УДК 523.112

Ю. М. Малюта, Т. В. Обиход (Ин-т ядер. исслед. НАН Украины, Киев)

BPS-СОСТОЯНИЯ В F-ТЕОРИИ

The spectra of BPS states in F-theory on elliptic fibred fourfolds are investigated.

Досліджено спектри BPS-станів в F-теорії на еліптичних розшарованих фоурфолдах.

1. **Введение.** Клемм, Маир и Вафа [1] показали, что компактификация F-теории на трифолде Калаби – Яу $X_{24}(1, 1, 2, 8, 12)$ приводит к спектру BPS-состояний, представленному в табл. 1.

Инстантонные числа (кратности вырождений BPS-состояний для $X_{24}(1, 1, 2, 8, 12)$)

n	$n_{0,0,m}$	$n_{1,0,m}$	$n_{2,0,m}$	$n_{3,0,m}$	$n_{4,0,m}$	$n_{5,0,m}$
1	1	252	5130	54760	419895	2587788
2			−9252	−673760	−20534040	−389320128
3				848628	115243155	6499779552

Другие компактификации F-теории на специальных фоурфолдах изучены Донаги, Грасси, Виттеном [2] и Маиром [3] в контексте непертурбативных суперпотенциалов.

Цель настоящей работы — исследовать спектры BPS-состояний в F-теории на эллиптических расслоенных фоурфолдах. Мы рассмотрим модели, имеющие непертурбативные суперпотенциалы.

2. **Модель Донаги – Грасси – Виттена.** Фоурфолд в этом случае является эллиптическим расслоением над базой $P^1 \times S$, где S обозначает поверхность дель Пеццо [2]. Модель имеет геометрическую фазу, которая соответствует регулярной триангуляции дуального полиэдра [4]. Эта фаза характеризуется следующими генераторами Мори:

$$l^{(1)} = (-3, 0; 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$l^{(2)} = (-1, -1; 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$l^{(3)} = (0, -2; 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0),$$

$$l^{(4)} = (0, -3; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Используя [5], находим главные части операторов Пикара – Фукса:

$$L_1 = 3\theta_1^2 - \theta_1\theta_2 + \theta_2^2,$$

$$L_2 = \theta_2^2,$$

$$L_3 = \theta_3^2,$$

$$L_4 = \theta_2^2 + 4\theta_2\theta_3 + 4\theta_3^2 - 3\theta_2\theta_4 - 6\theta_3\theta_4 + 9\theta_4^2,$$

где $\theta_i = z_i d/dz_i$, z_i — алгебраические координаты на пространстве модулей комплексной структуры.

С помощью программы INSTANTON [6] получен спектр BPS-состояний, представленный в табл. 2.

© Ю. М. МАЛЮТА, Т. В. ОБИХОД, 2002

Таблица 2

Инстантонные числа (кратности вырождений BPS-состояний) для модели Донаги – Грасси – Виттена

$n_{2,1,3,0,0}$	$n_{2,1,3,0,1}$	$n_{2,1,3,0,2}$	$n_{2,1,3,0,3}$	$n_{2,1,3,0,4}$	$n_{2,1,3,0,5}$
1	252	5130	54760 (27 sequences)	419895	2587788
	$n_{2,1,3,0,1}$	$n_{2,2,3,0,1}$	$n_{2,3,3,0,1}$	$n_{2,4,3,0,1}$	$n_{2,5,3,0,1}$
	$1\cdot 252^{*}$	$2\cdot 5130^{*}$	$3\cdot 54760^{*}$ (27 sequences)	$4\cdot 419895^{*}$	$5\cdot 2587788^{*}$
$n_{4,0,3,0,1}$	$n_{4,1,3,0,1}$	$n_{4,2,3,0,1}$	$n_{4,3,3,0,1}$	$n_{4,4,3,0,1}$	$n_{4,5,3,0,1}$
1	252	5130	54760 (513 sequences)	419895	2587788
$n_{5,0,3,0,1}$	$n_{5,1,3,0,1}$	$n_{5,2,3,0,1}$	$n_{5,3,3,0,1}$	$n_{5,4,3,0,1}$	$n_{5,5,3,0,1}$
1	252	5130	54760 (702 sequences)	419895	2587788
$n_{6,0,3,0,1}$	$n_{6,1,3,0,1}$	$n_{6,2,3,0,1}$	$n_{6,3,3,0,1}$	$n_{6,4,3,0,1}$	$n_{6,5,3,0,1}$
1	252	5130	54760 (189 sequences)	419895	2587788

Мы нашли башню бесконечных последовательностей BPS-состояний. Последовательности 1, 252, 5130, … известны. E_8-функция распределения является производящим функционалом этих последовательностей [7]. Но последовательности $1\cdot 252$, $2\cdot 5130$, $3\cdot 54760$, … (отмеченные в табл. 2 звездочкой) являются новыми и интересными с физической точки зрения, так как свидетельствуют о наличии дополнительных состояний.

3. Эллиптический расслоенный фоурфолд над $\mathbf{P}^1$-расслоением на $(\mathbf{P}^1)^2$. Фоурфолд в этом случае является эллиптическим расслоением над $\mathbf{P}^1$-расслоением $\mathbf{P}(O_B \times O_B(f_1+f_2))$ на $B=(\mathbf{P}^1)^2$, где f_1 и f_2 — слои двух проекций из B в $\mathbf{P}^1$ [3, 7]. Эта модель имеет геометрическую фазу, которая характеризуется генераторами Мори

$$l^{(1)} = (0; 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 1),$$

$$l^{(2)} = (0; 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, -2, 0),$$

$$l^{(3)} = (-6; 0, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 1, 0),$$

$$l^{(4)} = (0; 0, 1, 0, 0, 0, -1, 1, -1, 0).$$

Главные части операторов Пикара – Фукса имеют вид

$$L_1 = \theta_1^2,$$

$$L_2 = \theta_2(\theta_1 - \theta_2 + \theta_4),$$

$$L_3 = \theta_3(\theta_1 + 2\theta_2 - \theta_3 + \theta_4),$$

$$L_4 = \theta_4^2.$$

С помощью программы INSTANTON получен спектр BPS-состояний, представленный в табл. 3.

Таблица

Инстантонные числа (кратности вырождений BPS-состояний) для эллиптического расслоенного фоурфолда над $\mathbf{P}^1$-расслоением на $(\mathbf{P}^1)^2$

$n_{3,0,0,0,1}$	$n_{3,0,0,1,1}$	$n_{3,0,0,2,1}$	$n_{3,0,0,3,1}$	$n_{3,0,0,4,1}$	$n_{3,0,0,5,1}$
1	252	5130	54760 (1 sequence)	419895	2587788
$n_{3,1,0,0,0}$	$n_{3,1,0,1,0}$	$n_{3,1,0,2,0}$	$n_{3,1,0,3,0}$	$n_{3,1,0,4,0}$	$n_{3,1,0,5,0}$
1	252	5130	54760 (1 sequence)	419895	2587788
		$n_{3,0,0,2,2}$	$n_{3,0,0,3,2}$	$n_{3,0,0,4,2}$	$n_{3,0,0,5,2}$
		−9252	−673760 (2 sequences)	−20534040	−389320128
		$n_{3,2,0,2,0}$	$n_{3,2,0,3,0}$	$n_{3,2,0,4,0}$	$n_{3,2,0,5,0}$
		−9252	−673760 (2 sequences)	−20534040	−389320128
			$n_{3,0,0,3,3}$	$n_{3,0,0,4,3}$	$n_{3,0,0,5,3}$
			848628 (3 sequences)	115243155	6499779552
			$n_{3,3,0,3,0}$	$n_{3,3,0,4,0}$	$n_{3,3,0,5,0}$
			848628 (3 sequences)	115243155	6499779552
	$n_{5,1,0,1,0}$	$n_{5,1,0,2,0}$	$n_{5,1,0,3,0}$	$n_{5,1,0,4,0}$	$n_{5,1,0,5,0}$
	$-1 \cdot 252^*$	$-2 \cdot 5130^*$	$-3 \cdot 54760^*$ (2 sequences)	$-4 \cdot 419895^*$	$-5 \cdot 2587788^*$
		$n_{5,2,0,2,0}$	$n_{5,2,0,3,0}$	$n_{5,2,0,4,0}$	$n_{5,2,0,5,0}$
		$2 \cdot 9252^*$	$3 \cdot 673760^*$ (2 sequences)	$4 \cdot 20534040^*$	$5 \cdot 389320128^*$
			$n_{5,3,0,3,0}$	$n_{5,3,0,4,0}$	$n_{5,3,0,5,0}$
			$-3 \cdot 848628^*$ (2 sequences)	$-4 \cdot 115243155^*$	$-5 \cdot 6499779552^*$

Последовательности

$$1, 252, 5130, \ldots,$$
$$-9252, -673760, -20534040, \ldots,$$
$$848628, 115243155, 6499779552, \ldots$$

известны. Но последовательности

$$-1 \cdot 252, -2 \cdot 5130, -3 \cdot 54760, \ldots,$$
$$2 \cdot 9252, 3 \cdot 673760, 4 \cdot 20534040, \ldots,$$
$$-3 \cdot 848628, -4 \cdot 115243155, -5 \cdot 6499779552, \ldots$$

(отмеченные в табл. 3 звездочкой) являются новыми и интересными с физической точки зрения, так как свидетельствуют о наличии дополнительных состояний.

4. Эллиптический расслоенный фоурфолд над $\mathbf{P}^1 \times F_1$. Фоурфолд в этом случае является эллиптическим расслоением над $\mathbf{P}^1 \times F_1$, где F_1 — поверхность Хирцебруха [3, 7]. Эта модель имеет геометрическую фазу, которая характеризуется генераторами Мори

$$l^{(1)} = (-6; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 1),$$

$$l^{(2)} = (0; 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, -2),$$

$$l^{(3)} = (0; 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, 0, -1),$$

$$l^{(4)} = (0; 1, -2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Главные части операторов Пикара – Фукса имеют вид

$$L_1 = \theta_1(\theta_1 - 2\theta_2 - \theta_3),$$

$$L_2 = \theta_2(\theta_2 - \theta_3),$$

$$L_3 = \theta_3(\theta_3 - 2\theta_4),$$

$$L_4 = \theta_4^2.$$

С помощью программы INSTANTON найден спектр BPS-состояний, представленный в табл. 4.

Инстантонные числа (кратности вырождений BPS-состояний) для эллиптического расслоенного фоурфолда над $\mathbf{P}^1 \times F$

	$n_{3,1,0,1,0}$	$n_{3,2,0,1,0}$	$n_{3,3,0,1,0}$	$n_{3,4,0,1,0}$	$n_{3,5,0,1,0}$
	$1 \cdot 252^*$	$2 \cdot 5130^*$	$3 \cdot 54760^*$ (1 sequence)	$4 \cdot 419895^*$	$5 \cdot 2587788^*$
		$n_{3,2,0,2,0}$	$n_{3,3,0,2,0}$	$n_{3,4,0,2,0}$	$n_{3,5,0,2,0}$
		$-2 \cdot 9252^*$	$-3 \cdot 673760^*$ (1 sequence)	$-4 \cdot 20534040^*$	$-5 \cdot 389320128^*$
			$n_{3,3,0,3,0}$	$n_{3,4,0,3,0}$	$n_{3,5,0,3,0}$
			$3 \cdot 848628^*$ (1 sequence)	$4 \cdot 115243155^*$	$5 \cdot 6499779552^*$
$n_{6,0,0,1,0}$	$n_{6,1,0,1,0}$	$n_{6,2,0,1,0}$	$n_{6,3,0,1,0}$	$n_{6,4,0,1,0}$	$n_{6,5,0,1,0}$
1	252	5130	54760 (5 sequences)	419895	2587788
$n_{6,0,0,1,1}$	$n_{6,1,0,1,1}$	$n_{6,2,0,1,1}$	$n_{6,3,0,1,1}$	$n_{6,4,0,1,1}$	$n_{6,5,0,1,1}$
1	252	5130	54760 (5 sequences)	419895	2587788
		$n_{6,2,0,2,0}$	$n_{6,3,0,2,0}$	$n_{6,4,0,2,0}$	$n_{6,5,0,2,0}$
		−9252	−673760 (10 sequences)	−20534040	−389320128
		$n_{6,2,0,2,2}$	$n_{6,3,0,2,2}$	$n_{6,4,0,2,2}$	$n_{6,5,0,2,2}$
		−9252	−673760 (10 sequences)	−20534040	−389320128
			$n_{6,3,0,3,0}$	$n_{6,4,0,3,0}$	$n_{6,5,0,3,0}$
			848628 (15 sequences)	115243155	6499779552

Окончание таблицы 4

			$n_{6,3,0,3,3}$	$n_{6,4,0,3,3}$	$n_{6,5,0,3,3}$
			848628 (15 sequences)	115243155	6499779552

Последовательности

$$1, 252, 5130, \ldots,$$

$$-9252, -673760, -20534040, \ldots,$$

$$848628, 115243155, 6499779552, \ldots$$

известны. Но последовательности

$$1 \cdot 252, 2 \cdot 5130, 3 \cdot 54760, \ldots,$$

$$-2 \cdot 9252, -3 \cdot 673760, -4 \cdot 20534040, \ldots,$$

$$3 \cdot 848628, 4 \cdot 115243155, 5 \cdot 6499779552, \ldots$$

(отмеченные в табл. 4 звездочкой) являются новыми и интересными с физической точки зрения, так как свидетельствуют о наличии дополнительных состояний.

1. *Klemm A., Mayr P., Vafa C.* BPS states of exceptional non-critical strings. – Harvard, 1996. – 29 p. – (Preprint, HUTP-96/A031).
2. *Donagi R., Grassi A., Witten E.* A non-perturbative superpotential with E_8-symmetry // Mod. Phys. Lett. A. – 1996. – **11**. – P. 2199 – 2212.
3. *Mayr P.* Mirror symmetry, $N = 1$ superpotentials and tensionless strings on Calabi – Yau fourfolds // Nucl. Phys. B. – 1997. – **494**. – P. 489 – 545.
4. *Christo T., Loebel A.* A polyhedron representation transformation algorithm (PORTA) // http:// elib. zib.de/.
5. *Hosono S., Klemm A., Theisen S., Yau S.-T.* Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi – Yau spaces // Nucl. Phys. B. – 1995. – **433**. – P. 501 – 552.
6. *Klemm A.* An updated version of the Mathematica program INSTANTION for complete intersection or hypersurface fourfolds in toric ambient spaces. – Harvard, 1997. – 4 p. – (Preprint, HUTP-97 / A000).
7. *Klemm A., Lian B., Roan S.-S., Yau S.-T.* Calabi – Yau fourfolds for M- and F-theory compactifications // Nucl. Phys. B. – 1998. – **518**. – P. 515 – 574.

Получено 29.06.99