УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
В. И. Рукасов (Славян. пед. ин-т)

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА МЕТОДА ВАЛЛЕ ПУССЕНА

We present a rewiev of results concerning the approximation of classes of periodic functions by means of the Vallée Poussin sums obtained by a number of authors during in fact the entire previous century.

Наведено огляд результатів, що стосуються наближення класів періодичних функцій за допомогою сум Валле Пуссена, одержаних різними авторами фактично на протязі всього минулого століття.

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая суммируемая функция $(f \in L)$,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} A_k(f; x) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье, $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — ее коэффициенты Фурье.

Пусть, далее, $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — произвольная бесконечная треугольная матрица чисел, с помощью которой каждой функции $f \in L$ поставим в соответствие последовательность полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ вида

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} A_k(f; x). \tag{2}$$

Таким образом, любая треугольная матрица Λ задает метод построения полиномов $U_n(f; x; \Lambda)$ или, другими словами, конкретную последовательность полиномиальных операторов $U_n(f; \Lambda)$, определенных на множестве L. В этом случае также говорят, что матрица Λ определяет конкретный метод (Λ-метод) суммирования рядов Фурье. Понятно, что операторы $U_n(f; \Lambda)$ являются линейными и поэтому Λ-методы называют линейными методами суммирования рядов Фурье.

В настоящей работе рассматриваются линейные методы, порождаемые матрицами Λ, элементы которых определяются равенствами

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, \ldots, n-p; \\ 1 - \dfrac{k-n+p}{p}, & k = n-p+1, \ldots, n-1, \quad 1 \le p \le n. \end{cases} \tag{3}$$

Полиномы $U_n(f; x; \Lambda)$ в этом случае обозначаются через $V_{n,p}(f, x)$ и имеют вид

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f; x), \quad p = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $S_k(f; x)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$. Полиномы вида (4) впервые рассматривались Валле Пуссеном [1] и поэтому называются суммами Валле Пуссена.

Если $p = 1$, то $V_{n,p}(f; x) = S_{n-1}(f; x)$. При $p = n$ такие суммы были введены Фейером (см., например, [2]) и поэтому называются суммами Фейера

$$\sigma_n(f; x) = V_{n,n}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) A_k(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x). \tag{5}$$

Суммы Валле Пуссена и, в особенности, их частные случаи — суммы Фурье и Фейера — изучались в различных направлениях на протяжении многих десятилетий крупнейшими специалистами по теории функций, и к настоящему времени накоплен большой фактический материал, содержащийся в публикациях, часть из которых не всегда общедоступна. Одним из важнейших направлений при этом является исследование аппроксимативных свойств таких сумм на различных классах функций.

Цель настоящей работы — попытка систематизации известных результатов, связанных с аппроксимативными свойствами сумм Валле Пуссена, а также изложение новых фактов, полученных для этих сумм и их обобщений. При этом факты, относящиеся к приближениям суммами Фурье и Фейера, будем приводить лишь в случаях, когда они содержатся в более общих результатах для произвольных сумм $V_{n,p}(f;x)$. Что касается результатов, относящихся к приближениям суммами Фурье и Фейера, то значительная их часть изложена в монографиях [3, 4]. Здесь нас интересуют, главным образом, асимптотические равенства для величин

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; V_{n,p}\right) = \sup_{f\in\mathfrak{N}}\left\| f(\cdot) - V_{n,p}(f;\cdot)\right\|_C, \tag{6}$$

где $\mathfrak{N}$ — заданный компактный класс функций.

Мы говорим, что для данного метода $U_n(f;\Lambda)$ на классе $\mathfrak{N}$ решена задача Колмогорова – Никольского (задача К-Н), если в явном виде определена функция $\varphi(n)=\varphi(n;\Lambda;\mathfrak{N})$ такая, что при $n\to\infty$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n) = \sup_{f\in\mathfrak{N}}\| f(\cdot) - U_n(f;\cdot;\Lambda)\|_C = \varphi(n) + o(\varphi(n)). \tag{7}$$

1. Классы функций. Будем рассматривать следующие основные классы из множества C непрерывных 2π-периодических функций.

1. Пусть $\omega=\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, т. е. непрерывная неубывающая полуаддитивная при всех $t\ge 0$ функция и такая, что $\omega(0)=0$. Тогда через H_ω обозначают подмножество функций $f\in C$, для которых выполняется условие

$$\left| f(t') - f(t'')\right| \le \omega\left(\left|t'-t''\right|\right) \quad \forall\, t', t'' \in R^1. \tag{8}$$

Если $\omega(t)=Mt^\alpha$, $M=\text{const}$, $M>0$, $0\le\alpha\le 1$, то класс H_ω обозначают через MH^α; если $M=1$, то $1\cdot H^\alpha \overset{\text{df}}{=} H^\alpha$; если $\alpha=1$, то $H^\alpha \overset{\text{df}}{=} H^1$.

2. Множество функций $f\in C$, у которых существуют и являются абсолютно непрерывными производные до $(r-1)$-го, $r\in N$, порядка включительно и

$$\left\| f^{(r)}(\cdot)\right\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\left| f^{(r)}(\cdot)\right| \le M,$$

обозначают через MW^r, $1\cdot W^r \overset{\text{df}}{=} W^r$, т. е.

$$MW^r = \left\{ f\in C: \left\| f^{(r)}\right\|_\infty \le M\right\}. \tag{9}$$

3. Класс функций $f\in C$, у которых $f^{(r)}\in H_\omega$, обозначают W^rH_ω, т. е.

$$W^rH_\omega = \left\{ f\in C: f^{(r)}\in H_\omega\right\};$$

если $r=0$, то полагают $W^0H_\omega = H_\omega$. Из этих определений, в частности, следуют равенства $MH^1 = MW^1$ и $MW^r = MW^{r-1}H^1$.

4. Множества функций $\tilde f(\cdot)$, тригонометрически сопряженных с функци-

ями $f(\cdot)$ из классов $W^r H_\omega$, обозначают через $\widetilde{W^r H_\omega}$. В частности, $\tilde{H}_\omega$ — множество функций, сопряженных с функциями из класса H_ω.

5. Пусть $f \in C$ и (1) — ее ряд Фурье. Если при данных фиксированных $r > 0$ и $\beta \in R^1$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \tag{10}$$

является рядом Фурье некоторой функции из L, то эту функцию называют (r, β)-производной в смысле Вейля – Надя и обозначают через $f_\beta^{(r)}$. Тогда определяют классы Вейля – Надя, полагая

$$MW_\beta^r = \left\{ f \in C \colon \left\| f_\beta^{(r)} \right\|_\infty \le M \right\}, \tag{11}$$

$$W_\beta^r H_\omega = \left\{ f \in C \colon f_\beta^{(r)} \in H_\omega \right\}. \tag{12}$$

Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из L, то полагают

$$W_\beta^r \mathfrak{N} = \left\{ f \in C \colon f_\beta^{(r)} \in \mathfrak{N} \right\}. \tag{13}$$

В случае, когда $r \in N$ и $\beta = r + 2k, k \in Z$, классы Вейля – Надя MW_β^r и $W_\beta^r H_\omega$ совпадают с классами MW^r и $W^r H_\omega$; если $r \in N$, а $\beta = r + 1 + 2k$, то $MW_\beta^r = \widetilde{MW^r}$ и $W_\beta^r H_\omega = \widetilde{W^r H_\omega}$.

6. В работах [4 – 6] введены понятие (ψ, β)-дифференцирования и классы $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ следующим образом.

Пусть $f \in C$ и (1) — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и $\beta \in R^1$. Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) \tag{14}$$

является рядом Фурье некоторой функции из L. Эту функцию обозначим через $f_\beta^\psi(\cdot)$ и назовем (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$, а множество функций $f(\cdot)$, удовлетворяющих такому условию, обозначим через C_β^ψ. Пусть еще $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из L. Тогда если $f \in C_\beta^\psi$ и в то же время $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, будем говорить, что $f(\cdot)$ принадлежит классу $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$.

Итак,

$$C_{\beta,\infty}^\psi = \left\{ f \in C_\beta^\psi \colon f_\beta^\psi \in S_\infty \right\}, \tag{15}$$

где S_∞ — единичный шар в пространстве существенно ограниченных функций

$$S_\infty = \{ \varphi \colon \operatorname{ess\,sup} |\varphi(\cdot)| \le 1 \}$$

и

$$C_\beta^\psi H_\omega = \left\{ f \in C_\beta^\psi \colon f_\beta^\psi \in H_\omega \right\}. \tag{16}$$

Ясно, что понятие (ψ, β)-производной обобщает понятие производной в смысле Вейля – Надя и совпадает с последним при $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$. Поэтому если $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то

$$C_\beta^\psi \mathfrak{N} = W_\beta^r \mathfrak{N}. \tag{17}$$

7. В работах [7 – 12] введены также классы $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ функций, непрерывных на действительной оси, но не обязательно периодических, следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество выпуклых вниз при всех $v \geq 1$ и исчезающих на бесконечности функций $\psi(v)$. Каждую функцию $\psi \in \mathfrak{M}$ продолжим на промежуток $[0;\, 1)$ так, чтобы полученная функция (которую, по-прежнему, будем обозначать через $\psi(\cdot)$) была непрерывна при всех $v \geq 0$ и ее производная $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ имела ограниченную вариацию на промежутке $[0;\, \infty)$. Множество таких функций обозначим через U. Подмножество функций $\psi \in U$, для которых

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty, \tag{18}$$

обозначим через U'. Пусть, далее, $\psi \in U'$ и β — фиксированное число. Положим

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt. \tag{19}$$

Обозначим через $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ множество функций $f(x)$, представимых равенством

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x+t)\hat{\psi}(t)\, dt, \tag{20}$$

в котором A_0 — некоторая постоянная, интеграл понимается как предел по расширяющимся симметричным промежуткам, $\varphi \in S_\infty$ и $\psi \in U'$.

В работе [8] показано, что если $\psi \in U'$, то для любого $\beta \in R^1$ преобразование $\hat{\psi}(t)$ суммируемо на всей числовой оси:

$$\int_{-\infty}^\infty |\hat{\psi}(t)|\, dt < \infty,$$

и классы $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ состоят из функций $f(x)$, непрерывных для всех $x \in (-\infty; \infty)$.

Там же было отмечено, что если $\varphi(\cdot)$ — 2π-периодические функции, то классы $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ представляют собой классы $C_{\beta,\infty}^\psi$.

Функцию $\varphi(\cdot)$ в представлении (20) также назовем (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$ и положим $\varphi(\cdot) = f_\beta^\psi(\cdot)$.

8. В работе [13] предложено дальнейшее (и в некотором смысле окончательное) обобщение классификации периодических функций. Формальная сторона этого обобщения сводится к тому, что рассматриваются множества функций, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \varphi(x-t)\Psi(t)\, dt,$$

причем ядра $\Psi(t)$ могут быть произвольными:

$$\Psi(t) = \sum_{k=0}^\infty \left(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt\right),$$

где $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, вообще говоря, произвольные последовательности действительных чисел.

В частности, в этой работе введены классы $C_\infty^{\overline{\psi}}$ и $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ следующим образом.

Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция и (1) — ее ряд Фурье. Пусть, далее, пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ произвольных фиксированных систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$, удовлетворяет условию

$$\overline{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in N.$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f, x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f, x), \quad \tilde{A}_k(f, x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx,$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\varphi(\cdot)$, то $\varphi(\cdot)$ назовем $\overline{\psi}$-производной функции f и положим $\varphi(\cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Подмножество функций $f \in C$, у которых существуют $\overline{\psi}$-производные, обозначают через $C^{\overline{\psi}}$. Тогда

$$C_\infty^{\overline{\psi}} = \left\{ f \in C^{\overline{\psi}} \colon f^{\overline{\psi}}(\cdot) \in S_\infty \right\}$$

и

$$C^{\overline{\psi}}H_\omega = \left\{ f \in C^{\overline{\psi}} \colon f^{\overline{\psi}}(\cdot) \in H_\omega \right\}.$$

При $\psi_1(k) = \psi(k)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(k) = \psi(k)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}$, $\beta \in R^1$, классы $C_\infty^{\overline{\psi}}$ и $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ переходят соответственно в классы $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ и $C_\beta^{\psi}H_\omega$. Если же $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то классы $C_\infty^{\overline{\psi}}$ совпадают с классами W_β^r, введенными Б. Надем [14], а классы $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ — с классами $W_\beta^r H_\omega$, которые впервые рассматривал А. В. Ефимов [15, 16].

9. Рассмотрим также классы $C(\varepsilon)$, которые в отличие от классов $C_\beta^{\psi}\mathfrak{N}$ изучены в меньшей степени, но, как оказалось, имеют ряд примечательных свойств. Классы $C(\varepsilon)$ [17, с. 33] определяются следующим образом.

Пусть задана последовательность неотрицательных чисел $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, монотонно стремящаяся к нулю. Тогда

$$C(\varepsilon) = \{ f \in C \colon E_n(f) \leq \varepsilon_n \quad \forall\, n \geq 1 \}. \tag{21}$$

(Здесь и в дальнейшем $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.)

2. Суммы Валле Пуссена: обзор известных результатов. Суммы Фурье $S_n(f; x)$ функции $f(x)$ порядка n имеют свойство

$$S_n(T_m; x) = T_m(x), \tag{22}$$

где $T_m(x)$ — тригонометрический полином порядка $m \leq n$.

Суммы Фейера $\sigma_n(f; x)$ этого свойства не имеют, но для них выполняется неравенство (см., например, [2])

$$|\sigma_n(f; x)| \leq \max |f(x)|, \quad f \in C, \tag{23}$$

которому не удовлетворяют суммы Фурье.

Валле Пуссен [1] предложил рассматривать суммы

$$V_{2n-1,n}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f;x), \tag{24}$$

которые имеют оба указанных свойства.

Нетрудно показать (см., например, [18]), что $V_{2n-1,n}(T_m;x) = T_m(x) \quad \forall\, n \geq m$ и

$$\left|V_{2n-1,n}(f;x)\right| \leq 3\max|f(x)|, \quad f \in C. \tag{25}$$

Как оказалось в дальнейшем, суммы Валле Пуссена имеют во многих случаях достаточно хорошие аппроксимативные свойства.

Так, Валле Пуссен [1] показал, что для любой функции $f \in C$ имеет место неравенство

$$\left|f(x) - V_{2n-1,n}(f;x)\right| \leq 4E_n(f). \tag{26}$$

Таким образом, сумма $V_{2n-1,n}(f;x)$ приближает функцию $f(\cdot)$ не более чем в четыре раза хуже, чем полином ее наилучшего приближения порядка n. Однако заметим, что полином $V_{2n-1,n}(f;x)$ имеет, вообще говоря, порядок $2n-1$. Поэтому из неравенства (26) не следует, что суммы $V_{2n-1,n}(f;x)$ дают решение задачи о построении для любой функции $f \in C$ последовательности операторов $U_n^*(f;x)$, которая приближала бы функцию $f(x)$ с наилучшим порядком, т. е. так, чтобы

$$\left\|f(\cdot) - U_n^*(f;\cdot)\right\|_C = O(E_n(f)), \quad n \to \infty. \tag{27}$$

В этом отношении метод Валле Пуссена не является исключением среди всех линейных процессов приближения.

Как следует из результатов С. М. Лозинского [19], никакой линейный метод приближения полиномами не может для любой непрерывной функции осуществить равномерное приближение, совпадающее по порядку с наилучшим. Тем не менее, если ограничиться рассмотрением определенных в п. 1 классов функций, то суммы Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ во многих случаях дают для них приближение, по порядку совпадающее с наилучшим.

Однако первоначально исследовались аппроксимативные свойства сумм Валле Пуссена, близких к суммам Фурье $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=0\right)$. А. Ф. Тиман [20, 21] рассмотрел величины $\mathcal{E}(\mathfrak{N}, V_{n,p})$ в случае, когда $\mathfrak{N}$ — один из классов MW_r^r, $M\tilde{W}_r^r$, $W_r^r H^\alpha$, $\widetilde{W_r^r H^\alpha}$. Им доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=0$. *Если числа* r *и* α *удовлетворяют неравенствам* $r \geq 0$ *и* $0 < \alpha \leq 1$, *то при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}\left(W_r^r H^\alpha; V_{n,p}\right) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \ln\frac{n}{p}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) \tag{28}$$

и

$$\mathcal{E}\left(\widetilde{W_r^r H^\alpha}; V_{n,p}\right) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \ln\frac{n}{p}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \tag{29}$$

Из соотношения (28) при $\alpha = 1$ следует асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(W_r^r; V_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{n^r}\ln\frac{n}{p} + g(n,p,r), \tag{30}$$

где

$$g(n,p,r) = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \to \infty.$$

Возникает вопрос: существует ли постоянная A, не зависящая от r, такая, чтобы для остаточного члена выполнялась оценка

$$g(n,p,r) \le \frac{A}{n^r}?$$

Факт несуществования такой константы вытекает из следующей теоремы, доказанной А. Н. Кулик [22].

Теорема 2. *При всех целых r, n, p, удовлетворяющих неравенству $1 < p < < n$, имеет место оценка*

$$\mathcal{E}\left(W_r^r; V_{n,p}\right) \ge \frac{1}{p(p+1)(n-p+1)^r} - \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} - \frac{C}{n^r},$$

где C — абсолютная постоянная, не зависящая от n, p, r; $C < 7$.

Отметим, что при $p = 1$ (приближение суммами Фурье), $r \in N$ и $\alpha = 1$ равенство (28) было получено А. Н. Колмогоровым [23], для любых $r > 0$ — В. Т. Пинкевичем [24], для любых $r \ge 0$ и $0 < \alpha \le 1$ равенства (28) и (29) найдены С. М. Никольским [25].

Отметим, что теорема 1 дает решение задачи К-Н на классах $W_r^r H^\alpha$ и $\widetilde{W_r^r} H^\alpha$ для сумм Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n} = 0$.

Следующий важный шаг в изучении приближений, доставляемых суммами Валле Пуссена, был сделан А. В. Ефимовым [15, 16]. Для классов $W_\beta^r H_\omega$, $r \ge 0$, $\beta \in R^1$, им доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Для любого модуля непрерывности $\omega = \omega(t)$ и для всех $1 \le p \le \le n-1$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(H_\omega; V_{n,p}\right) = A_{n,p}(\omega) + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{31}$$

где

$$A_{n,p}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{C_1^{(n)}[\omega]}{\pi}\ln\dfrac{n}{p}, & 0 \le p \le \dfrac{n}{2}; \\ \dfrac{2}{\pi(p+1)}\displaystyle\int\limits_{1/(n+1)}^{1/(n-p)}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt, & \dfrac{n}{2} \le p \le n-1, \end{cases} \tag{32}$$

$$C_1^{(n)}[\omega] = \sup_{f\in H_\omega}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right|. \tag{33}$$

Теорема 4. *При любых $0 \le p \le \dfrac{n}{2}$ и $r > 0$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{C_1^{(n)}[\omega]}{\pi(n-p+1)^r}\ln\frac{n}{p} + O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to \infty, \tag{34}$$

где $C_1^{(n)}[\omega]$ определяется согласно равенству (33).

При $\beta = r$ и $\beta = r + 1$ из равенства (34) *получаются асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}\left(W_r^r H_\omega; V_{n,p}\right)$ и $\mathcal{E}\left(\widetilde{W_r^r} H_\omega, V_{n,p}\right)$ для любых $r > 0$ и $1 \le p \le \dfrac{n}{2}$.*

Нетрудно показать (см., например, [3, с. 28]), что для любого модуля непрерывности справедлива оценка

$$C_1^{(n)}[\omega] \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt. \tag{35}$$

Поэтому из соотношений (31) – (35) следует, что теорема 3 дает решение задачи К-Н на классе H_ω для сумм $V_{n,p}(f;x)$ в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=0$.

Если $p=n-1$, то при $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$, оба слагаемых в правой части равенства (31) имеют одинаковый порядок и, следовательно, в этом случае оно не дает решения соответствующей задачи К-Н. Но если $\alpha = 1$, то из него следует

$$\mathcal{E}\left(H^1,\sigma_n\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\ln n}{p} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty. \tag{36}$$

Равенство (36) было получено С. М. Никольским [25]. Кроме того, при $p = n-1$ равенство (31) будет давать решение задачи К-Н каждый раз, когда

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\int_{1/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right), \quad n\to\infty. \tag{37}$$

Если же $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}\le\frac{1}{2}$, то оба слагаемых в правой части равенства (31) имеют одинаковый порядок. Одинаковый порядок имеют эти слагаемые и в случае, когда $\frac{1}{2}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}<1$ и $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le 1$.

Таким образом, во всех перечисленных случаях теорема 3 не дает решения задачи К-Н.

Из соотношений (34) и (35) следует, что теорема 4 дает решение задачи К-Н для сумм Валле Пуссена на классах $W_\beta^r H_\omega$ в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=0$. В то же время если $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}\le\frac{1}{2}$, то оба слагаемых в правой части равенства (34) имеют одинаковый порядок при $n\to\infty$, и тогда теорема 4 не дает решения соответствующей задачи К-Н.

Таким образом, благодаря упоминавшимся исследованиям А. Н. Колмогорова, В. Т. Пинкевича, С. М. Никольского, А. Ф. Тимана, А. В. Ефимова к началу шестидесятых годов стало возможным решать задачу К-Н на классах W_β^r и $W_\beta^r H_\omega$ для сумм Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ в случаях, когда полиномы $V_{n,p}(f;x)$ на данных классах дают приближение, порядок которого хуже порядка наилучшего (суммы Фурье и суммы Валле Пуссена, близкие к ним, суммы Фейера на классах H^1, а также на классе H_ω при выполнении условия (37)).

В начале шестидесятых годов С. А. Теляковский [26, 27] получил решение задачи К-Н в ряде случаев, когда порядок убывания верхних граней $\mathcal{E}\left(W_\beta^r;V_{n,p}\right)$ равен $\frac{1}{n^r}$, т. е. совпадает с порядком убывания верхних граней наилучших приближений функций из W_β^r. Он рассмотрел поведение величин $\mathcal{E}\left(W_\beta^r,V_{n,p}\right)$ в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n}$ существует, равен Θ и $0\le\Theta\le 1$.

Прежде чем сформулировать соответствующие результаты С. А. Теляковского, введем обозначение, которое будем использовать и в дальнейшем.

Пусть функция $\tau(u)$ задана на $[0,\infty)$, непрерывна и ее преобразование Фурье

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du$$

является суммируемой на $(-\infty;\infty)$ функцией. Тогда положим

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}(t)\right| dt.$$

С. А. Теляковский [26], в частности, показал, что если функции $\tau(u) = \tau_{n,p}(u)$ непрерывны при $u>0$, $\tau\left(\frac{k}{n}\right) = \left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{-r}$ (числа $\lambda_k^{(n)}$ определяются согласно равенству (3)), то

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r; V_{n,p}\right) = A(\tau_{n,p})\frac{1}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}a_n(\tau_{n,p})\right), \tag{38}$$

где

$$a_n(\tau_{n,p}) = \int_{|t|\ge n\pi/2}\left|\int_0^\infty \tau_{n,p}(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt.$$

А. Н. Кулик [22] получила оценку величины $A(\tau_{n,p})$ и изучила ее зависимость от r:

$$A(\tau_{n,p}) \le \frac{r\bar{\Theta}}{\ln 2\left(1-\bar{\Theta}\right)^r} + 4 + \frac{2(\pi+1)}{\pi^2} + \frac{10}{\pi^2\left(1-\bar{\Theta}\right)^r\bar{\Theta}} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{\bar{\Theta}}-1\right),$$

где $r>1$, $\bar{\Theta} = \dfrac{p+1}{n+1}$.

Используя соотношение (38), С. А. Теляковский доказал теорему, которая дает полное описание аппроксимативных свойств сумм Валле Пуссена на классах W_β^r [26].

Теорема 5. *Для величин* $\mathcal{E}\left(W_\beta^r; V_{n,p}\right)$ *при* $n\to\infty$ *справедливы следующие асимптотические формулы:*

1. *Если* $\Theta = 0$, *то*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r; V_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{n^r}\ln\frac{n}{p} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{39}$$

2. *Если* $0<\Theta<1$, *то*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r; V_{n,p}\right) = A\left(\mu_{1-\Theta}\right)\frac{1}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}} + \frac{\varepsilon_n}{n^r}\right), \tag{40}$$

где

$$\mu_{1-\Theta}(u) = \begin{cases} 0, & 0\le u\le 1-\Theta; \\ \dfrac{u-(1-\Theta)}{\Theta}u^{-r}, & 1-\Theta\le u\le 1; \\ u^{-r}, & 1\le u<\infty, \end{cases}$$

$$\varepsilon_n = \left|\frac{p}{n}-\Theta\right|\ln\frac{1}{|p/n-\Theta|}, \qquad \frac{p}{n}\ne\Theta,$$

$$\varepsilon_n = 0, \qquad \frac{p}{n} = \Theta.$$

3. *Если* $\Theta = 1$ *и* $0 < r < 1$, *то*

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta; V_{n,p}\right) = A(\mu_{1,r})\frac{1}{n^r} + O\left(\frac{(n-p+1)^{1-r}}{n}\right), \tag{41}$$

где

$$\mu_{1,r}(u) = \begin{cases} u^{1-r}, & 0 \le u \le 1; \\ u^{-r}, & 1 \le u < \infty. \end{cases}$$

4. *Если* $\Theta = 1$ *и* $r = 1$, *то*

$$\mathcal{E}\left(W^1_\beta; V_{n,p}\right) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{n}\ln\frac{n}{n-p+1} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{42}$$

Если же $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} = 0$, *то при* $p = n$

$$\mathcal{E}\left(\tilde{W}^1_\beta; V_{n,p}\right) = A(\mu_{1,1})\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{43}$$

при $n - p \to \infty$

$$\mathcal{E}\left(\tilde{W}^1_\beta; V_{n,p}\right) = 2A(\mu_{1,1})\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n(n-p)} + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n-p}{n}\ln\frac{n}{n-p}}\right), \tag{44}$$

при $n - p = m$ (m *— фиксированное число*)

$$\mathcal{E}\left(\tilde{W}^1_\beta; V_{n,p}\right) = \left[A(\mu_{1,1}) + m\mathcal{E}\left(\tilde{W}^1; V_{m,m}\right)\right]\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right), \tag{45}$$

где

$$\mu_{1,1}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \le u \le 1; \\ u^{-r}, & 1 \le u \le \infty. \end{cases}$$

5. *Если* $\Theta = 1$ *и* $r > 1$, *то в случае* $n - p = m \to \infty$

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta; V_{n,p}\right) = A(\mu_{1,r})\left(\frac{1}{nm^{r-1}} + \frac{1}{n^2m^{r-2}} + \ldots + \frac{1}{n^{r-1}m}\right) + O\left(\frac{1}{n^r} + \frac{1}{nm^r}\right), \tag{46}$$

где

$$\mu_{1,r}(u) = \begin{cases} 0, & 0 \le u \le 1; \\ (u-1)u^{-r}, & 1 \le u < \infty; \end{cases}$$

в случае, когда $n - p = m$ *фиксировано*, $m \ge 1$

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta; V_{n,p}\right) = \sup_{f \in W^r_\beta}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}_\beta(t)\int_0^\infty \frac{u-m}{u^r}\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\,dt\right| \times$$

$$\times\left(\frac{1}{n} + \frac{m}{n^2} + \ldots + \frac{m^{r-2}}{n^{r-1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\right); \tag{47}$$

в случае $p = n$

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta; V_{n,p}\right) = \sup_{f \in W^r_\beta}\left|\tilde{f}'(x)\right|\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{48}$$

Формула (39), соответствующая приближению суммами Фурье и суммами Валле Пуссена, близкими к ним, при $p = 1$ и $r \in N$, $\beta = r$ совпадает с упоминавшимся результатом А. Н. Колмогорова [23], а при $p = 1$ и любых $r > 0$, $\beta = r$ — В. Т. Пинкевича [24]. При $p = 1$ и $r > 0$ эта формула также следует из результата С. М. Никольского для классов $W_r^r H_\omega$ [25], а при $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0$ и $r > 0$ — из приведенных выше результатов А. Ф. Тимана для классов $W_r^r H^\alpha$ (см. теорему 1). Для классов W_β^r при любых $r > 0$ и $\beta \in R^1$ эта формула вытекает из приведенных выше результатов А. Ф. Ефимова для классов $W_\beta^r H_\omega$ (теорема 4).

При приближении суммами Фейера $(p = n)$ формула (42) для классов W^1 совпадает с приведенным выше результатом С. М. Никольского (соотношение (36)), а формула (43) принадлежит С. Б. Стечкину [28]. В случае, когда $\Theta = 1$, эта формула для класса W^1 получена С. А. Теляковским [27]. Она также вытекает из приведенных выше результатов А. Ф. Ефимова для классов H_ω (теорема 2) при $\omega(t) = t$ и $\Theta = 1$.

Для классов W_r^r и $\tilde{W}_r^r$ при целых r теорема 4 также доказана С. А. Теляковским [27]; при этом интегралы, входящие в константы $A(\mu)$, приведены в [27] в другой форме. Там же получено асимптотическое равенство для величин $\mathcal{E}\left(W^1; V_{n,p}\right)$ в случае, когда $\Theta = 1$ и $n - p = m$ фиксировано (формула (45)).

Формулу (48) для классов W_r^r, $\tilde{W}_r^r$ и W_β^r при целых β получили С. М. Никольский [25, 29] и Б. Надь [14, 30]. При этом Б. Надем [14] для классов W^r при четном r и $\tilde{W}^r$ при нечетном r доказана формула более точная, чем (48):

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r; V_{n,n}\right) = \sup_{f \in W_\beta^r} \left|\tilde{f}^r(x)\right| \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right).$$

Отметим, что равенства (39) – (48) дают решение задачи К-Н для сумм Валле Пуссена на классах W_β^r. При этом в случаях, когда $0 < \Theta < 1$, $r > 0$ (равенство (40)) и $\theta = 1$, $0 < r < 1$ (равенство (41)), $\theta = 1$, $\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$ (равенства (43) – (45)), видим, что суммы Валле Пуссена обеспечивают наилучший порядок приближения функций из W_β^r.

Получение же решения задачи К-Н на классах $W_\beta^r H_\omega$ $(r \ge 0)$ для сумм $V_{n,p}(f; x)$ в случаях, когда они обеспечивают приближение, по порядку совпадающее с наилучшим, стало возможным лишь в конце семидесятых годов, благодаря методу, который оформился в работах [31 – 33]. Важной составной частью этого метода является лемма Корнейчука – Стечкина [31], которая позволяет находить оценки сверху величин

$$\mathcal{E}(H_\omega[a,b]; \varphi) = \sup_{f \in H_\omega[a,b]} \left|\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt\right|, \tag{49}$$

где $H_\omega[a;b]$ — класс функций $f(x)$, удовлетворяющих на $[a;b]$ условию (8), $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности, $\varphi(t)$ — суммируемая функция со средним значением на $[a;b]$, равным нулю, и такая, которая, например, сохраняет знак почти всюду на $(a;c)$ и $(c;b)$, $a < c < b$.

Оценка для величин (49) в случае, когда $\omega(t)$ — выпуклая функция, оказывается точной, причем указывается в явном виде экстремальная функция, реализующая верхнюю грань.

Лемма Корнейчука – Стечкина открыла принципиальную возможность решения задачи К-Н на классах $W^r_\beta H_\omega$ для широкого спектра линейных методов. Однако реализация такой возможности требовала значительной информации о расположении нулей определенных первообразных ядер рассматриваемых методов, а именно: было необходимо, как правило, установить факт выпуклости последовательности этих нулей (если таковой существует). В начале семидесятых годов в работах [32, 33] была выработана процедура получения асимптотически точных формул для нулей таких функций. С помощью этих формул проверка выпуклости последовательности этих нулей значительно упрощается.

Л. А. Островецкий [34] получил решение задачи К-Н на классах H_ω для сумм $V_{n,p}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n}=\frac{2}{3}$. Им доказано следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n}=\frac{2}{3}$. *Тогда при* $n\to\infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}\left(H_\omega; V_{n,p}\right) = A(\omega, n) + \gamma_{n,p},$$

в котором

$$A(\omega, n) = \frac{3}{\pi n}\int\limits_0^\pi F(t)\,\omega'\left(\frac{3t}{n}\right)dt,$$

где $F(t)$ *— экстремальная функция,* $\gamma_{n,p}<0$ *и*

$$\gamma_{n,p} = \begin{cases} O\left(\left|\frac{p}{n}-\frac{2}{3}\right|\ln\frac{1}{|p/n-2/3|}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), & \frac{p}{n}\neq\frac{2}{3}; \\ O\left(\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), & \frac{p}{n}=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$0{,}56\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) < A(\omega; n) < 1{,}42\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Заметим, что функция $F(t)$ определяется с помощью леммы из работы А. Ф. Тимана [21]. Некоторое представление об этой функции дают такие ее свойства:

а) $F(t)$ задана на $[0;\pi]$, $F(0)=2+\frac{\pi}{2}$; $F(\pi)=0$;

б) $F(t)$ является монотонно убывающей;

в) $F(t)$ является непрерывной.

В. А. Дудас [35], используя результаты работ [31 – 33], получил решение задачи К-Н на классах W^1H_ω для сумм $V_{3n,n}$.

Теорема 7. *Если модуль непрерывности является выпуклым и, кроме того, для него выполняется условие*

$$\sum_{\nu=0}^{2s-1}(-1)^{\nu+1}\omega\left(\frac{t_{\nu+1}-t_\nu}{n}\right) \le \frac{1}{2}\left(\omega\left(\frac{2t_{2s}}{n}\right)-\omega\left(\frac{2t_0}{n}\right)\right), \quad s=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{4}\right]+1,$$

то при $n\to\infty$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{E}\left(W^1H_\omega; V_{3n,n}\right) = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{z_0}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)I_0(t)\,dt + \frac{1}{\pi n^2}\int\limits_0^\infty F_0(I_1;t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt + \gamma_n,$$

где $\gamma_n\le 0$, $\gamma_n = O\left(\frac{1}{n^2}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, t_k, z_k, $k=0,1,2,\ldots$, *— соответственно нули функций*

$$I_0(t) = \int\limits_t^\infty \frac{\cos\bar{t} - \cos 3\bar{t}}{\bar{t}^{\,2}}\, d\bar{t}, \qquad I_1(z) = \int\limits_z^\infty \int\limits_t^\infty \frac{\cos\bar{t} - \cos 3\bar{t}}{\bar{t}^{\,2}}\, d\bar{t}\, dt,$$

перенумерованные в порядке их возрастания:

$$F_0(\varphi; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varphi}_i(x),$$

где $\bar{\varphi}_i(x)$ *— убывающая перестановка функции*

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\varphi(x)|, & x \in [x_i; x_{i+1}]; \\ 0, & x \notin [x_i; x_{i+1}], \end{cases}$$

т. е. функция, обратная к функции $M(y) = \operatorname{mes} E(|\varphi(x)| > y)$, *а* $\varphi(x)$ *— функция, непрерывная при* $x > 0$ *и имеющая не более чем счетное множество нулей* $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *так что* $x_0 < x_1 < x_2 \ldots$.

В частности, при $0 < \alpha < 1$

$$\mathcal{E}\left(W^1 H^\alpha; V_{3n,n}\right) = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi n^{1+\alpha}} \int\limits_0^{x_1} t^\alpha I_0(t)\, dt + \frac{\alpha}{\pi n^{1+\alpha}} \int\limits_0^\infty F_0(I_1; t) t^{\alpha-1}\, dt + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right),$$

а при $\alpha = 1$

$$\mathcal{E}\left(W^1 H^1; V_{3n,n}\right) = \frac{1}{\pi n^2} \int\limits_0^\infty |I_1(t)|\, dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

3. Суммы Валле Пуссена на классах $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ **и** $C^{\bar{\psi}} \mathfrak{N}$. В этом пункте излагаются результаты, связанные с получением асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^\psi \mathfrak{N}; V_{n,p}\right) = \sup_{f \in C_\beta^\psi \mathfrak{N}} \left\| f(\cdot) - V_{n,p}(f; \cdot) \right\|_C$$

и

$$\mathcal{E}\left(C^{\bar{\psi}} \mathfrak{N}; V_{n,p}\right) = \sup_{f \in C^{\bar{\psi}} \mathfrak{N}} \left\| f(\cdot) - V_{n,p}(f; \cdot) \right\|_C.$$

Для получения конкретных результатов на функции натурального аргумента $\psi(k)$, определяющие приближаемый класс, следует налагать определенные ограничения.

Удобно считать, что значения $\psi(k)$ являются значениями некоторой выпуклой вниз при всех $v \geq 1$ функции $\psi(v)$ непрерывного аргумента. Разумеется, такое условие не уменьшает общности — ведь в качестве $\psi(v)$ всегда можно выбрать функцию, линейную на интервалах $[k, k+1]$, $k \in N$.

Множество $\mathfrak{M}$ всех выпуклых вниз при $v \geq 1$ функций $\psi(v)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{v \to \infty} \psi(v) = 0$, далеко не однородно по скорости их убывания к нулю. В связи с этим при изучении аппроксимативных свойств классов $C_{\beta,\infty}^\psi$, определяющихся функциями $\psi \in \mathfrak{M}$, выделим из $\mathfrak{M}$ подмножества $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$ согласно следующей характеристике (см., например, [4]).

Пусть $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ — функция, связанная с $\psi(\cdot)$ равенством

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1.$$

Отсюда в силу строгой монотонности функции $\psi(t)$, $\eta(t)$ при всех $t \ge 1$ определяются однозначно

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(t)\right]. \tag{50}$$

Тогда функцию

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}$$

назовем модулем полураспада функции $\psi(t)$.

К множеству $\mathfrak{M}_C$ отнесем все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых найдутся такие положительные числа K_1 и K_2 (вообще говоря, зависящие от $\psi(\cdot)$), что $0 < K_1 \le \mu(t) \le K_2 < \infty$; к множеству $\mathfrak{M}_\infty$ — все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\mu(t)$ при $t \to \infty$ монотонно возрастает и не ограничена сверху; к множеству $\mathfrak{M}_0$ — функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых величина $\mu(t)$ ограничена сверху и не ограничена снизу никаким положительным числом.

Кроме того, через $\mathfrak{M}'$ обозначим подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих еще условию

$$\int_1^\infty \frac{\psi(v)}{v}\, dv < \infty.$$

В работах [36, 37] рассмотрено поведение верхних граней $\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right)$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n}$ существует и равен Θ, $0 \le \Theta < 1$. Доказаны следующие утверждения.

Теорема 8. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_C$ *и* $\Theta = 0$. *Тогда при* $n \to \infty$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln\frac{n}{p} + O(\psi(n)). \tag{51}$$

Теорема 9. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_C$ *и* $0 < \Theta < 1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *виполняется асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = A\left(\tau^{(n)}_{1-\Theta}\right)\psi(n) + O\left(\alpha_n\psi(n) + \frac{1}{n}\psi(n)\right), \tag{52}$$

где

$$\tau^{(n)}_{1-\Theta}(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le 1-\Theta; \\ \dfrac{v-(1-\Theta)}{\Theta}\dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & 1-\Theta \le v \le 1; \\ \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & 1 \le v < \infty, \end{cases}$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \left|\dfrac{p}{n} - \Theta\right| \ln\dfrac{1}{|p/n - \Theta|}, & \dfrac{p}{n} \ne \Theta; \\ 0, & \dfrac{p}{n} = \Theta, \end{cases}$$

причем

$$A\left(\tau^{(n)}_{1-\Theta}\right) = O(1), \quad n \to \infty.$$

Видим, что равенства (51) и (52) всегда дают решение задачи К-Н для сумм $V_{n,p}(f; x)$, $0 \le \Theta < 1$, на классах $C^\psi_{\beta,\infty}$, $\psi \in \mathfrak{M}_C$. Из равенства (52) следует, что в случае, когда $0<\Theta<1$, суммы $V_{n,p}(f;x)$ обеспечивают наилучший порядок приближения классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi\in\mathfrak{M}_C$.

При $p=1$ равенство (51) совпадает с одним из результатов работы [5]. При $\psi(n)=n^{-r}$, $r>0$, это равенство совпадает с равенством (39), а равенство (52) — с равенством (40). Примерами функций, для которых справедливы теоремы 8 и 9, являются функции $\psi(v)=v^{-r}\ln^{\alpha}(v+c)$, $r>0$, $c>1$, $\alpha\in R^1$ и другие.

В работе [38] изучено поведение величин $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)$ в случае, когда $\Theta=1$. Один из результатов более общей теоремы 1 этой работы может быть сформулирован в следующем виде.

Теорема 10. *Пусть* $\Theta=1$, $\psi\in\mathfrak{M}'$ *и функции* $g_n(v)=\dfrac{(v-n+p)\psi(v)}{p}$ *при* $v\geq n-p$ *монотонно возрастают и выпуклы вверх. Тогда при* $n\to\infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{p}\int\limits_{n-p+1}^{n}\frac{(v-n+p)\psi(v)}{v}\,dv\,+$$
$$+\,O\left(\psi(n)+\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}\,dv\right).\tag{53}$$

Отметим, что при $\psi(v)=\dfrac{1}{v}$ равенство (53) совпадает с равенством (42). Примерами функций, для которых справедлива теорема 10, являются функции $\psi(v)=\dfrac{\ln^{\alpha}(v+c)}{v^r}$, $0<r\leq 1$, $\alpha>0$, $c>1$.

В работе Д. Н. Бушева [39] рассмотрен случай $p=n$. Полученный им результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 11. *Пусть* $p=n$, $\psi\in\mathfrak{M}'$ *и функция* $g(v)=v\psi(v)$ *выпукла вниз при всех* $v\geq 1$. *Тогда*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\frac{1}{n}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|\tilde f'\right\|_C+O\left(\frac{1}{n}\int\limits_{n}^{\infty}\psi(v)\,dv+\psi(n)\right).\tag{54}$$

Заметим, что при $\psi(v)=v^{-r}$, $r>1$, равенство (54) совпадает с равенством (48).

В работе [40] рассмотрен случай, когда $\psi(k)=\exp(-\alpha k)$, $k=1,2,\ldots,\alpha>0$, т. е. когда классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ представляют собой множества аналитических функций.

Теорема 12. *Пусть* $\psi(k)=\exp(-\alpha k)$, $k=1,2,\ldots,\alpha>0$, $\beta\in R$. *Тогда при* $n\to\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\frac{4\psi(n-p)}{\pi p(1-\psi(2))}+O\left(\frac{\psi(n)}{p}+\frac{\psi(n-p)}{p(n-p)}\right).\tag{55}$$

Заметим, что в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty}p(n)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n-p)=\infty$, равенство (55) обеспечивает решение задачи К-Н на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ для сумм Валле Пуссена.

В работе [41] введены суммы Валле Пуссена $G_n(f;x;\eta)$ вида

$$G_{n,\eta}(f;x)=G_n(f;x;\eta)=\frac{1}{[\eta(n)]-n+1}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]}S_k(f;x),\tag{56}$$

где $\eta(n)$ определяется согласно равенству (50). В этой работе показано, что суммы вида (56) на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ доставляют приближение, которое характеризуется оценкой

$$\| f(\cdot) - G_n(f;\cdot;\eta) \|_C \leq K\psi(n), \tag{57}$$

где постоянные K не зависят от n.

В работе А. Н. Кулик [42] в случаях $\psi \in \mathfrak{M}_C$ и $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ дана оценка множителя K в неравенстве (57). Рассмотрены частные случаи: $\psi(v) = v^{-r}$, $r \geq 1$, и $\psi(v) = e^{-v^r}$, $r \in (0,1)$.

Теорема 13. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_C$. *Тогда имеет место оценка*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; G_{n,\eta}\right) \leq \left[\frac{C_2}{1+C_1} + 1 + K_1 + \frac{6(1+C_2)}{\pi^2 C_1} + \frac{2K_2(1+C_1)}{\pi^2 C_1^2} + \frac{K_2}{\pi C_1}\right]\psi(n) +$$
$$+ \left[\frac{2K_2}{\pi^2 C_1} + \frac{C_1^2 C_2}{(1+C_1)^2}\right]\frac{\psi(n)}{n},$$

где постоянные C_i, $i = 1, 2$, *определены неравенством* $C_1 \leq \mu(t) \leq C_2$, *а постоянные* K_1, K_2 *определяются из следующих неравенств:*

$$\int\limits_{\eta(a)}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v-a} \leq K_1\psi(a), \quad a \geq 1, \tag{58}$$

$$t\left|\psi'(t)\right| \leq K_2\psi(t), \quad t \geq 1.$$

Теорема 14. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ *и выполняется условие*

$$\eta'(t) \geq 1 \quad \forall\, t \in [1,\infty).$$

Тогда имеет место оценка

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; G_{n,\eta}\right) \leq \left[2 + K_1 + \frac{6C}{\pi^2} + \frac{C}{\pi} + 2C^2\right]\psi(n) + \frac{\psi(n)}{\eta(n)-n}\left[1 + \frac{C}{\pi} + 2C^2\right]$$

с положительными постоянными K_1 *и* C, *определяемыми неравенствами* (58) *и*

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'_\eta(\eta(t))} \leq C, \quad t \geq 1.$$

Теорема 15. *Если* $\psi(v) = v^{-r}$, $r \geq 1$, *то для величин* $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; G_{n,\eta}\right)$ *имеет место оценка*

$$\mathcal{E}\left(W^r_\beta; G_{n,\eta}\right) \leq \frac{1}{n^r}\left(2 + \frac{16}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right) + \frac{1}{n^{r+1}}\left(\frac{2}{\pi^2} + \frac{r}{\ln 2}\right).$$

Если же $\psi(v) = e^{-v^r}$, $r \in (0,1)$, *то*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; G_{n,\eta}\right) \leq e^{-n^r}\left[2 + \frac{1}{2r\ln 2} + \left(\frac{6}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)(\ln 2 + 1)^{(1-r)/r} + 2(\ln 2 + 1)^{2(1-r)/r}\right] +$$
$$+ \frac{e^{-n^r}}{\left(n^r + \ln 2\right)^{1/r} - n}\left[1 + \frac{1}{\pi}(\ln 2 + 1)^{(1-r)/r} + 2(\ln 2 + 1)^{2(1-r)/r}\right].$$

При построении сумм $G_n(f;x;\eta)$ была предложена и реализована идея построения операторов Валле Пуссена в зависимости от параметров, определяющих аппроксимируемый класс функций.

Эта идея получила дальнейшее развитие в работах [38, 43, 44], в которых введены так называемые обобщенные суммы Валле Пуссена $V_{n,p}^{\varphi,h}(f;x)$. Суммы $V_{n,p}^{\varphi,h}(f;x)$, будучи полиномами вида (2), определяются последовательностью суммирующих функций:

$$\lambda_n(v) = \lambda_{n,p}^{\varphi,h}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le 1 - \dfrac{p}{n}; \\ 1 - \dfrac{\varphi_n(nv)}{\varphi_n(n)} h_n(v), & 1 - \dfrac{p}{n} \le v \le 1, \end{cases}$$

где $p \in N$, $p < n$, $\varphi_n(v)$ — последовательность непрерывных при $v \in [n-p, n]$ функций, $h_n(v)$ — последовательность дважды дифференцируемых ограниченных при $v \in \left[\dfrac{n-p}{n}; 1\right]$ функций таких, что $h_n(1) = 1$, $h_n\left(\dfrac{n-p}{n}\right) \ne 0$.

При $\varphi_n(v) = \dfrac{v-n+p}{p}$, $v \in [n-p; n]$, $h_n(v) \equiv 1$, $v \in \left[\dfrac{n-p}{n}; 1\right]$, эти операторы совпадают с суммами $V_{n,p}(f;x)$.

В работах [38, 43] исследовалось асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величин $\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}; V_{n,p}^{\varphi,h}\right)$ в предположении, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p}{n}$ существует и равен Θ, $0 \le \Theta \le 1$. В этих работах доказаны следующие утверждения.

Теорема 16. *Пусть $\Theta = 0$, $\psi \in \mathfrak{M}'$ и функции $g_n(v) = \psi(v)\varphi_n(v)$ не убывают, выпуклы вверх или вниз и выполняется соотношение*

$$v g_n'(v) \overset{\text{df}}{=} v g_n'(v+0) \le K g_n(v).$$

Тогда при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}; V_{n,p}^{\varphi,h}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln\frac{n}{p} + O\left(\psi(n)\ln^+\mu(n) + \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int_n^\infty \frac{\psi(v)}{v}\,dv\right), \quad (59)$$

где $\mu(t)$ — модуль непрерывности функции $\psi(t)$, а $\ln^+ t = \max\{\ln t; 0\}$.

Прежде чем сформулировать следующее утверждение из работы [43], положим (см., например, [4]) $\mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, а через $\mathfrak{M}'_\infty$ обозначим множество функций $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu(\psi;t)}{t} = 0$. Отметим здесь, что если $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то класс $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ содержит бесконечно дифференцируемые функции, которые, однако, не являются аналитическими.

Теорема 17. *Пусть $0 < \Theta \le 1$, функции $g_n(v) = \psi(v)\varphi_n(v)$ удовлетворяют условиям теоремы 16.*

Тогда если $\psi \in \mathfrak{M}'$, то при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^{\psi}; V_{n,p}^{\varphi,h}\right) = \frac{2\left|h_n\left(\dfrac{n-p+1}{n}\right)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi\varphi_n(n)} \int_{n-p+1}^{n} \frac{g_n(v)}{v}\,dv +$$

$$+ O\left(\psi(n)\ln^+\mu(n) + \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int_n^\infty \frac{\psi(v)}{v}\,dv\right). \quad (60)$$

Если же $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, то

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{\varphi,h}_{n,p}\right) = \frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{1\le|t|\le\mu(n)} \left| \frac{\sin\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)}{t} \right| dt + O\left(\psi(n) \ln^{+} \frac{\mu(n)}{n}\right), \qquad (61)$$

где $\ln^{+} t = \max\{\ln t; 0\}$.

Теорема 18. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, *функции* $g_n(v) = \psi(v)\varphi_n(n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 16 *и выполняется условие*

$$K_1 \frac{n}{\mu(n)} \le p \le K_2 \frac{n}{\mu(n)}, \qquad (62)$$

где K_1 *и* K_2 *— некоторые абсолютные константы.*

Тогда при $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{\varphi,h}_{n,p}\right) = A(\tau_n) + O(\alpha_n), \qquad (63)$$

где

$$\tau_n(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le 1 - \frac{p}{n}; \\ (1 - \lambda_n(v))\psi(nv), & 1 - \frac{p}{n} \le v \le 1; \\ \psi(nv), & 1 \le v < \infty, \end{cases}$$

$$A(\tau_n) \le K\psi(n), \qquad (64)$$

$$\alpha_n = \begin{cases} |\psi'(n)| + \frac{1}{\varphi_n(n)}, & \psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}'_{\infty}; \\ \psi(n), & \psi \in \mathfrak{M}_{\infty} \setminus \mathfrak{M}'_{\infty}, \end{cases} \qquad (65)$$

K — абсолютная постоянная.

Отметим, что если $\varphi_n(v) = \frac{v - n + p}{p}$ и $h_n(v) \equiv 1$, то при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ соотношения (59), (60) и (63) совпадают с равенствами (51), (53) и (52), полученными для сумм $V_{n,p}(f; x)$.

Из соотношений (63) – (65) следует, что при $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$ и выполнении условия (62) суммы $V^{\varphi,h}_{n,p}(f; x)$ обеспечивают порядок наилучшего приближения на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

В работе [44] получены точные по порядку оценки сверху для величин $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; V^{\varphi,h}_{n,p}\right)$.

Теорема 19. *Пусть* $0 \le \Theta < 1$, $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu(n)p}{n} = \alpha$, $0 < \alpha < \infty$, *функции* $g_n(v) = \psi(v)\varphi_n(v)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 16, *функции* $h_n(x)$ *при* $\psi \in \mathfrak{M}_C$ *представимы в виде степенных рядов*

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,n} x^k, \qquad (66)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| c_{k,n} x^k \right| < \infty \quad \forall\, n \in N,$$

и $h_n(x) \equiv 1$ *при* $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$.

Тогда существует постоянная $K > 0$ *такая, что при всех* $n \in N$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; V^{\varphi,h}_{n,p}\right) \le K\psi(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{67}$$

Здесь, как и в дальнейшем, по-прежнему, полагаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p}{n}$ существует и равен Θ, $0 \le \Theta < 1$.

Скорость сходимости сумм Валле Пуссена на классах $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ и $C^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ изучалась в работах [45 – 48]. Основные результаты перечисленных работ содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 20. *Если* $\psi_i \in \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$, *и* $0 < \Theta < 1$, *то при* $n \to \infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(C^{\overline{\psi}}_{\infty}; V_{n,p}\right) = A_n\left(\tau_{1,\Theta}; \tau_{2,\Theta}\right) + O\left(\alpha_n\overline{\psi}(n) + \frac{1}{n}\overline{\psi}(n)\right), \tag{68}$$

где

$$\tau^{(n)}_{i,\Theta}(x) = \tau_{i,\Theta}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1-\Theta; \\ \dfrac{x-(1-\Theta)}{\Theta}\psi_i(nx), & 1-\Theta \le x \le 1; \\ \psi_i(nx), & 1 \le x < \infty, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \left|\dfrac{p}{n} - \Theta\right| \ln\dfrac{1}{|p/n - \Theta|}, & \dfrac{p}{n} \ne \Theta; \\ 0, & \dfrac{p}{n} = \Theta, \end{cases}$$

причем

$$A_n\left(\tau_{1,\Theta}; \tau_{2,\Theta}\right) = O(\overline{\psi}(n)), \quad n \to \infty. \tag{69}$$

Равенство (68) всегда дает решение задачи К-Н для сумм $V_{n,p}(f;\cdot)$ на классах $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$. При $\psi_1(n) = \psi(n)\cos\dfrac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(n) = \psi(n)\sin\dfrac{\beta\pi}{2}$, $\beta \in R^1$, равенство (68) совпадает с равенством (52).

Теорема 21. *Пусть* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$ *и* $0 \le \Theta < 1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}\left(C^{\overline{\psi}}_{\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{|\psi_2(v)|}{v}dv + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln\frac{n}{p} + O(1)\overline{\psi}(n) \tag{70}$$

и

$$\mathcal{E}\left(C^{\overline{\psi}}H_{\omega}; V_{n,p}\right) = \theta_{\omega}\left[\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{0}^{1}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\int\limits_{1}^{\infty}\psi_2(nv)\sin vt\,dv\,dt\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln\frac{n}{p}\int\limits_{0}^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt\right] + O(1)\overline{\psi}(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{71}$$

где $\overline{\psi}(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, $\theta_{\omega} \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right]$, *причем* $\theta_{\omega} = 1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности, а* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

В случае, когда $\Theta = 0$, равенства (70), (71) обеспечивают решение задачи К-Н соответственно на классах $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ и $C^{\overline{\psi}}H_{\omega}$ для сумм Валле Пуссена. При этом в соотношениях (70) и (71) главным членом правой части может выступать как первое, так и второе слагаемое.

Если

$$\psi_1(n) = \psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}, \qquad \psi_2(n) = \psi(n)\sin\frac{\beta\pi}{2}, \quad \beta \in R^1,$$

то классы $C_\infty^{\overline{\psi}}$ переходят в классы $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ и равенство (70) в случае, когда $\psi_i \in \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$, совпадает с равенством (51). Равенство (71) совпадает с равенством (34) при условии, что

$$\psi_1(n) = \frac{1}{n^r}\cos\frac{\beta\pi}{2}, \qquad \psi_2(n) = \frac{1}{n^r}\sin\frac{\beta\pi}{2}, \quad r \le 0, \quad \beta \in R^1.$$

Теорема 22. *Пусть* $\psi_i \in \mathfrak{M}'_\infty$, *числа* $p = p(n)$ *выбраны таким образом, что* $n - p \in \left[\eta^{-1}(\psi_i; n); n\right]$, $i = 1, 2$, *и выполнено условие: найдутся постоянные* K_1 *и* K_2 *такие, что*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1; n) - n}{\eta(\psi_2; n) - n} \le K_2 < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{72}$$

Тогда при $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}; V_{n,p}\right) = \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln^+\frac{\eta(n) - n}{p} + O(1)\overline{\psi}(n) \tag{73}$$

и

$$\mathcal{E}\left(C^{\overline{\psi}}H_\omega; V_{n,p}\right) = \frac{2\theta_\omega}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln^+\frac{\eta(n) - n}{p}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + O(1)\overline{\psi}(n)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{74}$$

в которых $\overline{\psi}(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, $\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi_1; n)$, *либо* $\eta(\psi_2; n)$ *и* $\theta_\omega \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, *причем* $\theta_\omega = 1$, *если* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности,* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n.

Равенства (73), (74) доставляют решение задачи К-Н для сумм $V_{n,p}(f; \cdot)$ на классах $C_\infty^{\overline{\psi}}$ и $C^{\overline{\psi}}H_\omega$ соответственно, если для функций $\psi_i \in \mathfrak{M}'_\infty$, $i = 1, 2$, выполняется соотношение (72) и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\eta(n) - n}{p} = \infty$. Указанным условиям удовлетворяют функции $\psi_{r,i}(n) = e^{-\alpha_i n^r}$, $\alpha_i > 0$, $0 < r < 1$, $i = 1, 2$, и $p = \ln^\beta n$, $\beta > 0$. Следует отметить, что $\psi_{r,i}(n) \notin \mathfrak{M}_C$, $i = 1, 2$.

4. Операторы Валле Пуссена на классах $\hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$. В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in \hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ в работе [8] предложены выражения вида

$$U_\sigma(f; x) = U_\sigma(f; x; \Lambda) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(v)\lambda_\sigma(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt,$$

где $\Lambda = \{\lambda_\sigma(v)\}$ — семейство функций, непрерывных при всех $v \ge 0$, зависящих от действительного параметра σ.

В частности, в работе [8] рассмотрен случай, когда функции $\lambda_\sigma(v)$ задаются следующим образом:

$$\lambda_\sigma(v) = \lambda_\sigma(v, c) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le c; \\ \dfrac{\sigma - v}{\sigma - c}, & c \le v \le \sigma; \\ 0, & v \ge \sigma, \end{cases}$$

где c — некоторое число из промежутка $[0;\sigma]$. Семейство $\{\lambda(v,c)\}$ обозначают через Λ_c.

В работе [8] показано, что если $f\in\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, а $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v\geq 0$, ее преобразование $\hat{\psi}(t)$ суммируемо на R^1, то для любого $c<\sigma$

$$U_\sigma(f;x;\Lambda_c) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\leq\sigma}\lambda_\sigma(k,c)(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \qquad (75)$$

где a_k и b_k, $k=1,2,\ldots$, — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

В периодическом случае при $\sigma=n\in N$ и $c=n-p$, $p\in N$, $p<n$, в силу (75) операторы $U_\sigma(f;x;\Lambda_c)$ совпадают с суммами Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$. Поэтому в дальнейшем функции $U_\sigma(f;x;\Lambda_c)$ будем называть операторами Валле Пуссена и обозначать $V_{\sigma,c}(f;x)$.

Пусть, далее, $\psi\in U'$, $\lambda\in\Lambda_c$. Положим

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v) = (1-\lambda_\sigma(v))\psi(v), \quad v\geq 0, \qquad (76)$$

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv.$$

Для функции $\tau_\sigma(v)$ введем обозначение

$$A(\tau_\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{\tau}_\sigma(t)|\,dt.$$

В работе [49] для величин $\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};V_{\sigma,c}\right)$ доказаны следующие утверждения.

Теорема 23. *Пусть* $\psi\in U'$, *функции* $\tau_\sigma(v)$ *определены равенством* (76). *Тогда*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};V_{\sigma,c}\right) = A(\tau_\sigma). \qquad (77)$$

В периодическом случае при $\psi(v)=v^{-r}$, $r>0$, это утверждение доказано в работе [16], для классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ — в работе [34].

Теорема 24. *Пусть* $\psi\in\mathfrak{M}_C$, $\lambda\in\Lambda_c$, *функции* $\tau_\sigma(v)$ *определены равенством* (76). *Тогда при* $\sigma\to\infty$ *справедлива формула*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};V_{\sigma,c}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\int\limits_0^1\frac{|\lambda(\sigma v)|}{1-v}dv +$$

$$+\; O\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^1\frac{|\tau(\sigma v)|}{v}dv + \psi(\sigma) + \int\limits_0^1 v(1-v)\left|d\tau'(\sigma v)\right|\right). \qquad (78)$$

В периодическом случае, когда $\psi(v)=v^{-r}$, $r>0$, формула (78) при целых β доказана в работе [14], для произвольных β — в работе [26], а для классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ — в работе [36].

Далее, в работе [49] рассматривается поведение при $n\to\infty$ величины $\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};V_{\sigma,c}\right)$ в предположении, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\frac{c}{\sigma}=\Theta$, $0<\Theta\leq 1$.

Теорема 25. *Пусть* $\Theta=1$ *и* $\psi\in\mathfrak{M}_C$. *Тогда при* $\sigma\to\infty$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c}\right) = \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\frac{\sigma}{\sigma-c} + O(\psi(\sigma)). \qquad (79)$$

Отметим, что при $c=\sigma-1$ (приближение операторами Фурье) формула (79) совпадает с одним из результатов работы [7]. В периодическом случае при $\sigma=n$, $1-\dfrac{c}{\sigma}=\dfrac{p}{n}$, $n\in N$, $p\in N$, формула (79) совпадает с равенством (51).

Теорема 26. *Пусть* $0<\Theta<1$ *и* $\psi\in\mathfrak{M}_C$. *Тогда при* $\sigma\to\infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{\sigma,c}\right) = A\left(\tau^{(\Theta)}_{\sigma}\right) + O\left(\psi(\sigma)\left|\Theta-\frac{c}{\sigma}\right|\ln\frac{1}{|\Theta-c/\sigma|}\right), \qquad (80)$$

где

$$\tau^{(\Theta)}_{\sigma}(v) = \begin{cases} 0, & 0\le v\le\Theta; \\ \dfrac{v-\Theta}{1-\Theta}\psi(\sigma v), & \Theta\le v\le 1; \\ \psi(\sigma v), & v\ge 1, \end{cases} \qquad (81)$$

причем

$$A\left(\tau^{(\Theta)}_{\sigma}\right) = O(\psi(\sigma)), \quad \sigma\to\infty. \qquad (82)$$

В периодическом случае для классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ при $1-\dfrac{c}{\sigma}=\dfrac{p}{n}$, $n\in N$, $p\in N$, аналогичное утверждение содержится в теореме 9.

Отметим, что равенства (79) и (80) обеспечивают решение задачи К-Н для операторов $V_{\sigma,c}(f;x)$ на классах $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$. Из равенств (80) и (82) также следует, что в случае, когда $0<\Theta<1$ и $\psi\in\mathfrak{M}_C$, операторы Валле Пуссена $V_{\sigma,c}(f;x)$ приближают функции классов $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ с наилучшим порядком $O(\psi(\sigma))$.

В работах [11, 12], в частности, рассмотрено приближение функций класса $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами $V_{\sigma,c}(f;x)$ в случае, когда $\psi\in\mathfrak{M}_{C,\infty}$. Из полученных в этих работах более общих результатов можно сформулировать следующее утверждение для классов $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Теорема 27. *Если* $f\in\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi\in\mathfrak{M}_{C,\infty}$, *то для любого* $\beta\in R^1$ *и* $\sigma>c>0$ *выполняется неравенство*

$$\left\|f(\cdot)-V_{\sigma,c}(f;\cdot)\right\|_C \le \mathcal{K}\psi(c)E_c\left(f^{\psi}_{\beta}\right)\ln\frac{\sigma+c}{\sigma-c},$$

где $\mathcal{K}$ *— величина, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$,

$$E_c\left(f^{\psi}_{\beta}\right) = \inf_{\varphi\in W^2_c}\left\|f^{\psi}_{\beta}(\cdot)-\varphi(\cdot)\right\|_C,$$

W^2_c *— множество целых функций экспоненциального типа* $\le c$, *удовлетворяющих условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|)^2}dx < \infty.$$

5. Суммы Валле Пуссена на классах $C(\varepsilon)$. К настоящему времени получены только порядковые оценки приближения суммами Валле Пуссена классов $C(\varepsilon)$. Самым содержательным результатом здесь является теорема Стечкина – Дамена (см., например, [17, с. 36]).

Теорема 28 (С. Б. Стечкин). *Существуют две такие постоянные K_1 и K_2, что для любого класса $C(\varepsilon)$, любых p и n имеет место оценка*

$$K_1 \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\varepsilon_{n-p+\nu}}{p+\nu+1} \leq \mathcal{E}\big(C(\varepsilon); V_{n,p}\big) \leq K_2 \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\varepsilon_{n-p+\nu}}{p+\nu+1}. \tag{83}$$

В работе [17] получены достаточные условия, которые нужно наложить на последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, при которых класс $C(\varepsilon)$ может быть приближен с наилучшим порядком $O(\varepsilon_n)$ некоторой последовательностью сумм Валле Пуссена. Оказалось, что если $\varepsilon_n = \exp(-\varphi(n))$ и числа $\varepsilon_n \downarrow 0$ достаточно „правильно", то суммы $V_{n,p}(f; x)$ будут приближать соответствующий класс $C(\varepsilon)$ с наилучшим порядком $O(\varepsilon_n)$, если полагать $p = O\left(\frac{1}{\varphi'(n)}\right)$.

Оставался открытым вопрос о том, можно ли любой класс $C(\varepsilon)$ приблизить с наилучшим порядком какой-нибудь последовательностью сумм Валле Пуссена.

В работе В. А. Баскакова [50] получен точный критерий для возможности приближения класса $C(\varepsilon)$ суммами Валле Пуссена с наилучшим порядком, из которого следует отрицательный ответ на этот вопрос.

Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, введем, следуя [50], некоторые последовательности чисел, характеризующие поведение последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Пусть задана монотонно убывающая последовательность чисел $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ и число $A > 0$. Обозначим через $r_1 = r_1(A; n)$ наибольшее из чисел k, $k \leq n$, для которых $\varepsilon_{n-k} \leq A\varepsilon_n$, и через $r_2 = r_2(A; n)$ — наибольшее из чисел k, для которых $\varepsilon_{n+k} \geq \frac{1}{A}\varepsilon_n$.

В работе [50] доказана следующая теорема.

Теорема 29. *Для того чтобы класс $C(\varepsilon)$, $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, приближался с наилучшим порядком $O(\varepsilon_n)$ некоторой последовательностью сумм Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два числа $A > 1$ и $B > 0$ такие, что для всех $n \geq 1$*

$$\frac{r_2(A, n)}{1 + r_1(A, n)} \leq B.$$

Если положить $r^*(A, n) = \min\{r_2(A, n); n\}$, то теорему 29 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 30. *Для того чтобы класс $C(\varepsilon)$, $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, приближался с наилучшим порядком $O(\varepsilon_n)$ некоторой последовательностью сумм Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два числа $A > 1$ и $B > 0$ такие, что для всех $n \geq 1$*

$$\frac{r^*(A, n)}{1 + r_1(A, n)} \leq B.$$

Из теоремы 30 следует, что существуют такие классы $C(\varepsilon)$, которые не приближаются с наилучшим порядком $O(\varepsilon_n)$ никакими суммами Валле Пуссена.

Примером может служить класс $C(\varepsilon^*)$, для которого $\varepsilon^* = \{\varepsilon_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, $\varepsilon_0^* = 1$, $\varepsilon_k^* = \dfrac{1}{s!}$, $2^s < k \le 2^{s+1}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$. За последовательность $\{n^*\}$ можно взять числа $n_s = 2^s + 1$. При любом фиксированном $A > 1$ для этих чисел, начиная с некоторого номера n_s, $r_1(A, n_s) = 0$, а $r_2(A, n_s) = 2^s - 1$.

Нетрудно заметить, что такие значения для $r_1(A, n_s)$ и $r_2(A, n_s)$, будут для тех чисел n_s, для которых $\ln n_s > 1 > A$.

Поскольку $r^*(A, n_s) = \min\{r_2(A, n_s); n_s\} = r_2(A, n_s)$, то

$$\frac{r^*(A, n_s)}{1 + r_1(A, n - s)} = \frac{2^s - 1}{1} \to \infty, \quad s \to \infty,$$

и поэтому на основании теоремы 30 класс $C(\varepsilon^*)$ не приближается с наилучшим порядком никакими суммами Валле Пуссена.

После того, как выяснилось, что существуют классы $C(\varepsilon)$, которые не могут быть приближены с наилучшим порядком $O(\varepsilon_n)$ никакими суммами Валле Пуссена, естественно возникает вопрос о том, могут ли такие классы приближаться с наилучшим порядком какими-нибудь другими линейными полиномиальными операторами.

В работе [51] показано, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Теорема 31. *Если класс $C(\varepsilon)$, $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, таков, что для любого $A > 1$ существует такая последовательность номеров $n_k = n_k(A)$, $k = 1, 2, \ldots$, что*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r^*(A, n_k)}{1 + r_1(A, n_k)} = \infty,$$

то этот класс не может приближаться с наилучшим порядком $O(\varepsilon_n)$ никакой последовательностью линейных полиномиальных операторов.

Сопоставляя теоремы 30 и 31, можно сделать вывод, что если класс $C(\varepsilon)$ не приближается с наилучшим порядком суммами Валле Пуссена, то он не может приближаться с наилучшим порядком и никакими линейными полиномиальными операторами.

Таким образом, из теоремы 31 следует, что суммы Валле Пуссена — один из наиболее эффективных аппаратов линейного полиномиального приближения классов $C(\varepsilon)$.

1. *Ch. La Valle Poussin.* Sur la meilleure approximation des fonction d'une variable reelle par des expressions d'order donne // C. r. Acad. sci. Paris. – 1918. – **166**. – P. 799 – 802.
2. *Feier L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Math. Ann. – 1904. – **58**. – S. 501 – 569.
3. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
6. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.
7. *Степанец А. И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближения целыми функциями на действительной оси. – Киев, 1988. – С. 3 – 41. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
8. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 198 – 209.

9. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
10. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210 – 222.
11. *Степанец А. И.* Приближения в пространствах локально интегрируемых функций // Там же. – 1994. – **46**, № 5. – С. 597 – 625.
12. *Степанец А. И.* Приближение в пространствах локально интегрируемых функций. – Киев, 1993. – 47 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 93.18).
13. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 96.11).
14. *Nagy V.* Sur une classe generate de precedes de sommation pour les Series de Fourier // Hung. Acta Math. – 1948. – **1**, № 3. – R. 14 – 52.
15. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**, № 5. – С. 737 – 770.
16. *Ефимов А. В.* О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена. II // Там же. – 1960. – **24**, № 3. – С. 431 – 468.
17. *Байбородов С. П.* Приближение функций суммами Валле Пуссена // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 1. – С. 33 – 48.
18. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 686 с.
19. *Лозинский С. М.* Об одном классе линейных операций // Докл. АН СССР. – 1948. – **61**, № 2. – С. 193 – 196.
20. *Тиман А. Ф.* Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского // Там же. – 1951. – **81**, № 4. – С. 509 – 511.
21. *Тиман А. Ф.* Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**. – С. 99 – 134.
22. *Кулик А. Н.* Об остаточном члене уклонения сумм Валле Пуссена на классах дифференцируемых функций // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 57 – 62.
23. *Kolmogoroff A.* Zur Grossenordnung des Restgludes Fourierchen differenzier barer Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**. – P. 521 – 526.
24. *Пинкевич В. Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**, № 5. – С. 521 – 528.
25. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 3 – 73.
26. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Там же. – 1961. – **62**. – С. 61 – 97.
27. *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 213 – 242.
28. *Стечкин С. Б.* О суммах Валле Пуссена // Докл. АН СССР. – 1951. – **80**, № 4. – С. 545 – 548.
29. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
30. *Nagy V.* Uber geuisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen // Ber. Acad. Dtsch. Wiss. – 1938. – **90**. – R. 103 – 134.
31. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
32. *Дзядык В. К., Степанец А. И.* О последовательности нулей интегрального синуса // Метрич. вопр. теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1971. – Вып. 2. – С. 64 – 73.
33. *Дзядык В. К., Степанец А. И.* Асимптотические равенства для точных верхних граней приближений функций классов Гельдера при помощи полиномов Рогозинского // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 4. – С. 476 – 487.
34. *Островецький Л. А.* Про асимптотичні рівності при наближенні функцій класів H_ω сумами Валле Пуссена // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 5. – С. 340 – 342.
35. *Дудас В. А.* Приближение периодических функций классов Гельдера суммами Валле Пуссена. – Киев, 1980. – 31 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.9).
36. *Рукасов В. И.* Приближение непрерывных периодических функций линейными средними их рядов Фурье. – Киев, 1983. – 55 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
37. *Рукасов В. И.* Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 478 – 483.
38. *Новиков О. А., Рукасов В. И.* Приближение классов непрерывных периодических функций аналогами сумм Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 57 – 63.

39. *Бушев Д. Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. – Киев, 1984. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
40. *Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – С. 109 – 110.
41. *Степанец А. И., Пачулия Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье. – Киев, 1985. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.61).
42. *Кулик А. Н.* Вопросы приближения периодических дифференцируемых функций: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1987. – 105 с.
43. *Новиков О. А., Рукасов В. И.* Приближение непрерывных периодических функций обобщенными суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1069 – 1079.
44. *Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение классов $C_\beta^\psi H_\omega$ обобщенными суммами Валле Пуссена // Там же. – 1997. – **49**, № 4. – С. 606 – 610.
45. *Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов 2π-периодических функций суммами Валле Пуссена // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – С. 242 – 254.
46. *Рукасов В. И., Новиков О. А., Чайченко С. О.* Приближение классов $C_\infty^{\overline{\psi}}$ методами Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та її застосування: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – С. 396 – 406.
47. *Рукасов В. И., Новиков О. А., Чайченко С. О.* Приближение классов $C_\infty^{\overline{\psi}}$ суммами Валле Пуссена (небольшая гладкость) // Укр. мат. конгрес, присвячений 200-річчю від дня народження М. В. Остроградського (Київ, 21 – 25 серпня 2001 р.): Тез. допов. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 51 – 52.
48. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення класів $C^{\overline{\psi}} H_\omega$ сумами Валле Пуссена // Там же. – С. 52 – 53.
49. *Рукасов В. И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682 – 690.
50. *Баскаков В. А.* Методы суммирования рядов Фурье, дающие наилучший порядок приближения на классах $C(\varepsilon)$, и их нормы // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 8. – С. 60 – 63.
51. *Баскаков В. А.* Линейные полиномиальные операторы с наилучшим порядком приближения. – Калинин: Калинин. ун-т, 1984. – 79 с.

Получено 22.02.2002