УДК 513.83

И. Ю. Власенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТ СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

We consider periodic components of structurally stable diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. We study properties of these components and give the topological description of their boundaries.

Розглядаються періодичні компоненти структурно стійких дифеоморфізмів на двовимірних многовидах. Вивчаються їх властивості та дається топологічний опис їх меж.

Пусть M — замкнутое двумерное многообразие, $f\colon M \to M$ — диффеоморфизм.

Определение 1. *Неблуждающей точкой f называется точка $x \in M$ такая, что для любой $U(x)$ существует $m \neq 0$ такое, что $f^m(U) \cap U \neq \varnothing$ ($U(x)$ — окрестность x).*

Множество всех неблуждающих точек f обозначается $\Omega(f)$. $\Omega(f)$ замкнуто в M. Если точка $x \in M$ не является неблуждающей точкой, она называется *блуждающей*. Во множестве всех блуждающих точек выделяются подмножества благодаря понятию регулярности, введенному Биркгофом и Смитом [1].

Определение 2. *Блуждающая точка x называется регулярной, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(x)$ — δ-окрестность точки x и $N > 0$ такие, что для любого $k: |k| > N$ $f^k(\delta(x)) \subset \varepsilon(\Omega)$, где $\varepsilon(\Omega)$ — ε-окрестность множества Ω, $f^k(\delta(x))$ — образ $\delta(x)$ при отображении f^k.*

Множество регулярных точек открыто в M. Максимальные связные компоненты этого множества называются регулярными компонентами.

Обозначим такую компоненту через S. В силу максимальности она может быть одного из двух типов: *блуждающая*, если $f^k(S) \cap S = \varnothing$, $k \neq 0$, и *периодическая порядка* $q \geq 1$, если $f^q(S) = S$, $f^k(S) \cap S = \varnothing$, $k = 1, \ldots, q-1$.

Определение 3. *Диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме А, если множество Ω гиперболическое для f и периодические точки f плотны в Ω.*

Диффеоморфизм f называется структурно устойчивым, если он топологически сопряжен каждому диффеоморфизму некоторой малой своей окрестности. В двумерном случае f является структурно устойчивым (грубым) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет аксиоме А и строгому условию трансверсальности, т. е. условию, что устойчивые и неустойчивые многообразия неблуждающих точек пересекаются между собой трансверсально.

Если $\dim M = 2$, то из гиперболичности Ω следует, что периодические точки f плотны в Ω. Определение и свойства гиперболических множеств можно найти, например, в [2].

Пусть d — метрика на M, $x \in M$. Определим устойчивое и неустойчивое многообразия точки x:

$$W^s(x) = \{\, y \in M \mid d(f(x), f(y)) \to 0, \ n \to +\infty \,\},$$

$$W^u(x) = \{\, y \in M \mid d(f(x), f(y)) \to 0, \ n \to -\infty \,\}.$$

Под устойчивым (неустойчивым) многообразием множества будем понимать объединение устойчивых (неустойчивых) многообразий составляющих его точек.

Теорема о спектральном разложении [3]. *Пусть f удовлетворяет аксиоме А. Тогда справедливо разложение $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_n$, где*

Ω_k — *попарно не пересекающиеся, замкнутые, инвариантные, топологически транзитивные базисные множества, для которых имеет место локальная структура произведения, т. е. для любых равномерно близких* $x, y \in \Omega_k$ *пересечение* $W^s_{\mathrm{loc}}(x) \cap W^s_{\mathrm{loc}}(y)$ *состоит ровно из одной точки, принадлежащей* Ω_k. *При этом для* M *справедливо разложение на попарно не пересекающиеся части* $M = \bigcup_{k=1}^{n} W^u(\Omega_k)$.

Определение 4. *Базисное множество* Ω *называется аттрактором (репеллером), если* $W^s(\Omega) = \Omega$ *(если* $W^u(\Omega) = \Omega$*). Если базисное множество не является аттрактором или репеллером, оно называется седловым базисным множеством.*

В работе автора [4] изучались периодические компоненты диффеоморфизмов на двумерных многообразиях, удовлетворяющих аксиоме A. Здесь мы используем результаты этой работы для описания важного класса A-диффеоморфизмов — структурно устойчивых диффеоморфизмов, отличающихся добавлением строгого условия трансверсальности. При этом будем использовать обозначения, принятые в [4].

При переходе к структурно устойчивым многообразиям пересечения многообразий в границе S становятся трансверсальными, поэтому для множеств Ω_i реализуются только 2 слова: 00 и 0D0 (см. работу [4]). Строгое условие трансверсальности приводит к тому, что в границе S кривая вида J не реализуется, кривая вида V сводится к многообразию $W_i^{\sigma}(p)$ точки p с крайним номером. Кривая вида $L(x_\alpha, x_\omega)$ (где, возможно, $x_\alpha = x_\omega$) реализуется при условии трансверсального пересечения составляющих ее многообразий. Кроме того, в этом случае граница S имеет следующее свойство.

Лемма 1. ∂S *содержит конечное число гетероклинических (в том числе гомоклинических) орбит.*

Доказательство. Эти орбиты в ∂S содержатся в кривых вида $L(x_\alpha, x_\omega)$. Предположим от противного, что $L(x_\alpha, x_\omega)$ содержит бесконечное число гетероклинических орбит. Это значит, что фундаментальные окрестности многообразий $W^u(x_\alpha)$ и $W^s(x_\omega)$ пересекаются в бесконечном числе точек. Граничная для них точка на $W^u(x_\alpha)$ тоже принадлежит ∂S, и, следовательно, является точкой пересечения $W^u(x_\alpha)$ и $W^s(x_\omega)$. Рассмотрим малую окрестность граничной точки в $W^u(x_\alpha)$, в которой все точки пересечения имеют касательный вектор к $W^s(x_\omega)$, достаточно близкий к касательному вектору в граничной точке. Тогда найдется число $C > 0$ такое, что в этой окрестности отрезок $W^s(x_\omega)$ после каждой точки пересечения имеет длину не меньше чем C, и, как следствие, фундаментальная окрестность $W^s(x_\omega)$ имеет бесконечную длину, что невозможно.

Односвязные компоненты с нульмерными аттрактором и репеллером. Пусть в границу периодической компоненты S входят источник α и сток ω. Применим теорему 1 работы [4] к рассматриваемому случаю. Тогда α и ω разбивают ∂S на две компоненты связности Q_1 и Q_2.

Теорема 1. *Если* f — *структурно устойчивый диффеоморфизм, то каждая компонента связности множества* $\partial S \setminus [\{\alpha\} \cup \{\omega\}]$ *принадлежит одному из следующих трех типов:*

1) *соответствующая часть* ∂S *состоит из седловой точки* x *и ее подмногообразий* $W_i^u(x)$ *и* $W_j^s(x)$, *не имеющих гетероклинических (в том числе гомоклинических) точек;*

2) *в нее входят многообразия* $W_i^s(x_\alpha)$ *и* $W_j^u(x_\omega)$ *двух различных седловых точек* x_α *и* x_ω, *не имеющие гетероклинических (в том числе гомоклинических) точек, и образующая достижимую границу* S *кривая* $L(x_\alpha, x_\omega)$, *вложенная в пересечение* $W_k^u(x_\alpha)$ *и* $W_l^s(x_\omega)$;

3) *в нее входят многообразия* $W_i^s(x)$ *и* $W_j^u(x)$ *седловой точки, не имеющие гетероклинических (в том числе гомоклинических) точек, и образующая достижимую границу* S *кривая* $L(x, x)$, *вложенная в пересечение* $W_k^u(x)$ *и* $W_l^s(x)$.

Типы компонент связности множества $\partial S \setminus [\{\alpha\} \cup \{\omega\}]$ изображены на рис. 1.

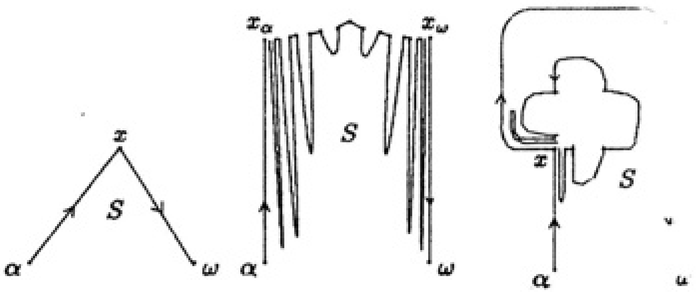

Рис. 1

Если f является диффеоморфизмом Морса – Смейла, то множества Q_i принадлежат только первому или второму указанному типу.

Классификация границ периодических компонент. Теорема 1 описывает строение каждого из множеств Q_i, $i \in \{1, 2\}$, в отдельности. Если мы рассмотрим границу S в целом, то может оказаться, что некоторые периодические точки и их подмногообразия входят сразу и в Q_1, и в Q_2. Поэтому для полного описания границ периодических компонент необходимо выяснить, какие периодические точки и их многообразия могут совпадать между собой.

В отличие от случая аксиомы А для структурно устойчивых диффеоморфизмов эта задача является вполне обозримой. Впервые она была поставлена в работе А. Базена [5], где подробно исследованы периодические компоненты диффеоморфизмов Морса – Смейла на ориентированных многообразиях и выписаны 15 типов регулярных инвариантных компонент, которыми исчерпывается этот случай.

Однако и в случае диффеоморфизмов Морса – Смейла за счет перехода к рассмотрению неориентируемых поверхностей возникают новые типы периодических компонент. Естественно, что и в общем случае, когда мы рассматриваем структурно устойчивые диффеоморфизмы, возникают новые типы, в том числе комбинации с возникающим третьим видом множеств Q_i.

Использовав теорему 1, приведем классификацию периодических компонент.

Для структурно устойчивых диффеоморфизмов имеются следующие типы периодических компонент с нульмерными аттрактором и репеллером:

когда Q_1 и Q_2 имеют тип 0D0:

1) без отождествлений;

2) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$;

3) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$;

4) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$ и $W_0^s(x_{1\alpha}) \equiv W_0^s(x_{2\alpha})$;

5) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ и $W_0^u(x_{1\omega}) \equiv W_0^u(x_{2\omega})$;

6) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$ и $W_\Gamma^u(x_{1\alpha}) \equiv W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$;

7) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ и $W_\Gamma^s(x_{1\omega}) \equiv W_\Gamma^s(x_{2\omega})$;

8) $x_{1\alpha} \equiv x_{1\omega}$;

9) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\omega}$;

10) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$;

11) $x_{1\alpha} \equiv x_{1\omega}$, $x_{2\alpha} \equiv x_{2\omega}$;

12) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\omega}$, $x_{2\alpha} \equiv x_{1\omega}$;

13) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ и $W_0^u(x_{1\omega}) \equiv W_0^u(x_{2\omega})$;

14) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ и $W_\Gamma^u(x_{1\alpha}) \equiv W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$;

15) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$ и $W_0^s(x_{1\alpha}) \equiv W_0^s(x_{2\alpha})$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$;

16) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$ и $W_0^s(x_{1\alpha}) \equiv W_0^s(x_{2\alpha})$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ и $W_0^u(x_{1\omega}) \equiv W_0^u(x_{2\omega})$;

17) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$ и $W_0^s(x_{1\alpha}) \equiv W_0^s(x_{2\alpha})$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ и $W_\Gamma^s(x_{1\omega}) \equiv W_\Gamma^s(x_{2\omega})$;

18) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$ и $W_\Gamma^u(x_{1\alpha}) \equiv W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$;

19) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$ и $W_\Gamma^u(x_{1\alpha}) \equiv W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ и $W_0^u(x_{1\omega}) \equiv W_0^u(x_{2\omega})$;

20) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$ и $W_\Gamma^u(x_{1\alpha}) \equiv W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ и $W_\Gamma^u(x_{1\omega}) \equiv W_\Gamma^u(x_{2\omega})$;

когда Q_1 имеет тип 00, а Q_2 — тип 0D0:

21) без отождествлений;

22) $x_{2\alpha} \equiv x_{2\omega}$;

23) $x_1 \equiv x_{2\alpha}$;

24) $x_1 \equiv x_{2\alpha}$ и $W_0^s(x_1) \equiv W_0^s(x_{2\alpha})$;

25) $x_1 \equiv x_{2\omega}$;

26) $x_1 \equiv x_{2\omega}$ и $W_0^u(x_1) \equiv W_0^u(x_{2\omega})$;

27) $x_1 \equiv x_{2\omega} \equiv x_{2\alpha}$;

когда Q_1 и Q_2 имеют тип 00:

28) без отождествлений;

29) $x_1 \equiv x_2$;

30) $x_1 \equiv x_2$, $W_0^s(x_1) \equiv W_0^s(x_2)$;

31) $x_1 \equiv x_2$, $W_0^u(x_1) \equiv W_0^u(x_2)$.

При этом все варианты, кроме 9, 12, 13, 23, 28, можно реализовать диффеоморфизмами Морса – Смейла, варианты 3, 10, 11, 14, 13, 15, 24, 30 реализуются только на неориентируемых поверхностях, причем вариант 11 требует для своей реализации неориентируемой поверхности рода 2 и выше. Остальные варианты реализуются на сфере.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим все возможные сочетания множеств Q_i, $i \in \{1, 2\}$, в границах периодических компонент, приводя к каждому случаю пример его реализации (они изображены на рис. 2, штриховая линия на рисунках обозначает склейку), либо доказывая, что этот случай невозможен.

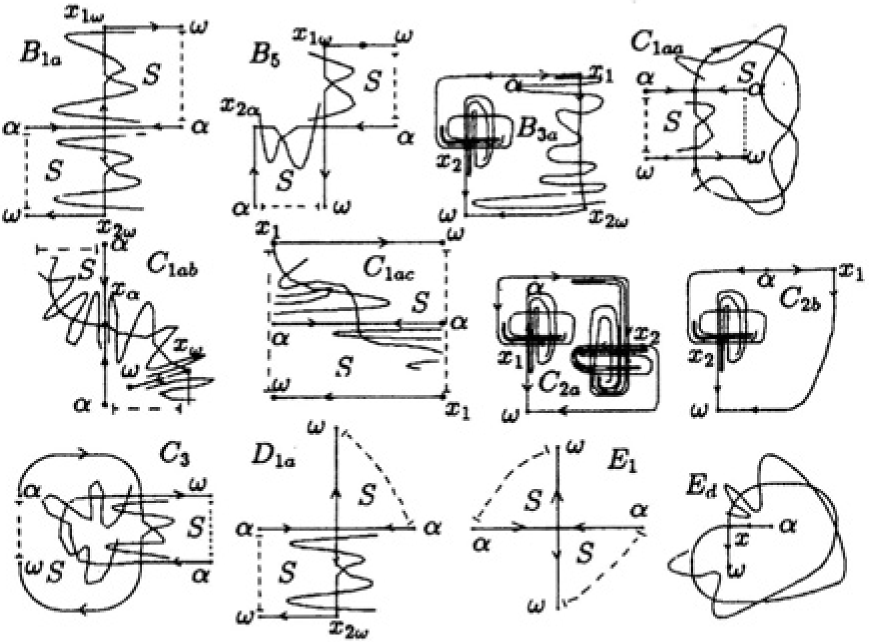

Рис. 2

Рассмотрим все возможные отождествления периодических точек в ∂S, обозначив их следующим образом:

A) все периодические точки различны;

B_1) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$;

B_2) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$;

B_3) $x_{1\alpha} \equiv x_{1\omega}$;

B_4) $x_{2\alpha} \equiv x_{2\omega}$;

B_5) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\omega}$;

B_6) $x_{2\alpha} \equiv x_{1\omega}$;

C_1) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$;

C_2) $x_{1\alpha} \equiv x_{1\omega}$, $x_{2\alpha} \equiv x_{2\omega}$;

C_3) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\omega}$, $x_{2\alpha} \equiv x_{1\omega}$;

D_1) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha} \equiv x_{1\omega}$;

D_2) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha} \equiv x_{2\omega}$;

D_3) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega} \equiv x_{1\alpha}$;

D_4) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega} \equiv x_{2\alpha}$;

E) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega} \equiv x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$.

Рассмотрим для каждого случая все возможные отождествления подмногообразий соответствующих отождествленных периодических точек. Заметим, что если лежащие в одном множестве Q_i точки $x_{1\alpha}$ и $x_{1\omega}$ различны, то Q_i имеет вид 0D0. В противном случае Q_i может иметь вид как 0D0, так и 00.

Тип А реализуется уже для диффеоморфизмов Морса – Смейла (пример в работе [5]). Рассмотрим случай B_1) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$. У них есть подмногообразия $W_0^s(x_{1\alpha})$ и $W_0^s(x_{2\alpha})$, $W_\Gamma^u(x_{1\alpha})$ и $W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$, которые могут как отождествиться, так и не отождествиться. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть все подмногообразия различны. Этот случай реализуется (см. рис. 2, отождествление B_{1a}), замыкание S содержит неориентируемую кривую, проходящую через x_α.

2. При $W_0^s(x_{1\alpha}) \equiv W_0^s(x_{2\alpha})$ получим пример из работы [5].

3. При $W_\Gamma^u(x_{1\alpha}) \equiv W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$ получим пример из работы [5].

4. Предположим, что $W_0^s(x_{1\alpha}) \equiv W_0^s(x_{2\alpha})$ и $W_\Gamma^u(x_{1\alpha}) \equiv W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$. Этот случай не реализуется, так как приводит к вырождению периодической точки.

Случай B_2) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ при замене f на f^{-1} переходит в случай B_1. Поэтому для него реализуемые типы периодических компонент можно получить из рис. 2 (отождествление B_{1a}) и соответствующих примеров из работы [5] к случаям 2 и 3, заменив в них устойчивые многообразия на неустойчивые, α на ω, $x_{\alpha i}$ на $x_{\omega i}$.

Рассмотрим случай B_3) $x_{1\alpha} \equiv x_{1\omega}$. Если Q_1 имеет вид 0D0, то у этих точек есть подмногообразия $W_0^s(x_{1\alpha})$ и $W_\Gamma^u(x_{1\alpha})$, $W_\Gamma^s(x_{1\omega})$ и $W_0^u(x_{1\omega})$, которые отождествляться не могут, так как в силу теоремы 1 все должны содержаться в Q_1. Если Q_1 имеет вид 00, то у них есть подмногообразия $W_0^s(x_{1\alpha})$ и $W_0^u(x_{1\omega})$, которые также не отождествимы. Первый случай изображен на рис. 2 (отождествление B_{3a}), второй — приведен в [5].

Случай B_4 в действительности представляет собой случай B_3 с иной нумерацией компонент Q_1 и Q_2.

Рассмотрим случай B_5) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\omega}$. Для него Q_1 и Q_2 имеют вид 0D0, у этих точек есть подмногообразия $W_0^s(x_{1\alpha})$ и $W_\Gamma^u(x_{1\alpha})$, $W_\Gamma^s(x_{2\omega})$ и $W_0^u(x_{1\omega})$, которые отождествляться не могут, так как W_Γ^σ имеет гетероклинические точки, а W_0^σ их не имеет. Его реализуемый тип изображен на рис. 2 (отождествление B_5).

Случай B_6 в действительности представляет собой случай B_5 с иной нумерацией компонент Q_1 и Q_2.

Случаи C_1, C_2 и C_3 имеют по два отождествления, и их можно рассматривать как суперпозицию двух случаев типа B, поскольку эти отождествления независимы друг от друга. Случай C_1) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$, $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega}$ получается наложением B_1 на B_2. Каждый из них независимо реализуется тремя допустимыми вариантами, что дает 9 допустимых вариантов для C_1. Их реализации частично приведены в [5], оставшиеся изображены на рис. 2 (отождествления C_{1aa}, C_{1ab} и C_{1ac}). Оставшиеся варианты можно получить из уже приведенных при замене f на f^{-1}.

Случай C_2) $x_{1\alpha} \equiv x_{1\omega}$, $x_{2\alpha} \equiv x_{2\omega}$ получается наложением B_3 на B_4. Каждый из них независимо реализуется двумя допустимыми вариантами, что дает 4 допустимых варианта, но при этом варианты B_3 на B_4 и B_4 на B_3 одинаковы с точностью до перенумерации, что дает 3 допустимых варианта для C_2 (см. пример из [5] и рис. 2 (отождествления C_{2b} и C_{2a})).

Случай C_3) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\omega}$, $x_{2\alpha} \equiv x_{1\omega}$ получается наложением B_5 на B_6, дающим единственный допустимый вариант для C_3 (см. рис. 2 (отождествление C_3)).

Рассмотрим случай D_1) $x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha} \equiv x_{1\omega}$. В этом случае Q_2 всегда имеет вид 0D0, Q_1 априори может иметь вид как 0D0, так и 00. Пусть Q_1 имеет вид 0D0. Тогда в Q_1 входят все подмногообразия $W_1^s(x_{1\alpha})$, $W_2^s(x_{1\alpha})$, $W_1^u(x_{1\alpha})$, $W_2^u(x_{1\alpha})$ точки $x_{1\alpha}$, поэтому при отождествлении с точкой $x_{2\alpha}$ нам нужно отождествить ее подмногообразие $W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$ с одним из подмногообразий $W_1^u(x_{1\alpha})$, $W_2^u(x_{1\alpha})$, что невозможно в силу строения Q_1. Таким образом, Q_1 имеет вид 00 и случай D_1 можно предсmавить как слияние точек x_1 с подмногообразиями $W_0^u(x_1)$ и $W_0^s(x_1)$ и $x_{2\alpha}$ с подмногообразиями $W_0^s(x_{2\alpha})$ и $W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$. Поскольку $W_0^u(x_1)$ не имеет гетероклинических точек (которые имеет $W_\Gamma^u(x_{2\alpha})$), то при этом могут сливаться только $W_0^s(x_1)$ с $W_0^s(x_{2\alpha})$, либо же эти подмногообразия останутся различными. Оба этих варианта реализуются (см. пример в [5] и рис. 2 (отождествление D_{1a})).

Заметим, что случай D_2 представляет собой тот же случай D_1, но с иной нумерацией, случай D_3 получается из D_1 при замене f на f^{-1}, D_4 является тем же D_3, но с иной нумерацией.

Рассмотрим случай E) $x_{1\omega} \equiv x_{2\omega} \equiv x_{1\alpha} \equiv x_{2\alpha}$. Обозначим эту единственную периодическую точку границы S через x. Одно из ее устойчивых подмногообразий входит в источник, а одно из неустойчивых — в сток. Строение компоненты определяется поведением двух оставшихся подмногообразий. Пусть они не содержат гетероклинических точек. Соответствующими случаями будут:

1) второе устойчивое подмногообразие входит в источник, а второе неустойчивое многообразие не входит в ∂S (см. рис. 2 (отождествление E_a));

2) второе неустойчивое подмногообразие входит в сток, а второе устойчивое многообразие не входит в ∂S, этот случай приведен в работе [5];

3) второе устойчивое подмногообразие входит в источник, а второе неустойчивое многообразие — в сток. Имеем случай из [5].

Если же они содержат гетероклинические точки, то пересекаются между собой (см. рис. 2 (отождествление E_d)).

Односвязные компоненты с одномерным аттрактором или репеллером. В этом случае строгое условие трансверсальности приводит к еще более строгим ограничениям, чем в случае нульмерных аттрактора и репеллера. Требуется, чтобы устойчивые и неустойчивые многообразия седловых периодических точек не только трансверсально пересекались между собой, но и были трансверсальны к устойчивому слоению S, порождаемому одномерным аттрактором (либо, соответственно, к неустойчивому слоению S, порождаемому одномерным репеллером). Это приводит к тому, что кривая вида L не реализуется. Этот факт доказывается аналогично лемме 2.

Каждое из множеств Q_i, $i \in \{1, 2\}$, состоит из седловой точки x_i и ее подмногообразий $W_k^u(x_i)$ и $W_l^s(x_i)$, не имеющих гетероклинических (в том числе гомоклинических) точек пересечения с многообразиями седловых базисных множеств. При этом $W_k^u(x_i)$ трансверсально к устойчивому слоению S дугами связок аттрактора ($W_l^s(x_i)$ трансверсально к неустойчивому слоению S дугами связок репеллера). Эти дуги соединяют $W_k^u(x_i)$ ($W_l^s(x_i)$) с соответствующим многообразием крайней точки базисного множества. Его строение изображено на рис. 3.

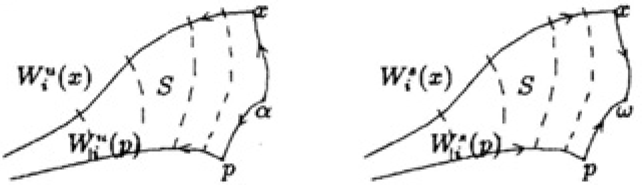

Рис. 3

Справедливо следующее следствие из леммы 3 работы [4].

Следствие 1. *Если f — структурно устойчивый диффеоморфизм и в достижимую границу периодической компоненты S входит точка x из многообразия $W^u(p)$ граничной точки p аттрактора Ω_i, то все $W^u(p)$ входит в достижимую границу S.*

Доказательство. В этом случае $W^s(p)$ не содержит нерегулярных точек, так как в противном случае неустойчивое многообразие такой точки, трансверсально пересекающее $W^s(p)$, согласно λ-лемме предотвратило бы появление достижимых точек на $W^u(p)$, и выполняются условия следствия 2 из предыдущей работы.

Теорема 2. *Часть достижимой границы S со стороны нетривиального аттрактора связна и имеет вид $\bigcup_{k=0}^{k=n-1} W^{\sigma}(p_k)$, где для каждых $W_i^{\sigma}(p_k)$ и $W_j^{\sigma}(p_{k+1})$ найдется соединяющая их дуга связки Θ, лежащая в S.*

Каждая из двух компонент связности дополнения границы S к аттрактору и репеллеру Q_i, $i \in \{1, 2\}$, состоит из седловой точки x_i и ее подмногообразий $W_k^u(x_i)$ и $W_l^s(x_i)$, не имеющих гетероклинических (в том числе гомоклинических) точек. При этом $W_k^u(x_i)$ трансверсально к устойчивому слоению S дугами связок аттрактора. Эти дуги соединяют $W_k^u(x_1)$ ($W_l^s(x_i)$) с $W_i^u(p_0)$ для Q_1 и $W_k^u(x_2)$ ($W_l^s(x_i)$) с $W_i^u(p_{n-1})$ для Q_2.

Если нетривиален репеллер, а не аттрактор, то в формулировке теоремы нужно заменить устойчивые многообразия на неустойчивые и наоборот.

Как и в предыдущем случае, теорема 2 описывает строение каждого из множеств Q_i, $i \in \{1, 2\}$, в отдельности. Опишем получающиеся варианты границы в этом случае.

Периодическая компонента с нетривиальным аттрактором принадлежит одному из следующих четырех типов:

1) $x_1 \not\equiv x_2$ — периодические точки различны;

2) $x_1 \equiv x_2$, $W^s(x_1) \equiv W^s(x_1)$, $W^u(x_1) \not\equiv W^u(x_1)$;

3) $x_1 \equiv x_2$, $W^s(x_1) \not\equiv W^s(x_1)$, $W^u(x_1) \equiv W^u(x_1)$;

4) $x_1 \equiv x_2$, $W^s(x_1) \not\equiv W^s(x_1)$, $W^u(x_1) \not\equiv W^u(x_1)$.

В самом деле, перечисленные типы периодических компонент вместе с типом

5) $x_1 \equiv x_2$, $W^s(x_1) \equiv W^s(x_1)$, $W^u(x_1) \equiv W^u(x_1)$,

приводящим к вырождению периодической точки, составляют набор всех возможных отождествлений в границе периодической компоненты. Их реализации приведены на рис. 4 — типы T_1, T_2, T_3 и T_4 соответственно (пунктирная линия в T_4 обозначает склейку).

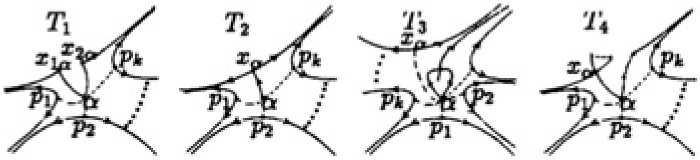

Рис. 4

Заметим, что тип 4 реализуется только на неориентируемых многообразиях.

Следствие 2. *Периодическая компонента с нетривиальным репеллером принадлежит одному из следующих четырех типов*:

1) $x_1 \not\equiv x_2$ — *периодические точки различны*;

2) $x_1 \equiv x_2$, $W^u(x_1) \equiv W^u(x_1)$, $W^s(x_1) \not\equiv W^s(x_1)$;

3) $x_1 \equiv x_2$, $W^u(x_1) \not\equiv W^u(x_1)$, $W^s(x_1) \equiv W^s(x_1)$;

4) $x_1 \equiv x_2$, $W^u(x_1) \not\equiv W^u(x_1)$, $W^s(x_1) \not\equiv W^s(x_1)$.

Двусвязные компоненты. Структурная устойчивость диффеоморфизма налагает ограничения и на двусвязные периодические компоненты. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2(о нетривиальных аттракторах и репеллерах). *Если f — структурно устойчивый диффеоморфизм, то хотя бы одно из множеств — аттрактор или репеллер, входящее в границу периодической компоненты S, будет нульмерным.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно полагать, что S инвариантна. Предположим, что утверждение леммы не выполнено и S содержится в пересечении устойчивого многообразия одномерного аттрактора Ω_a и неустойчивого одномерного репеллера Ω_r. Тогда каждая точка S лежит на пересечении устойчивого многообразия некоторой точки аттрактора и неустойчивого многообразия некоторой точки репеллера. Покажем, что при этом нарушается строгое условие трансверсальности.

Выберем точку $x \in S$ так, чтобы x лежала на пересечении некоторых дуг связок Q_x^u и Q_x^s. Поскольку $S \subset W^s(\Omega_a) \cap W^u(\Omega_r)$ и в каждом из этих многообразий множество точек, принадлежащих дугам связок, открыто и плотно на дополнении к базисному множеству, это всегда возможно. Покажем, что при этом Q_x^u и Q_x^s имеют не менее двух точек пересечения.

В самом деле, дуга связки Q_x^s является отрезком вида $[t_1, t_2]^s$ в устойчивом многообразии некоторой точки из Ω_a, обе граничные точки которого принадлежат Ω_a. При пересечении дуги связки Q_x^s в точке x дуга связки Q_x^u попадает в криволинейный четырехугольник, образованный дугами связок Q_x^s, $f(Q_x^s) = Q_{f(x)}^s$, а также отрезками $[t_2, f(t_2)]^u \subset \Omega_a$, $[t_1, f(t_1)]^u \subset \Omega_a$, лежащий в $W^s(\Omega_a)$. Q^u_x не может пересекать ни $[t_2, f(t_2)]^u$ и $[t_1, f(t_1)]^u$, поскольку они принадлежат аттрактору, ни $Q^s_{f(x)}$, так как в этом случае Q^u_x принадлежали бы точки x и $f(x)$ и Q^u_x было бы не дугой связки, а неустойчивым многообразием граничной точки. Не может Q^u_x и оставаться в этом четырехугольнике, поскольку она должна вернуться в аттрактор. Следовательно, Q^u_x снова пересечет Q^s_x.

Выберем гомотопный нулю простой контур, состоящий из двух дуг, лежащих в этих связках, и ограничивающий некоторый диск. Согласно строгому условию трансверсальности одна из этих дуг должна быть трансверсальна к слоению, в которое входит вторая дуга, что эквивалентно существованию на диске векторного поля без особенностей. Пришли к противоречию.

Используя лемму 2 и результаты работы [4], можно охарактеризовать двусвязные периодические компоненты в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Двусвязные периодические компоненты структурно устойчивых диффеоморфизмов имеют следующие типы*:

1. *Аттрактор и репеллер нульмерные. В этом случае периодическая компонента инвариантна, аттрактор и репеллер — неподвижные точки, их объединение дает все многообразие* $M = S^2$.

2. *Либо аттрактор, либо репеллер одномерен. В этом случае периодическая компонента совпадает с некоторой компонентой связности дополнения к одномерному аттрактору (репеллеру) в его устойчивом (неустойчивом) многообразии. Достижимая граница со стороны одномерного базисного множества представляет собой объединение устойчивых многообразий конечного числа граничных точек и является связкой. Ее замыкание представляет собой ту компоненту базисного множества, которая содержит эту связку. Вторая компонента границы представляет собой периодическую точку.*

1. *Birkhoff G., Smith P.* Structure analysis of surface tranformations // J. Math. – 1928. – **7**. – P. 357 – 369.
2. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 301 с.
3. *Плыкин Р. В.* О геометрии гиперболических аттракторов // Мат. заметки. – 1984. – **39**, № 6. – С. 75 – 113.
4. *Власенко И. Ю.* Топологические свойства периодических компонент A-диффеоморфизмов // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 8. – С. 1031–1041.
5. *Bezen A.* On the topological properties and the topological conjugacy of two-dimentional Morse – Smale diffeomorphisms // Random and Comput. Dynamic. – 1994. – **2**, № 2. – P. 183 – 203.

Получено 14.04.99,
после доработки — 26.07.99