УДК 517.53

П. В. Філевич (Львів. нац. ун-т)

ПРО ЗРОСТАННЯ МАКСИМУМА МОДУЛЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НА ПОСЛІДОВНОСТІ

Let $M_f(r)$ and $\mu_f(r)$ be the maximum modulus and the maximal term of an entire function f, respectively, and let Φ be a continuously differentiable function convex on $(-\infty; +\infty)$ and such that $x = o(\Phi(x))$, $x \to +\infty$. We establish that in order for the equality

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\Phi(\ln r)} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\Phi(\ln r)}$$

to hold for every entire function f, it is necessary and sufficient that $\ln \Phi'(x) = o(\Phi(x))$, $x \to +\infty$.

Нехай $M_f(r)$ і $\mu_f(r)$ — відповідно максимум модуля та максимальний член цілої функції f, а Φ — неперервно диференційовна, опукла на $(-\infty; +\infty)$ функція така, що $x = o(\Phi(x))$, $x \to +\infty$. Встановлено, що для того щоб рівність

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\Phi(\ln r)} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\Phi(\ln r)}$$

виконувалась для кожної цілої функції f, необхідно і досить, щоб $\ln \Phi'(x) = o(\Phi(x))$, $x \to +\infty$.

Нехай Ω — клас неперервно диференційовних, опуклих на $(-\infty; +\infty)$ функцій Φ таких, що $x = o(\Phi(x))$, $x \to +\infty$, а

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

— трансцендентна ціла функція. Введемо для функції (1) і довільного $r > 0$ позначення:

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \qquad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \ge 0\},$$

$$\nu_f(r) = \max\{n \ge 0 : |a_n| r^n = \mu_f(r)\}$$

— відповідно максимум модуля, максимальний член і центральний індекс f. Нехай також

$$T_f(\Phi) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\Phi(\ln r)}, \qquad t_f(\Phi) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\Phi(\ln r)},$$

де $\Phi \in \Omega$. Зауважимо, що $t_f(\Phi) \le T_f(\Phi)$, оскільки $\mu_f(r) \le M_f(r)$ за нерівністю Коші.

В роботі [1] (теорема 8) доведено, що якщо $\Phi \in \Omega$, то умова

$$\ln \Phi'(x) = o(\Phi(x)), \quad x \to +\infty, \tag{2}$$

є достатньою для того, щоб для кожної трансцендентної цілої функції (1) справджувалась рівність $T_f(\Phi) = t_f(\Phi)$, і поставлено питання про необхідність умови (2) для виконання цієї рівності. Ствердну відповідь на це питання отримано у даній роботі. Отже, справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\Phi \in \Omega$. *Для того щоб для кожної цілої трансцендентної функції* (1) *справджувалась рівність* $T_f(\Phi) = t_f(\Phi)$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова* (2).

Запропоноване в [1] доведення достатності у теоремі 1 базується на оцінках

© П. В. ФІЛЕВИЧ, 2002

виняткових множин у співвідношеннях між максимумом модуля і максимальним членом цілої функції і має певною мірою штучний характер. Зокрема, це доведення не дає жодної інформації щодо способу визначення прямуючої до $+\infty$ послідовності $\{x_n\}$, на якій $\ln M_f(x_n)/\Phi(\ln x_n) \to t_f(\Phi)$, $n \to \infty$, у випадку, коли для Φ виконується умова (2). Таку інформацію наведено у наступній теоремі.

Теорема 2. *Нехай* $t \in (0; +\infty)$, *а функція* $\Phi \in \Omega$ *така, що виконується умова* (2). *Якщо для трансцендентної цілої функції* (1) *існує зростаюча до* $+\infty$ *послідовність* $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ *така, що*

$$\ln \mu_f(r_k) \le (t + o(1))\Phi(\ln r_k), \quad k \to \infty, \tag{3}$$

і

$$x_k = r_k - \frac{r_k}{\Phi(\ln r_k)}, \quad k \ge 0,$$

то

$$\ln M_f(x_k) \le (t + o(1))\Phi(\ln x_k), \quad k \to \infty. \tag{4}$$

Зауваження. **1.** Оскільки $\Phi'(x) \nearrow +\infty$, $x \to +\infty$, для кожної $\Phi \in \Omega$, то, як легко бачити, $x_k \nearrow +\infty$, $x_0 \le k \to \infty$.

2. Для отримання достатності в теоремі 1 досить у теоремі 2 покласти $t = t_f(\Phi)$, якщо $t_f(\Phi) < +\infty$. Якщо ж $t_f(\Phi) = +\infty$, то й $T_f(\Phi) = +\infty$, а отже, $T_f(\Phi) = t_f(\Phi)$.

Доведення теореми 2. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\Phi'(\ln r_0) > 2$. Оскільки для всіх $\varepsilon \in (0; 1)$ і $r > 0$

$$M_f((1-\varepsilon)r) \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|((1-\varepsilon)r)^n \le \mu_f(r)\sum_{n=0}^{\infty}(1-\varepsilon)^n = \frac{\mu_f(r)}{\varepsilon}, \tag{5}$$

то, поклавши в (5) $r = r_k$ і $\varepsilon = 1/\Phi'(\ln r_k)$ та скориставшись (3) та (2), отримаємо

$$\ln M_f(x_k) \le \ln \mu_f(r_k) + \ln \Phi'(\ln r_k) \le (t + o(1))\Phi(\ln r_k), \quad k \to \infty. \tag{6}$$

Далі зауважимо, що

$$\Phi(\ln r_k) - \Phi(\ln x_k) = \int_{x_k}^{r_k} \Phi'(\ln r)\, d\ln r \le \Phi'(\ln r_k)\ln\frac{r_k}{x_k} =$$

$$= \Phi'(\ln r_k)\ln\left(1 + \frac{1}{\Phi'(\ln r_k) - 1}\right) \le \frac{\Phi'(\ln r_k)}{\Phi'(\ln r_k) - 1} < 2,$$

тобто $\Phi(\ln r_k) \sim \Phi(\ln x_k)$, $k \to \infty$, а тому з (6) безпосередньо випливає (4). Теорему 2 доведено.

Доведення теореми **1.** Зважаючи на викладене вище, залишається довести лише необхідність умови (2).

Припустимо, що для деякої функції $\Phi \in \Omega$ умова (2) не виконується, тобто існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{\ln \Phi'(\ln r)}{\Phi(\ln r)} > 8\varepsilon. \tag{7}$$

Побудуємо приклад цілої функції f вигляду (1), для якої $T_f(\Phi) > t_f(\Phi)$.

З цією метою зафіксуємо довільне число $r_0 > 1$ таке, що $\Phi(\ln r_0) > 0$, і розглянемо множини

$$E_1 = \{r > r_0 \colon \ln \Phi'(\ln r) > 8\varepsilon \Phi(\ln r)\},$$

$$E_2 = \{r > r_0 \colon \ln \Phi'(\ln r) > 2\varepsilon \Phi(\ln r)\}.$$

Зрозуміло, що $E_1 \subset E_2$ і згідно з нерівністю (7) кожна з множин E_1 та E_2 необмежена. З іншого боку, для множини E_2 виконується оцінка

$$\int_{E_2} \frac{\exp\{\varepsilon \Phi(\ln r)\}}{r} dr \le \int_{E_2} \frac{\Phi'(\ln r)}{r \exp\{\varepsilon \Phi(\ln r)\}} dr =$$

$$= \int_{E_2} \frac{d\Phi(\ln r)}{\exp\{\varepsilon \Phi(\ln r)\}} \le \int_0^{+\infty} \frac{dy}{e^{\varepsilon y}} = K < +\infty. \tag{8}$$

З (8), зокрема, випливає, що зовні множини E_2 знайдеться деяка зростаюча до $+\infty$ послідовність. Крім того, множина E_2 — відкрита. Отже, ця множина є об'єднанням зліченної системи інтервалів, які попарно не перетинаються. Позначимо через $\mathcal{P}$ зліченну підсистему цієї системи, яка складається з таких інтервалів I, що $I \cap E_1 \ne \varnothing$.

Нехай $I \in \mathcal{P}$. Позначимо через $x(I)$ довільну точку інтервалу I, яка входить до множини E_1, а через $y(I)$ — правий кінець цього інтервалу. Тоді $\ln \Phi'(\ln x(I)) > 8\varepsilon\Phi(\ln x(I))$, $\ln \Phi'(\ln y(I)) = 2\varepsilon\Phi(\ln y(I))$, а тому між $x(I)$ і $y(I)$ знайдеться точка $c(I)$ така, що $\ln \Phi'(\ln c(I)) = 4\varepsilon\Phi(\ln c(I))$. Крім того,

$$\Phi(\ln c(I)) = \frac{\ln \Phi'(\ln c(I))}{4\varepsilon} > \frac{\ln \Phi'(\ln x(I))}{4\varepsilon} > 2\Phi(\ln x(I)),$$

$$2\Phi(\ln c(I)) = \frac{\ln \Phi'(\ln c(I))}{2\varepsilon} < \frac{\ln \Phi'(\ln y(I))}{2\varepsilon} = \Phi(\ln y(I)).$$

Отже, існують числа $b(I)$ і $d(I)$ такі, що $x(I) < b(I) < c(I) < d(I) < y(I)$ і $\Phi(\ln c(I)) = 2\Phi(\ln b(I)) = \Phi(\ln d(I))/2$.

Виберемо з сукупності $\mathcal{P}$ таку послідовність інтервалів $\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$, щоб при кожному $k \ge 0$ виконувались умови:

1) I_{k+1} на дійсній осі лежить справа від I_k;

2) якщо $b_k = b(I_k)$, $c_k = c(I_k)$, $d_k = d(I_k)$, то при $0 \le k \to \infty$ справджуються співвідношення $n_k = [\Phi(\ln c_k)/\ln c_k] \uparrow +\infty$,

$$n_{k+1} \ge 4\Phi(\ln d_k), \tag{9}$$

$$\ln c_k = o(\ln c_{k+1}), \tag{10}$$

$$\left(\frac{b_k}{d_k}\right)^{n_{k+1}-n_k} = o(1). \tag{11}$$

Покладемо $a_{n_0} = 1$, і нехай $a_{n_{k+1}} = \left(\prod_{i=0}^{k} c_i^{n_{i+1}-n_i}\right)^{-1}$, $k \ge 0$. Звідси випливає

$$\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} = c_k^{n_{k+1}-n_k}, \quad k \ge 0. \tag{12}$$

Нехай далі $a_n = 0$, якщо $n < n_0$. Якщо ж $n \in (n_k; n_{k+1})$ і $k \ge 0$, то покладемо $a_n = a_{n_k} c_k^{-(n-n_k)}$; в цьому випадку згідно з (12) $a_n / a_{n+1} = c_k \uparrow +\infty$, $k \to \infty$. Отже, ряд (1) з так визначеними коефіцієнтами задає цілу функцію, причому

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_{n_k} c_k^{-(n-n_k)} z^n. \tag{13}$$

З (12), як нескладно перевірити (або див., наприклад, [2], лема 1), випливають рівності

$$\mu_f(r) = a_{n_{k+1}} r^{n_{k+1}}, \quad \nu_f(r) = n_{k+1}, \quad \text{якщо} \quad r \in [c_k; c_{k+1}) \quad \text{і} \quad k \geq 0; \tag{14}$$

крім того, $\mu_f(c_k) = a_{n_k} c_k^{n_k}$, $k \geq 0$. Тому, помічаючи, що $a_{n_k} < 1$, отримуємо $\ln \mu_f(c_k) \leq n_k \ln c_k \leq \Phi(\ln c_k)$, $k \geq 0$. З іншого боку, оскільки [3, с. 13]

$$\ln \mu_f(r_2) - \ln \mu_f(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\nu_f(r)}{r} dr, \quad r_2 > r_1 > 0,$$

то при $k \geq 1$, використовуючи співвідношення (10), маємо

$$\ln \mu_f(c_k) = \ln \mu_f(c_{k-1}) + \int_{c_{k-1}}^{c_k} \frac{\nu_f(r)}{r} dr \geq \int_{c_{k-1}}^{c_k} \frac{\nu_f(r)}{r} dr =$$

$$= n_k(\ln c_k - \ln c_{k-1}) = (1 - o(1)) n_k \ln c_k = (1 - o(1)) \Phi(\ln c_k), \quad k \to +\infty.$$

Отже,

$$\ln \mu_f(c_k) \sim \Phi(\ln c_k), \quad k \to +\infty. \tag{15}$$

Оскільки $\ln \mu_f(r)$ і $\Phi(\ln r)$ — відповідно лінійна і опукла функції відносно $\ln r$ на кожному з відрізків $[c_k; c_{k+1}]$, то з (15) безпосередньо випливає рівність $t_f(\Phi) = 1$.

Покажемо тепер, що $T_f(\Phi) > 1$. Зауважуючи, що $(b_k; d_k) \subset E_2$, з (8) отримуємо

$$e^{\varepsilon \Phi(\ln b_k)} \ln \frac{d_k}{b_k} \leq \int_{b_k}^{d_k} \frac{\exp\{\varepsilon \Phi(\ln r)\}}{r} dr \leq K, \quad k \geq 0, \tag{16}$$

звідки випливають співвідношення

$$b_k \sim c_k \sim d_k, \quad k \to +\infty. \tag{17}$$

Тому згідно з (17) і (10)

$$\ln \mu_f(b_{k+1}) \geq \int_{c_k}^{b_{k+1}} \frac{\nu_f(r)}{r} dr = n_{k+1}(\ln b_{k+1} - \ln c_k) = (1 - o(1)) n_{k+1} \ln c_{k+1} =$$

$$= (1 - o(1)) \Phi(c_{k+1}) = (2 - o(1)) \Phi(b_{k+1}), \quad k \to \infty; \tag{18}$$

крім того, згідно з (9)

$$\ln \mu_f(d_k) \geq \int_{c_k}^{d_k} \frac{\nu_f(r)}{r} dr = \int_{c_k}^{d_k} \frac{n_{k+1}}{r} dr \geq 4 \int_{c_k}^{d_k} \frac{\Phi'(\ln d_k)}{r} dr \geq 4 \int_{c_k}^{d_k} \frac{\Phi'(\ln r)}{r} dr =$$

$$= 4\big(\Phi(\ln d_k) - \Phi(\ln c_k)\big) = 2\Phi(\ln d_k), \quad k \geq 0. \tag{19}$$

З (18) і (19), ще раз використовуючи те, що $\ln \mu_f(r)$ — лінійна, а $\Phi(\ln r)$ — опукла функції відносно $\ln r$ на $[c_k; c_{k+1}]$, отримуємо

$$\ln M_f(r) \ge \ln \mu_f(r) \ge \frac{3}{2}\Phi(\ln r), \quad r \in [d_k; b_{k+1}], \quad k \ge k_1. \tag{20}$$

Оцінимо тепер $M_f(r)$ знизу на $[b_k; d_k]$. Спочатку з (16), враховуючи елементарну нерівність $1 - \exp\{-x\} \le x$, $x \ge 0$, маємо

$$1 - \frac{b_k}{d_k} \le 1 - \exp\left\{-\frac{K}{\exp\{\varepsilon\Phi(\ln b_k)\}}\right\} \le \frac{K}{\exp\{\varepsilon\Phi(\ln b_k)\}}, \quad k \ge 0. \tag{21}$$

Далі, згідно з (17) і (11)

$$\frac{b_k}{d_k} > \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{b_k}{d_k}\right)^{n_{k+1}-n_k} < \frac{1}{2}, \quad \text{якщо} \quad k \ge k_2. \tag{22}$$

Враховуючи (14), (12), (21) і (22), з (13) для кожного $r \in [c_k; d_k]$ отримуємо

$$M_f(r) \ge \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_{n_k} c_k^{-(n-n_k)} r^n = \mu_f(r) \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \left(\frac{c_k}{r}\right)^{n_{k+1}-n} \ge$$

$$\le \mu_f(r) \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \left(\frac{b_k}{d_k}\right)^{n_{k+1}-n} = \mu_f(r) \frac{b_k}{d_k}\left(1 - \left(\frac{b_k}{d_k}\right)^{n_{k+1}-n_k}\right)\left(1 - \frac{b_k}{d_k}\right)^{-1} \ge$$

$$\ge \frac{\mu_f(r)}{4} \frac{\exp\{\varepsilon\Phi(\ln b_k)\}}{K} = \frac{\mu_f(r)}{4} \frac{\exp\{\varepsilon\Phi(\ln d_k)/4\}}{K} \ge$$

$$\ge \frac{\mu_f(r)}{4} \frac{\exp\{\varepsilon\Phi(\ln r)/4\}}{K}, \quad k \ge k_2. \tag{23}$$

Аналогічно, якщо $r \in [b_k; c_k]$, то

$$M_f(r) \ge \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} a_{n_k} c_k^{-(n-n_k)} r^n = \mu_f(r) \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \left(\frac{r}{c_k}\right)^{n-n_k} \ge$$

$$\le \mu_f(r) \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \left(\frac{b_k}{d_k}\right)^{n-n_k} = \mu_f(r)\left(1 - \left(\frac{b_k}{d_k}\right)^{n_{k+1}-n_k}\right)\left(1 - \frac{b_k}{d_k}\right)^{-1} \ge$$

$$\ge \frac{\mu_f(r)}{2} \frac{\exp\{\varepsilon\Phi(\ln b_k)\}}{K} = \frac{\mu_f(r)}{2} \frac{\exp\{\varepsilon\Phi(\ln c_k)/2\}}{K} \ge$$

$$\ge \frac{\mu_f(r)}{4} \frac{\exp\{\varepsilon\Phi(\ln r)/2\}}{K}, \quad k \ge k_2. \tag{24}$$

Нарешті з (20), (23) і (24), враховуючи доведену рівність $t_f(\Phi) = 1$, отримуємо $T_f(\Phi) \ge \max\{3/2; 1 + \varepsilon/4\} > 1$, що й потрібно було довести.

1. *Філевич П. В.* Асимптотична поведінка цілих функцій з винятковими значеннями у співвідношенні Бореля // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 522 – 530.
2. *Шеремета М. Н.* Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 215 – 226.
3. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 432 с.

Одержано 08.05.2001