Белоусов В. Д.* n-Арные квазигруппы. – Кишинев: Штиинца, 1972. – 227 с.
2. *Чупона Г.* За финитарните операции // Год. зб. Природно-мат. фак. Ун-т, Скопје. – 1959. – **12**. – С. 7–49.
3. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. – 1966. – **5**, № 2. – С. 5–24.
4. *Belousov V. D.* Balanced identities in algebras of quasigroups // Aequat. math. – 1972. – **8**, fasc. 1/2. – P. 1–73.
5. *Сохацкий Ф. Н.* О позиционных алгебрах // Квазигруппы и латинские квадраты: Мат. исслед. – Кишинев: Штиинца, 1987. – Вып. 95. – С. 101–120.
6. *Сохацкий Ф. Н.* Позиционные алгебры. Алгебры Белоусова // Квазигруппы: Мат. исслед. – Кишинев: Штиинца, 1983. – Вып. 71. – С. 107–117.
7. *Сохацький Федір.* Абстрактна характеристика селективних позиційних алгебр // П'ята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: Тези доп. – Київ, 1996.

Одержано 31.05.2001