УДК 513.88: 517.948.3

Г. С. Полетаев (Одес. академия холода)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА СВЕРТКИ

For arbitrary operator, we state a general restoration problem inverse with respect to finding solutions. This problem for considered pair operator is reduced to the equivalent problem of restoration of kernels of pair integral equation of convolution type generating the operator. In the investigated cases, we prove theorems that characterize the restoration of the corresponding kernels constructed via two functions from different Banach algebras of $L_1(-\infty, \infty)$ type with a weight.

Для довільного оператора поставлено загальну обернену по відношенню до пошуку розв'язків задачу відновлення. Цю задачу для розглянутого парного оператора зведено до еквівалентної задачі відновлення ядер породжуючого оператор парного інтегрального рівняння типу згортки. У вивчених випадках доведено теореми, що характеризують відновлення відповідних ядер, які будуються через дві функції із різних банахових алгебр типу $L_1(-\infty, \infty)$ з вагою.

Данная работа является продолжением работы [1], не зависимым от [2]. Отправляясь от общей операторной трактовки, в ней излагаются и дополняются результаты [3]. Рассматриваемая задача восстановления может быть реализована для разных конкретных классов и видов операторов: матричных, интегральных, порождаемых (связанных с) соответствующими уравнениями. Это своеобразная обратная по отношению к отысканию решений задача восстановления оператора T, в данном случае интегрального, определенного класса и вида по информации о некоторых прообразах и образах (x_0, y_0):

$$T x_0 = y_0, \qquad x_0 \in D(T), \quad y_0 \in R(T). \tag{1}$$

1. Общие положения и постановки задач восстановления. *1.1.* Пусть $\mathring{\mathsf{A}}\colon \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ — оператор, действующий из банахова пространства $\mathfrak{B}_1$ в банахово пространство $\mathfrak{B}_2$. Решение „прямой" задачи вычисления $y \in \mathfrak{B}_2$ по формуле $y = \mathring{\mathsf{A}} x$, $x \in \mathfrak{B}_1$, часто существенно проще решения обратных задач. Естествен вопрос: насколько известные решения некоторых прямых задач помогают в решении обратных? При его решении возникает следующая задача.

Задача восстановления оператора: среди операторов $\mathring{\mathsf{A}}\colon \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ определенного класса и вида найти такой, что для одной или нескольких пар (x, y) известных элементов $x \in \mathfrak{B}_1$, $y \in \mathfrak{B}_2$ $y = \mathring{\mathsf{A}} x$. При существовании такого оператора $\mathring{\mathsf{A}}\colon \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ фиксированного класса и вида он называется (x, y)-восстанавливающим оператором $\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ этого класса и вида. Для (x, y)-восстанавливающего оператора $\mathring{\mathsf{A}}\colon \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ справедливо равенство $\mathring{\mathsf{A}} x = y$, где $x \in \mathfrak{B}_1$, $y \in \mathfrak{B}_2$ — известные элементы. При такой общей постановке задача восстановления может быть неопределенной и даже неразрешимой, а содержательные утверждения возникают при дополнительных ограничениях в конкретных случаях постановки. Если, например, $\mathring{\mathsf{A}}$ — матричный с квадратной матрицей размера $n \times n$ оператор и $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = R_n$, $n \in N$, то задача восстановления может быть или однозначно разрешима по n парам (x, y), или неразрешима по n парам, или иметь бесконечно много решений. Если $\mathring{\mathsf{A}}$ — матричный оператор, определенный, как и выше, квадратной числовой матрицей размера $n \times n$, но $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = R_{n \times n}$, $n \in N$, то возможна ситуация, когда задача восстановления однозначно разрешима по одной паре x, $y \in R_{n \times n}$ с соответствующим условием $\det x \neq 0$.

Для интегрального оператора $(I - \mathring{\mathsf{A}})\colon \tilde{L} \to \tilde{L}$, $\tilde{L} = \tilde{L}_{(0)}$ [1, 4], $\mathring{\mathsf{A}} \varphi = \varphi(t) -$

$-\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)ds$, $k(t) \in L_1(-\infty,\infty)$, задача восстановления $\mathring{A}$ эквивалентна отысканию порождающей ядро $k(t-s)$ функции $k(t) \in L_1(-\infty,\infty)$ из уравнения $\mathring{A}\varphi = f$, $f = f(t) \in \tilde{L}$. Такую функцию $k(t)$ при существовании ее для пары $\varphi(t)$, $f(t) \in \tilde{L}$, назовем (φ, f)-восстанавливающей для рассматриваемого оператора $\mathring{A}$ и соответствующего интегрального уравнения типа свертки [4, 5]:

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)ds = f(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{2}$$

Переходя к компактной записи (2) [1] и используя соответствующий вариант известной теоремы Н. Винера [1, 2, 4, 6] в банаховой алгебре $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$ при $c = 0$, можно установить однозначную разрешимость задачи восстановления по одной паре: $\varphi(t) = \delta + x(t)$, $f(t) = \delta + h(t)$ (где $x(t)$, $h(t) \in L_1(-\infty,\infty)$, $\delta = \delta(t)$ — играющая в банаховых алгебрах $\tilde{L}_{\langle c \rangle}$, $c \in R_1$ [1], роль мультипликативной единицы соответствующая $\delta(t)$-функция Дирака), удовлетворяющей единственному условию

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\lambda t}dt \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{3}$$

При этом

$$\delta - k(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-s)f(s)ds, \quad -\infty < t < \infty,$$

а функция $x_1(t) \in L_1(-\infty,\infty)$ такова, что

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{i\lambda t}dt = \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\lambda t}dt\right]^{-1}, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Существование такой функции $x_1(t)$ для заданной $x(t) \in L_1(-\infty,\infty)$ при условии (3) гарантируется упомянутой теоремой Н. Винера.

1.2. Легко заметить, что парный оператор $I - K_\pi$: $\tilde{L}_{o\cap c} \to \tilde{L}_{o\cap c}$ [1, с. 811], определяемый левой частью парного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)ds &= f(t), \quad -\infty < t < 0, \\ \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)ds &= f(t), \quad 0 < t < \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

и действующий по формуле $[I - K_\pi]\varphi = ([\delta - k_2] * \varphi)^+ + ([\delta - k_1] * \varphi)_-$, $\varphi \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $c > 0$, где $\tilde{L}_{o\cap c} = \{\alpha\delta + k(t) \colon k(t)(1 + \exp\{ct\}) \in L_1(-\infty,\infty); \alpha \in \mathbb{C}, c \in R_1\}$, а через $*$ обозначена свертка функций, полностью определяется функциями $k_{1,2}(t)$. Эти функции при $k_1(t)$, $k_2(t)\exp\{ct\} \in L_1(-\infty,\infty)$ порождают ядра уравнения (4). Поэтому задача восстановления парного оператора в $\tilde{L}_{o\cap c}$ с удовлетворяющими указанным условиям ядрами эквивалентна задаче восстановления порождающих ядра функций $k_{1,2}(t)$ в парном интегральном уравнении (4) по некоторым решениям [3], к рассмотрению которой мы переходим. Отметим, что для оператора, порождаемого парным интегральным уравнением (4), задача восстановления функций $k_{1,2}(t)$ с дополнительными условиями, наряду с задачей решения (4) и интегральных уравнений типа Винера – Хопфа [4, 5, 7, 8, 10], получающихся из (4) при $k_1(t)=0$, $-\infty<t<\infty$, $f(t)=0$, $t<0$, часто оказывается гораздо сложнее, чем для простейших уравнений типа свертки (2).

1.3. Напомним некоторые обозначения и определения из [1 – 3]. Для любой функции $k(t)$, $-\infty<t<\infty$, положим $k_{\mp}(t)=k(t)$, $\mp t\geq 0$, $k_{\mp}(t)=0$, $\mp t<0$. Символом $L_{\langle c\rangle}$ $\left(=L_{\langle c\rangle}(-\infty,\infty)\right)$, $c\in R_1$, будем обозначать банахову алгебру всех комплекснозначных измеримых функций $k(t)$, $-\infty<t<\infty$, таких, что $k(t)\exp\{ct\}\in L_1(-\infty,\infty)$, где c — вещественное число; $L:=L_{\langle 0\rangle}=L_1(-\infty,\infty)$.

Роль умножения в $L_{\langle c\rangle}$ играет свертка, обозначаемая символом $*$. Норма в $L_{\langle c\rangle}$ вводится по формуле $\|k\|_{L_{\langle c\rangle}}=\int_{-\infty}^{\infty}|k(t)|e^{ct}\,dt$, $k\in L_{\langle c\rangle}$. Символом $L_{a\cap b}$ обозначим пересечение алгебр $L_{\langle a\rangle}$ и $L_{\langle b\rangle}$, $a,b\in R_1$. Под $L^{\mp}$, $L^{\mp}_{\langle c\rangle}$, $L^{\mp}_{a\cap b}$ будем понимать подалгебры функций соответственно из L, $L_{\langle c\rangle}$, $L_{a\cap b}$, которые обращаются в нуль при $\pm t>0$. Пусть δ $(=\delta(t))$ — формальный элемент такой, что $\delta*\delta:=\delta$, $\delta(t):=\delta(-t)$ и $\delta(t)*k(t)=k(t)*\delta(t):=k(t)$ $\left(k\in L^{+}_{\langle -|c|\rangle}\oplus\right.$ $\left.\oplus\, L^{-}_{\langle |c|\rangle}\right)$, а A — любая из введенных выше алгебр, $\delta\,\overline{\in}\,A$. Символом $\tilde{A}$ обозначим алгебру, полученную формальным присоединением к A элемента δ, играющего в $\tilde{A}$ роль присоединенной мультипликативной единицы [6]. Операции сложения и умножения распространяются из A на $\tilde{A}$ естественным образом, а норма вводится по формуле $\|\alpha\delta(t)+k(t)\|_{\tilde{A}}=|\alpha|+\|k\|_A$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $k\in A$. Элементы вида $g=\alpha\delta+k_{\pm}(t)$, $k_{\pm}(t)\in A$, часто обозначаются через $g^{\pm}$, что подчеркивает их принадлежность подалгебрам $\tilde{A}^{\pm}$. Символами $L_{a\cup b}$, $\tilde{L}_{a\cup b}$ (a, b — вещественные числа) обозначим соответственно суммы пространств $L_{\langle a\rangle}$ и $L_{\langle b\rangle}$, $\tilde{L}_{\langle a\rangle}$ и $\tilde{L}_{\langle b\rangle}$. Банахова алгебра $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ не имеет радикала и, следовательно, изоморфна некоторому кольцу непрерывных функций. Поэтому элементы рассматриваемых множеств часто будем называть функциями. Обратный для обратимого в $\tilde{A}$ элемента $g\in\tilde{A}$ будем обозначать через g'. Может случиться так, что элемент $g\in\tilde{A}$, обратимый в $\tilde{A}$ или нет, имеет обратный в некоторой другой алгебре. Тогда, чтобы уточнить, какой именно обратный для g рассматривается, будем применять индексы, ассоциированные с алгеброй, содержащей этот обратный. Введем проекторы $p^{\mp}:\tilde{L}^{+}_{\langle -|c|\rangle}+\tilde{L}^{-}_{\langle |c|\rangle}\to\tilde{L}^{\mp}_{\langle\pm|c|\rangle}$, действующие по формуле $p^{\mp}(\alpha\delta+k)=\alpha\delta+k_{\mp}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $k\in L^{+}_{\langle -|c|\rangle}\oplus L^{-}_{\langle |c|\rangle}$, $p_{\mp}:=$ $:=p^{\mp}-p^{\mp}p^{\pm}$. Для любой функции $g=\alpha\delta+k$, $k\in A$, положим $g^{\mp}=p^{\mp}g$. Очевидно, $g^{\mp}=\alpha\delta+k_{\mp}$. Если $k\in A$, то через $K(\zeta)$ будем обозначать интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}k(t)e^{i\zeta t}\,dt$, рассматриваемый при тех ζ, для которых он существует.

Пусть функция $g=\alpha\delta+k$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $k\in L_{a\cap b}$, такова, что при некотором $c\in[a,b]$ выполняется условие $\alpha[\alpha+K(\lambda-ic)]\neq 0$, $-\infty<\lambda<\infty$.

Определение 1. *Индексом g, как элемента $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ (кратко $\chi[g,c]$ либо $\operatorname{ind}[g]_c$), назовем число, равное индексу функции $\alpha+K(\lambda-ic)$ переменной λ*

вдоль сомкнутой вещественной оси $\{-\infty, \infty\}$, *получающейся из* $[-\infty, \infty]$ *отождествлением концов* [1 – 4]:

$$\left(\operatorname{ind}[g]_c =\right) \ \chi[g, c] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda [\arg\{\alpha + K(\lambda - ic)\}].$$

В частности, если $g = \delta - k$, $k \in L$, *и* $1 - K(\lambda) \neq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$, *то*

$$\left(\operatorname{ind}[g]_0 =\right) \ \chi[g, 0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda [\arg\{1 - K(\lambda)\}].$$

Аналогично в $\tilde{L}_{\langle c\rangle} \left(= \tilde{L}_{c\cap c}\right)$.

Определение 2. *Под факторизацией функции* $g = \delta - k$, $k \in L_{\langle c\rangle}$, *в* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ *будем понимать представление ее в виде*

$$g = [\delta + \gamma_+] * [\delta + \gamma_-], \quad \gamma_\mp \in \tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}. \tag{5}$$

Эту факторизацию назовем „правильной в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$", если хотя бы один из $\mp$-факторов $\delta + \gamma_\mp$ обратим в своей подалгебре $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$. Если оба фактора таковы, то (5) назовем „канонической в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$" факторизацией.

1.4. Рассмотрим постановку общей задачи восстановления ядер интегральных уравнений наперед заданного типа по решениям и исследуем частные случаи этой задачи для парного уравнения (4) с правой частью $f(t) = \delta$:

$$p^-([\delta - k_1] * \varphi)(t) = \delta, \qquad p^+\left([\delta - k_2] * \varphi\right)(t) = \delta, \quad -\infty < t < \infty. \tag{4'}$$

Определение 3. *Пусть* $\varphi \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $f \in \tilde{L}_{o\cup c}$, $c \in R_1$. *Пару функций* $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$, $-\infty < t < \infty$, *будем называть* (φ, f)*-восстанавливающей парой уравнения* (4), *если* $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{\langle c\rangle}$ *и* $p^-([\delta - k_1] * \varphi) = f^-$, $p^+\left([\delta - k_2] * \varphi\right) = f^+$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $\varphi \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $c \in R_1$. *Если пара функций* $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$, $-\infty < t < \infty$, *является* (φ, δ)*-восстанавливающей, то* (φ, δ)*-восстанавливающей будет и пара функций* $\left[v_1(t), v_2(t)\right]$, $-\infty < t < \infty$, *определяемая равенствами* $\delta - v_1 = [\delta + r_+] * [\delta - k_1]$, $\delta - v_2 = [\delta + r_-] * \left[\delta - k_2\right]$, *где* r_+, r_- — *произвольные функции соответственно из* L^+, $L^-_{\langle c\rangle}$.

Доказательство. Очевидно, что при условиях леммы функция $v_1(t) \in L$, а функция $v_2(t) \in L_{\langle c\rangle}$, причем

$$p^-([\delta - v_1] * \varphi) = p^-([\delta + r_+] * [\delta - k_1] * \varphi) =$$

$$= p^-\{[\delta + r_+] * ([\delta - k_1] * \varphi)_+\} + p^-\left\{[\delta + r_+] * ([\delta - k_1] * \varphi)^-\right\} =$$

$$= p^+ p^- [\delta + r_+] * p^+ p^- ([\delta - k_1] * \varphi)_+ + p^-\{[\delta + r_+] * \delta\} = \delta;$$

$$p^+([\delta - v_2] * \varphi) = p^+\left([\delta + r_-] * \left[\delta - k_2\right] * \varphi\right) =$$

$$= p^+\left\{[\delta + r_-] * \left(\left[\delta - k_2\right] * \varphi\right)_-\right\} + p^+\left\{[\delta + r_-] * \left(\left[\delta - k_2\right] * \varphi\right)^+\right\} = \delta.$$

Следствие 1. *Если функция* $\varphi \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$ *и имеется хотя бы одна* (φ, δ)-*восстанавливающая пара уравнения* (4), *то таких* (φ, δ)-*восстанавливающих пар бесконечно много.*

1.5. Обычно при исследовании интегральных уравнений вида

$$\alpha(t)\varphi(t) = \int_S k(t, s)\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in T, \tag{6}$$

множества T, S и функции $\alpha(t)$, $f(t)$, $k(t, s)$, $t \in T, s \in S$, наперед заданы, а функция $\varphi(t)$ — искомая. В некотором смысле обратной по отношению к задаче отыскания решений интегрального уравнения (6) определенного типа и эквивалентной задаче восстановления соответствующего оператора является следующая задача восстановления ядер.

Задача B. Для двух функций $[\varphi(t), f(t)]$ найти ядро $k(t, s)$ интегрального уравнения (6) наперед заданного класса, имеющего своим решением, соответствующим правой части $f(t)$, функцию $\varphi(t)$, где $f(t)$, $\varphi(t)$ — известные функции, удовлетворяющие определенным условиям.

Ядра в (4) строятся по функциям $k_{1,2}(t)$ очевидным образом. Учитывая это обстоятельство и накладывая конкретные ограничения, позволяющие в определенной мере использовать подходы из [1], будем рассматривать следующую реализацию для (4) задачи B: для функций $\varphi(t)$, $f(t) \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$, $c \in R_1$, найти (φ, f)-восстанавливающую пару.

Для (4′) рассмотрим следующие случаи этой реализации задачи B с дополнительными ограничениями.

Задача B_0. Найти условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$ для того, чтобы у нее существовали (φ, δ)-восстанавливающие пары $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$ уравнения (4), имеющие свойства

$$\left[1 - K_1(\lambda)\right]\left[1 - K_2(\lambda - ic)\right] \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{7}$$

$$\chi_1 = \chi_2 = 0, \tag{8}$$

где $\chi_1 := \chi[\delta - k_1, 0]$, $\chi_2 := \chi\left[\delta - k_2, c\right]$ — индексы коэффициентов уравнения (4′) соответственно в $\tilde{L}$, $\tilde{L}_{(c)}$. Для функции $\varphi \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$, имеющей требуемые свойства, дать способ построения таких пар.

Задача B_+. Найти условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$ для того, чтобы у нее существовали (φ, δ)-восстанавливающие пары $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$ уравнения (4), имеющие свойства (7) и

$$\chi_1 > 0, \quad \chi_2 = 0. \tag{9}$$

Для функции $\varphi \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$, имеющей требуемые свойства, дать способ построения таких пар.

Задача B_-. Найти условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$ для того, чтобы у нее существовали (φ, δ)-восстанавливающие пары $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$ уравнения (4), имеющие свойства (7) и

$$\chi_1 < 0, \quad \chi_2 = 0. \tag{10}$$

Для функции $\varphi \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$, имеющей требуемые свойства, дать способ построения таких пар.

2. Основные результаты. ***2.1.*** Реализацию задачи B для уравнения (4) характеризует следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть заданы функции* φ, $f \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $c \in R_1$, *где* $\varphi(t) = \alpha\delta - x(t)$ $f(t) = \alpha\delta + h(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$; $x, h \in L_{o\cap c}$ *и выполняется условие*

$$\text{элемент } \varphi \text{ имеет в } \tilde{L}_{o\cap c} \text{ обратный } \varphi'_{o\cap c} = \alpha^{-1}\delta + x_1(t), \quad x_1 \in L_{o\cap c}. \tag{11}$$

Тогда (φ, f)*-восстанавливающие пары функций* $[k_1(t), k_2(t)]$, $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{\langle c \rangle}$, $c \in R_1$, *уравнения* (4) *существуют. Ими будут все пары функций* $[k_1(t), k_2(t)]$, $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{\langle c \rangle}$, $c \in R_1$, *определяемые представлениями вида*

$$\begin{aligned} \delta - k_1(t) &= \left[f^-(t) + q_+(t)\right] * \left[\alpha^{-1}\delta + x_1(t)\right], \\ \delta - k_2(t) &= \left[f^+(t) + q_-(t)\right] * \left[\alpha^{-1}\delta + x_1(t)\right], \end{aligned} \tag{12}$$

где $q_+ \in L^+$, $q_- \in L^-_{\langle c \rangle}$ *— произвольные функции из отмеченных подколец. Указанными парами исчерпываются все* (φ, f)*-восстанавливающие пары уравнения* (4).

Доказательство. Пусть $\varphi, f\,(=\alpha\delta + h) \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $h \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $c \in R_1$, и условие (11) выполнено. Тогда, как бы ни были выбраны функции $q_+ \in L^+$, $q_- \in L^-_{\langle c \rangle}$, $c \in R_1$, определяемые формулами (12) функции $k_{1,2}(t)$ существуют; $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{\langle c \rangle}$ и

$$\begin{aligned} p^-([\delta - k_1] * \varphi) &= p^-\left(\left\{\left[f^- + q_+\right] * \varphi'_{o\cap c}\right\} * \varphi\right) = \\ &= p^-\left(\left[f^- + q_+\right] * \left\{\varphi'_{o\cap c} * \varphi\right\}\right) = p^-\left[f^- + q_+\right] = f^-. \end{aligned}$$

Аналогично

$$p^+\left(\left[\delta - k_2\right] * \varphi\right) = p^+\left(\left[f^+ + q_-\right] * \varphi'_{o\cap c} * \varphi\right) = p^+\left[f^+ + q_-\right] = f^+.$$

Пусть теперь $[k_1(t), k_2(t)]$, $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{\langle c \rangle}$, $c \in R_1$, — произвольная (φ, f)-восстанавливающая пара функций уравнения (4) для φ, f, удовлетворяющих предположениям теоремы и условию (11). Тогда $[\delta - k_1] * \varphi = f^- + q_+$, $[\delta - k_2] * \varphi = f^+ + q_-$, $\delta - k_1(t) = \left[f^-(t) + q_+(t)\right] * \left[\alpha^{-1}\delta + x_1(t)\right]$, $\delta - k_2(t) = \left[f^+(t) + q_-(t)\right] * \left[\alpha^{-1}\delta + x_1(t)\right]$, где $q_+ \in L^+$, $q_- \in L^-_{\langle c \rangle}$ — некоторые функции указанных подколец. Объединяя части доказательства, убеждаемся, что теорема верна.

Следствие 2. *При условиях теоремы* 1 (φ, f)*-восстанавливающих пар функций* $[k_1(t), k_2(t)]$ *уравнения* (4) *бесконечно много.*

Замечание. При $c = 0$ условие (11) эквивалентно условию

$$\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\lambda t}\, dt \neq 0, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{13}$$

Действительно, в силу теоремы Н. Винера при $c = 0$ [1, 2, 4, 6, 8 – 10] условие (13) является необходимым и достаточным для существования обратного $\varphi'_0 = \gamma\delta + x_1(t)$, $\gamma \in R_1$, $x_1 \in L$. Из соотношения $[\alpha\delta - x] * [\gamma\delta + x_1] = \delta$ вытекает $\gamma = \alpha^{-1}$.

2.2. При рассмотрении задач B_0, $\mathrm{B}_\mp$ ограничимся случаем $c > 0$. Задача B_0 соответствует восстановлению ядер уравнения (4′) с нулевыми индексами. Решение вопросов, поставленных в задаче B_0 при $c > 0$, даст следующая теорема.

Теорема 2. 1. *Для того чтобы функция* $\varphi \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $c > 0$, *имела* (φ, δ)-*восстанавливающую пару* $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$ *уравнения* (4), *имеющую свойства* (7) *и* (8), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три следующих условия:*

$$\varphi = \delta - x, \quad x \in L_{o\cap c}, \tag{14}$$

$$\Phi(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Im}\zeta \in [0, -c], \quad -\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty, \tag{15}$$

$$\operatorname{ind}[\varphi]_c = \operatorname{ind}[\varphi]_0 = 0. \tag{16}$$

2. *При выполнении условий* (14) – (16) (φ, δ)-*восстанавливающими среди пар* $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$, $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{\langle c\rangle}$, *со свойствами* (7), (8) *будут такие и только такие, которые допускают представления*

$$\delta - k_1 = [\delta + v_+] * [\delta + \gamma_-]'_0, \tag{17}$$

$$\delta - k_1 = [\delta + \gamma_+]' * [\delta + v_-], \tag{18}$$

где $\delta + \gamma_\mp$ — *факторы канонической факторизации в* $\tilde{L}_{o\cap c}$ *функции* φ:

$$\varphi = [\delta + \gamma_+] * [\delta + \gamma_-], \quad \gamma_\mp \in L^\mp_{o\cap c}, \quad (\delta + \gamma_\mp) \in \operatorname{inv}\tilde{L}^\mp_{o\cap c} \ [11], \tag{19}$$

а $\delta + v_+ \in \tilde{L}^+$, $\delta + v_- \in \tilde{L}^-_{\langle c\rangle}$ — *любые элементы, обратимые в своих подалгебрах* $\tilde{L}^+$, $\tilde{L}^-_{\langle c\rangle}$ *соответственно с* $v_+ \in L^+$, $v_- \in L^-_{\langle c\rangle}$.

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть $\varphi \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $c > 0$, а пара $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$ является (φ, δ)-восстанавливающей для уравнения (4) и имеет свойства (7), (8). Это означает, в частности, что уравнение (4′) с ядрами $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$, $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{\langle c\rangle}$, имеет своим решением в $\tilde{L}_{o\cap c}$ функцию φ. В силу свойств ядер k_1, k_2 применима теорема 4 из [1, с. 807]. Согласно следствию из этой теоремы функция φ допускает представление

$$\varphi = [\delta + \gamma_{1-}] * [\delta + \gamma_{2+}], \tag{20}$$

где $\delta + \gamma_{1-}$, $\delta + \gamma_{2+}$ — факторы канонических соответственно в $\tilde{L}$, $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизаций функций $\delta + k_1^1$ $\left(:= [\delta - k_1]'_0\right)$, $\delta + k_2^1$ $\left(:= \left[\delta - k_2\right]'_c\right)$:

$$\begin{aligned} \delta + k_1^1 &= [\delta + \gamma_{1-}] * [\delta + \gamma_{1+}], \quad \gamma_{1\mp} \in L^\mp, \\ \delta + k_2^1 &= [\delta + \gamma_{2-}] * [\delta + \gamma_{2+}], \quad \gamma_{2\mp} \in L^\mp_{\langle c\rangle}, \end{aligned} \tag{21}$$

возможных в силу теоремы 1 из [1, с. 806, 807]. В силу определения канонической в $\tilde{L}_{\langle a\rangle}$ факторизации элемента из $\tilde{L}_{\langle a\rangle}$, $a \in R_1$, в $\tilde{L}_{\langle a\rangle}$: $\gamma_{1-} \in L^-$, $\exists[\delta + \gamma_{1-}]' \in \tilde{L}^-$, $\gamma_{2+} \in L^+$, $\exists[\delta + \gamma_{2+}]' \in \tilde{L}^+_{\langle c\rangle}$. Используя очевидные включения, убеждаемся, что функции $[\delta + \gamma_{1-}]'$, $[\delta + \gamma_{2+}]' \in \tilde{L}_{o\cap c}$. Теперь ясно, что функция $[\delta + \gamma_{1-}]' * [\delta + \gamma_{2+}]' \in \tilde{L}_{o\cap c}$ представляет собой элемент, обратный для φ в $\tilde{L}_{o\cap c}$, а значит, и в любой из алгебр $\tilde{L}_{\langle a\rangle}$, $a \in [0, c]$. Применяя вариант теоремы Н. Винера в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ [1, с. 805], убеждаемся, что выполнение условия (15) необходимо. Свойства функций $\delta + \gamma_{1-}$, $\delta + \gamma_{2+}$, отмеченные выше, указывают, что (20) представляет собой каноническую факторизацию функции φ как в $\tilde{L}$, так и в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$. Для такой факторизации выполнение условия (16) необходимо в силу теоремы 1 из [1].

Необходимость представления (14) очевидна. Необходимость условий (14) – (16) установлена.

Достаточность. Пусть $\varphi \in \tilde{L}_{o\cap c}$, $c > 0$, и условия (14) – (16) выполнены. Тогда из теоремы 1 из [1, с. 806] следует, что функция φ, как элемент $\tilde{L}$, допускает каноническую в $\tilde{L}$ факторизацию $\varphi = [\delta + \gamma_{1+}] * [\delta + \gamma_{1-}]$, $\gamma_{1\mp} \in L^{\mp}$, а как элемент $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ — каноническую в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизацию $\varphi = [\delta + \gamma_{2+}] * {}* [\delta + \gamma_{2-}]$, $\gamma_{2\mp} \in L^{\mp}_{\langle c\rangle}$. В силу очевидных включений при $c > 0$ $\delta + \gamma_{1-}$, $[\delta + \gamma_{1-}]' \in \tilde{L}^{-}_{o\cap c}$, $\delta + \gamma^{+}_{2+}$, $[\delta + \gamma^{+}_{2+}]' \in \tilde{L}^{+}_{o\cap c}$. Сравнивая два указанных представления для φ, получаем равенство $[\delta + \gamma_{1+}] * [\delta + \gamma_{2+}]' = [\delta + \gamma_{2-}] * [\delta + \gamma_{1-}]'$, левая часть которого принадлежит $\tilde{L}^{+}$, а правая — $\tilde{L}^{-}_{\langle c\rangle}$. Стало быть, каждая из них имеет вид $\alpha\delta$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Легко видеть, что $\alpha\delta = \delta$. Таким образом, $[\delta + \gamma_{1+}] * [\delta + \gamma_{2+}]' = \delta$, $[\delta + \gamma_{2-}] * [\delta + \gamma_{1-}]' = \delta$. Поэтому $\delta + \gamma_{1\mp} = \delta + \gamma_{2\mp} = {}= \delta + \gamma_{\mp}$, $\gamma_{\mp} \in L^{\mp}_{o\cap c}$. Следовательно, имеет место факторизация (19), которая является канонической в $\tilde{L}_{o\cap c}$ факторизацией элемента φ [11].

Определим далее пару функций $[k_1(t), k_2(t)]$, $k_1 \in L \ldots \in L_{\langle c\rangle}$, формулами (17), (18), где $\delta + \gamma_{\mp}$ — факторы факторизации (19), $\delta + v_+ \in \tilde{L}^{+}$, $v_+ \in L^{+}$ — произвольная обратимая в $\tilde{L}^{+}$, а $\delta + v_- \in \tilde{L}^{-}_{\langle c\rangle}$, $v_- \in L^{-}_{\langle c\rangle}$ — произвольная обратимая в $\tilde{L}^{-}_{\langle c\rangle}$ функции. Покажем, что эта пара $[k_1(t), k_2(t)]$ является (φ, δ)-восстанавливающей парой уравнения (4), имеющей свойства (7), (8). Действительно,

$$p^{-}([\delta - k_1] * \varphi) = p^{-}\Big([\delta + v_+] * [\delta + \gamma_-]' * [\delta + \gamma_-] * [\delta + \gamma_+]\Big) =$$

$$= p^{-}([\delta + v_+] * [\delta + \gamma_+]) = \delta,$$

$$p^{+}\Big([\delta - k_2] * \varphi\Big) = p^{+}\Big([\delta + v_-] * [\delta + \gamma_+]' * [\delta + \gamma_-] * [\delta + \gamma_+]\Big) =$$

$$= p^{+}([\delta + v_-] * [\delta + \gamma_-]) = \delta,$$

так что построенные с помощью формул (17), (18) функции $k_1(t)$, $k_2(t)$ образуют (φ, δ)-восстанавливающую пару уравнения (4). Отметим далее, что функция $\delta + v_+$ в силу определения обратима в $\tilde{L}^{+}$, а функция $\delta + v_-$ обратима в $\tilde{L}^{-}_{\langle c\rangle}$; функция $\delta + \gamma_-$ обратима в $\tilde{L}^{-}$, а функция $\delta + \gamma_+$ обратима в $\tilde{L}^{+}_{\langle c\rangle}$ в силу свойств факторизации (19).

Следовательно, функция $\delta - k_1$ обратима в $\tilde{L}$, а функция $\delta - k_2$ — в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$. Применяя вариант теоремы Н. Винера в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ [1, с. 805], убеждаемся, что пара $[k_1(t), k_2(t)]$ имеет свойство (7). Кроме того, из обратимости в $\tilde{L}^{+}$ функции $\delta + v_+$, $v_+ \in L^{+}$, следует $1 + V_+(\zeta) \neq 0$, $\operatorname{Im}\zeta \geq 0$, а из обратимости в $\tilde{L}^{-}_{\langle c\rangle}$ функции $\delta + v_-$, $v_- \in L^{-}_{\langle c\rangle}$ — $1 + V_-(\zeta) \neq 0$, $\operatorname{Im}\zeta \leq -c$.

Тогда в силу свойств индекса $\operatorname{ind}[\delta+v_+]_0=0$, $\operatorname{ind}[\delta+v_-]_c=0$. Аналогично $\operatorname{ind}\left[[\delta+\gamma_+]'\right]_c = -\operatorname{ind}[\delta+\gamma_+]_c = 0$, $\operatorname{ind}\left[[\delta+\gamma_-]'\right]_0 = 0$. Стало быть, $\chi_1\left(=\operatorname{ind}[\delta-k_1]_0\right) = \operatorname{ind}[\delta+v_+]_0 + \operatorname{ind}\left[[\delta+\gamma_-]'\right]_0=0$, $\chi_2\left(=\operatorname{ind}[\delta-k_2]_c\right) = \operatorname{ind}[\delta+v_-]_c + \operatorname{ind}\left[[\delta+\gamma_+]'\right]_c=0$. Таким образом, пара $[k_1(t), k_2(t)]$ имеет и свойство (8). Достаточность условий (14) – (16) доказана.

2. Для доказательства утверждения 2 осталось показать, что все те (φ,δ)-восстанавливающие пары $[k_1(t), k_2(t)]$ уравнения (4) для функции $\varphi\in\tilde{L}_{o\cap c}$, $c>0$, удовлетворяющей условиям (14) – (16), которые имеют свойства (7), (8), действительно допускают представления вида (17), (18). Для этого предположим, что $[k_1(t), k_2(t)]$ — произвольная из таких (φ,δ)-восстанавливающих пар. Тогда в силу теоремы 1 из [1, с. 806] имеют место канонические в $\tilde{L}$ (соответственно, в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$) факторизации (21). Следовательно,

$$\delta - k_j = [\delta+\gamma_{j-}]' * [\delta+\gamma_{j+}]', \quad j=1,2. \tag{22}$$

Легко установить, что справедливы представления $[\delta+\gamma_{1+}]'=\delta+v_+$, $[\delta+\gamma_{2-}]'=\delta+v_-$, где v_+ — некоторая функция из L^+, а v_- — некоторая функция из $L^-_{\langle c\rangle}$. Как и при доказательстве необходимости, устанавливаем, что функция φ допускает представление (20). Очевидные включения показывают, что $\gamma_{1-}\in L^-_{o\cap c}$, $\gamma_{2+}\in L^+_{o\cap c}$. Поэтому из (20) следует факторизация (19), где $\gamma_-=\gamma_{1-}$, $\gamma_+=\gamma_{2+}$. Теперь очевидно, что (22) можно трактовать как представления (17), (18) для функций $\delta-k_1$, $\delta-k_2$. Теорема доказана.

2.3. Займемся восстановлением ядер парного интегрального уравнения (4′) с положительным индексом.

Рассмотрим задачу B_+ при дополнительном условии:

$$\alpha - X(\zeta) \neq 0 \quad (\operatorname{Im}\zeta=0 \text{ или } \operatorname{Im}\zeta=-c, \quad -\infty<\operatorname{Re}\zeta<\infty). \tag{23}$$

В такой постановке ее решение при $c>0$ характеризует следующая теорема.

Теорема 3. 1. *Для того чтобы функция* $\varphi=\alpha\delta-x$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $x\in L_{o\cap c}$, $c>0$, *удовлетворяющая условию* (23), *имела* (φ,δ)*-восстанавливающую пару* $[k_1(t), k_2(t)]$ *уравнения* (4) *со свойствами* (7), (9), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\alpha=1, \tag{24}$$

$$0 \geq \operatorname{ind}[\varphi]_c \geq \operatorname{ind}[\varphi]_0 \geq -\chi_1. \tag{25}$$

2. *При выполнении условий* (24), (25) (φ,δ)*-восстанавливающими парами уравнения* (4) *со свойствами* (7), (9) *будут все пары* $[k_1(t), k_2(t)]$, $k_1\in L$, $k_2\in L_{\langle c\rangle}$, *которые допускают представления* (17), (18), *где* $\delta+\gamma_-$ — *„минус"-фактор произвольной правильной в* $\tilde{L}$ *факторизации элемента* φ; $\delta+\gamma_+$ — *„плюс"-фактор произвольной правильной в* $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ *факторизации элемента* φ; *а* $v_+\in L^+$, $v_-\in L^-_{\langle c\rangle}$ — *любые элементы соответственно из* L^+, $L^-_{\langle c\rangle}$, *удовлетворяющие условиям*

$$1 + V_+(\zeta) \neq 0 \quad (\operatorname{Im}\zeta = 0, \quad -\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty), \quad \chi[\delta + v_+, 0] > 0,$$
$$1 + V_-(\zeta) \neq 0 \quad (\operatorname{Im}\zeta \leq -c, \quad -\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty). \tag{26}$$

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть функция $\varphi = \alpha\delta - x$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in L_{o\bigcap c}$, $c > 0$, со свойством (23) имеет (φ, δ)-восстанавливающую пару $\left[k_1(t), k_2(t)\right]$ уравнения (4) со свойствами (7), (9). В силу определения (φ, δ)-восстанавливающих пар имеем $k_1 \in L$, $k_2 \in L_{\langle c\rangle}$ и $p^-([\delta - k_1] * \varphi) = \delta$, $p^+([\delta - k_2] * \varphi) = \delta$. Следовательно,

$$\left[\delta - k_1\right] * \varphi = \delta + a_+, \quad \left[\delta - k_2\right] * \varphi = \delta + a_-, \tag{27}$$

где a_+ — некоторая функция из L^+, a_- — некоторая функция из $L^-_{\langle c\rangle}$. Отсюда

$$\left\{\left[\delta - k_1\right] * [\alpha\delta - x]\right\}^+ = \delta + a_+,$$
$$p^-\left\{\left[\delta - k_1\right] * [\alpha\delta - x]\right\}^+ = \alpha\delta = p^- p^+[\delta + a_+] = \delta,$$

т. е. $\alpha\delta = \delta$ и, стало быть, $\alpha = 1$, так что имеет место (24). В силу свойств индекса [4, 5] и условий (9) из (27) получаем

$$\chi_1 + \operatorname{ind}[\varphi]_0 = \operatorname{ind}\left[\delta + a_+\right]_0 \geq 0, \quad \operatorname{ind}[\varphi]_c = \operatorname{ind}\left[\delta + a_-\right]_c \leq 0. \tag{28}$$

Из (28) следует

$$\operatorname{ind}[\varphi]_0 = \operatorname{ind}[\delta + a_+]_0 - \chi_1 \geq -\chi_1. \tag{29}$$

Заметим, что согласно теореме 1 [1, с. 806] свойства (7), (9) обеспечивают существование канонической факторизации функции $\left[\delta - k_2\right]'$ в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$: $\left[\delta - k_2\right]' = [\delta + \gamma_{2+}] * [\delta + \gamma_{2-}]$, $\gamma_{2\mp} \in L^{\mp}_{\langle c\rangle}$. Поэтому справедливо такое равенство в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$: $[\delta + \gamma_{2+}]' * \varphi = [\delta + \gamma_{2-}] * [\delta + a_-] = \delta + b_-$, где b_- — некоторая функция из $L^-_{o\bigcap c}$, причем

$$1 + B_-(\zeta) \neq 0 \quad (\operatorname{Im}\zeta = 0 \text{ или } \operatorname{Im}\zeta = -c, \quad -\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty). \tag{30}$$

Из последних соотношений в силу свойств индекса получаем

$$-\chi[\delta + \gamma_{2+}, 0] + \operatorname{ind}[\varphi]_0 = \operatorname{ind}\left[\delta + b_-\right]_0 \leq$$
$$\leq \operatorname{ind}\left[\delta + b_-\right]_c = -\chi\left[\delta + \gamma_{2+}, c\right] + \operatorname{ind}[\varphi]_c. \tag{31}$$

Учитывая, что функция $\delta + \gamma_{2+}$ обратима в $\tilde{L}^+_{\langle c\rangle}$, и, следовательно, $1 + \Gamma_{2+}(\zeta) \neq 0$, $\operatorname{Im}\zeta \geq -c$, заключаем, что $\chi[\delta + \gamma_{2+}, 0] = \chi[\delta + \gamma_{2+}, c] = 0$. Поскольку функция $1 + B_-(\zeta)$ голоморфна внутри и непрерывна, включая границу полосы $\operatorname{Im}\zeta \leq 0$, а также выполнено условие (30), в силу свойств индекса [4, с. 15] $\operatorname{ind}\left[\delta + b_-\right]_0 \leq 0$, $\operatorname{ind}\left[\delta + b_-\right]_c \leq 0$. Поэтому из (31) следует неравенство

$$\operatorname{ind}[\varphi]_0 \leq \operatorname{ind}[\varphi]_c \leq 0. \tag{32}$$

Из (29) и (32) вытекает (25). Необходимость условий (24), (25) доказана.

Достаточность. Пусть дана функция $\varphi = \alpha\delta - x$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in L_{o\bigcap c}$, $c > 0$, имеющая кроме (23) свойства (24), (25). Покажем, что для нее существует (φ, δ)-восстанавливающая пара уравнения (4) со свойствами (7), (9). Действительно, в силу свойств функции φ имеют место правильные в $\tilde{L}$ и $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизации

$$\varphi = [\delta+\gamma_{1+}]*[\delta+\gamma_{1-}], \quad \gamma_{1\mp}\in L^{\mp}, \qquad \varphi = [\delta+\gamma_{2+}]*[\delta+\gamma_{2-}], \quad \gamma_{2\mp}\in L^{\mp}_{\langle c\rangle}. \tag{33}$$

В силу определения правильной в $\tilde{L}_{\langle a\rangle}$ $(a\in R_1)$ факторизации, теорем 1, 2 из [1, с. 806] о факторизации и вариантов теоремы Н. Винера [1, с. 805] при неположительных индексах $\operatorname{ind}[\varphi]_0$ и $\operatorname{ind}[\varphi]_c$ существуют обратные:

$$[\delta+\gamma_{1+}]'\in\tilde{L}^{+}, \quad [\delta+\gamma_{1-}]'_0\in\tilde{L}, \quad [\delta+\gamma_{2+}]'\in\tilde{L}^{+}_{\langle c\rangle}, \quad [\delta+\gamma_{2-}]'_c\in\tilde{L}_{\langle c\rangle}. \tag{34}$$

Используя варианты теоремы Н. Винера [1, с. 805] и свойства индекса [4, 5], из (25), (33), (34) заключаем

$$0 \le -\chi[\varphi,0] = \chi\Big[[\delta+\gamma_{1-}]'_0, 0\Big], \tag{35}$$

$$\chi\Big[[\delta+\gamma_{2+}]'_c, 0\Big] = 0. \tag{36}$$

Определим теперь пару $\big[k_1(t), k_2(t)\big]$, $k_1\in L$, $k_2\in L_{\langle c\rangle}$, формулами

$$\delta - k_1 = [\delta+\gamma_{1-}]'_0 * [\delta+u_+], \qquad \delta - k_2 = [\delta+\gamma_{2+}]'_c, \tag{37}$$

где функция $u_+\in L^+$ любая, такая, что $1+U_+(\lambda)\neq 0$, $-\infty<\lambda<\infty$, $\chi[\delta+u_+,0]>0$. Легко видеть, что так определенная пара $\big[k_1(t), k_2(t)\big]$ имеет свойство (7). Она же является (φ,δ)-восстанавливающей парой уравнения (4), так как $k_1\in L$, $k_2\in L_{\langle c\rangle}$, $p^-([\delta-k_1]*\varphi) = p^-([\delta+\gamma_{1+}]*[\delta+u_+])=\delta$, $p^+([\delta - k_2]*\varphi) = p^+(\delta+\gamma_{2-}) = \delta$. Выполнение свойства (9) следует из равенств (35) – (37). Таким образом, достаточность условий (24), (25) доказана.

2. Пусть $\delta+\gamma_-$ — „минус"-фактор произвольной правильной в $\tilde{L}$ факторизации в $\tilde{L}$ функции $\varphi=\alpha\delta-x$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $x\in L_{o\bigcap c}$, $c>0$, имеющей свойства (23) – (25), а $\delta+\gamma_+$ — „плюс"-фактор произвольной правильной в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизации в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ этой же функции. Очевидно, что пара $[u_1(t), u_2(t)]$, где $\delta-u_1 := [\delta+\gamma_-]'_0$, $\delta-u_2 := [\delta+\gamma_+]'$, является (φ,δ)-восстанавливающей. С помощью леммы убеждаемся, что любая пара функций $\big[k_1(t), k_2(t)\big]$, определяемая формулами (17), (18), где функции $v_+\in L^+$, $v_-\in L^-_{\langle c\rangle}$ удовлетворяют условиям (26), также является (φ,δ)-восстанавливающей. Легко проверить выполнение для этой пары свойств (7), (9). Теорема доказана.

2.4. Рассмотрим случай отрицательного индекса в задаче восстановления ядер уравнения (4′) по решениям.

Задача B_- решается при $c>0$ с помощью следующей теоремы.

Теорема 4. *Функция* $\varphi\in\tilde{L}_{o\bigcap c}$, $c>0$, *не имеет ни одной* (φ,δ)-*восстанавливающей пары* $\big[k_1(t), k_2(t)\big]$ *уравнения* (4) *со свойствами* (7), (10).

Доказательство. Предположим противное. Пусть некоторая функция $\varphi\in\tilde{L}_{o\bigcap c}$, $c>0$, имеет (φ,δ)-восстанавливающую пару $\big[k_1(t), k_2(t)\big]$ уравнения (4) со свойствами (7), (10). В силу определения 3 это означает, что $k_1\in L$, $k_2\in L_{\langle c\rangle}$, причем $p^-([\delta-k_1]*\varphi)=\delta$, $p^+\big([\delta-k_2]*\varphi\big)=\delta$. Стало быть, парное уравнение (4′) с ядрами $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct)\in L_1(-\infty,\infty)$, $c>0$, имеющими свойство (7), индекс которого согласно (10) отрицательный, имеет своим решением заданную функцию φ. Но это противоречит следствию 2 из теоремы *10* [1, с. 810, 811]. Полученное противоречие доказывает теорему.

Отметим в заключение, что при $\varphi, f \in \tilde{L}_{\alpha\cap c}$, $k_1(t)$, $k_2(t)\exp(ct) \in L_1(-\infty, \infty)$, $c \in R_1$, к уравнению (4′) сводится уравнение (4), если существуют $[f^{\pm}]'_{\alpha\cap c} \in \tilde{L}^{\mp}_{\alpha\cap c}$. В настоящее время подход к исследованию задачи восстановления развит для некоторых случаев абстрактных парных уравнений, рассматриваемых не в банаховых пространствах, а в ассоциативных, вообще, некоммутативных и не обязательно нормированных кольцах с факторизационными парами. Разрешимость такого рода уравнений изучалась в [11].

1. *Полетаев Г. С.* Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 6. – С. 803 – 813.
2. *Полетаев Г. С.* Интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами и его абстрактный аналог // Там же. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1073 – 1086.
3. *Полетаев Г. С.* О восстановлении ядер некоторых интегральных уравнений по решениям. – М., 1974. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1896-74 Деп.
4. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, вып. 5(83). – С. 3 – 120.
5. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
6. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. – М.: Физматгиз, 1960. – 316 с.
7. *Рапопорт И. М.* О некоторых „парных" интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях // Сб. тр. Ин-та математики АН УССР. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1949. – **12**. – С. 102 – 118.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О парном интегральном уравнении и его транспонированном I // Теорет. и прикл. математика. – 1958. – Вып. 1. – С. 58 – 81.
9. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. – Воронеж: Воронеж. ун-т, 1987. – 165 с.
10. *Чеботарев Г. Н.* Уравнения Винера – Хопфа. – Казань: Казан. ун-т, 1974. – 104 с.
11. *Полетаев Г. С.* Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 9. – С. 1201 – 1213.

Получено 11.09.2000