УДК 517.9

О. В. Солонуха (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

We suggest a method of the construction of generalized solutions for some nondivergent partial differential systems by using multivalued analogs of a generalized statement of a problem based on the subdifferential calculus. We obtain new sufficient conditions for the existence of solutions of a variational inequality with a multivalued operator under weakened conditions on the coercitivity. We consider examples of weighted p-Laplacian in the Sobolev spaces $W_p^1(\Omega)$, $p \geq 2$.

Запропоновано метод побудови узагальнених розв'язків для деяких недивергентних систем із частинними похідними за допомогою множиннозначних аналогів узагальненої постановки проблеми, що використовує субдиференціальне числення. Отримано нові достатні умови існування розв'язків варіаційної нерівності із множиннозначним оператором при послаблених умовах на коерцитивність. Розглянуто приклади вагового p-лапласіана у соболєвських просторах $W_p^1(\Omega)$, $p \geq 2$.

Введение. Системами в частных производных описывается достаточно большой класс объектов. Однако достаточно часто встречаются случаи, когда классические методы исследования имеют ограничения, не связанные с природой явления. Метод обобщенных решений позволяет снять часть подобных ограничений и искать решения в классе менее гладких функций. При этом интегрирование по частям требует дифференцируемости другой части системы. В данной работе построены обобщенные решения при ослабленной дифференцируемости, а именно в случае существования субдифференциальных конусов, что существенно расширяет возможный класс объектов. В качестве модельного примера рассмотрен случай существования обобщенных градиентов по направлению [1]. Метод может быть использован при наличии другого типа субдифференциальных конусов. Подобная постановка задачи позволила применить методы многозначного анализа для исследования системы.

Отметим также, что особенностью исследуемой проблемы было отсутствие достаточного роста значений оператора при росте аргумента (другими словами — некоэрцитивность). Это потребовало дополнительного исследования возможности существования решения. Проблема некоэрцитивности последние годы становится все более актуальной (см., например, [2] и приведенную в ней библиографию). Уже сейчас можно различить несколько типов некоэрцитивности. Отличие данной работы состоит в том, что, во-первых, оператор может не иметь никакого роста на части пространства: достаточно, чтобы значения не стремились к $-\infty$. Для компенсации данного типа некоэрцитивности использован метод регуляризации (более подробно см. [3, 4]). Во-вторых, обобщенная постановка задачи существенно многозначна. При этом мы не требуем ни достаточной степени роста на бесконечности всех представителей значений оператора [5 – 7], ни выделения некоторого селектора многозначного оператора, имеющего свойство (частичной) коэрцитивности; выделение селектора обычно налагает дополнительные ограничения.

Статья состоит из трех пунктов. В п. 1 приведены новые достаточные условия существования решения вариационного неравенства с многозначным некоэрцитивным оператором. Пункт 2 содержит собственно метод построения вариационного неравенства с многозначным оператором, соответствующего исходной задаче. В п. 3 приведен пример исследования для весового p-лапласиана.

1. Разрешимость вариационных неравенств с частично „+"-коэрцитивными операторами. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, X^* — сопряженное к нему, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — каноническая двойственность на $X \times X^*$, $\mathrm{Conv}(X^*)$ — совокупность выпуклых замкнутых множеств пространства X^*, $A: X \to \mathrm{Conv}(X^*)$ — выпукло-замкнутозначное отображение с областью определения $\mathrm{Dom}(A) = \{y \in X : A(y) \neq 0\} = X$; через $\mathrm{graph}(A) = \{(y,w) \in \mathrm{Dom}(A) \times \times X^* : w \in A(y)\}$ обозначен график оператора. Определим верхние и нижние опорные функции оператора A:

$$[A(y),\xi]_+ = \sup_{d \in A(y)} \langle d, \xi\rangle, \qquad [A(y),\xi]_- = \inf_{d \in A(y)} \langle d, \xi\rangle,$$

а также верхнюю норму на $\mathrm{Conv}(X^*)$:

$$\|A(y)\|_+ = \sup_{d \in A(y)} \|d\|_{X^*}.$$

Замечание. Поскольку опорные функции определяют множество-значение оператора с точностью до выпуклого замыкания множества [6], то при рассмотрении слабых решений достаточно рассматривать выпукло-замкнутозначные отображения, что упрощает формулы. Однако теория верна и при отсутствии данного свойства.

Рассмотрим вариационное неравенство

$$[A(y), \xi - y]_+ \geq \langle f, \xi - y\rangle \qquad \forall \xi \in K, \tag{1}$$

где $K \subset X$ — выпуклое замкнутое множество.

Напомним определения основных свойств рассматриваемых объектов.

Определение 1. *Оператор* $\mathrm{Dom}(A) \subset X \to \mathrm{Conv}(X^*)$ *называется:*

обобщенно псевдомонотонным, если для произвольной последовательности пар $\{(y_n, w_n)\} \subset \mathrm{graph}(A)$ *из того, что* $y_n \to y$ *слабо в* X, $w_n \to w$ *слабо в* X^* *и* $\limsup_{n\to\infty} \langle w_n, y_n - y\rangle \leq 0$, *следует, что* $w \in A(y)$ *и* $\langle w_n, y_n\rangle \to \langle w, y\rangle$;

c-слабо локально ограниченным, если для любой последовательности $\mathrm{Dom}(A) \ni y_n \to y$, *слабо сходящейся в* X, *существует подпоследовательность* $\{y_{n_k}\}$ *и константа* $N > 0$ *такие, что* $\|A(y_{n_k})\|_+ \leq N$;

„+"-коэрцитивным на $K \subset X$, *если существует* $y_0 \in K$ *такой, что* $\|y\|_X^{-1} \times \times [A(y), y - y_0]_+ \to \infty$ *при* $\|y\|_X \to \infty$;

частично „+"-коэрцитивным на $K \subset X$, *если существуют нормированное пространство* Y, *элемент* $y_0 \in K$ *и константа* $p > 1$ *такие, что*:

1) $X \subset Y$ *плотно,* $\|y\|_Y \leq \|y\|_X$ *для каждого* $y \in X$;

2) $\|y\|_X^{-1}([A(y), y - y_0]_+ + c\|y - y_0\|_Y^p) \to \infty$ *при* $\|y\|_X \to \infty$, *т. е. существует* $r > 0$, *для которого* $[A(y), y - y_0]_+ + c\|y - y_0\|_Y^p \geq 2\|y\|_X^p$ *при* $\|y\|_X \geq r$.

Определение 2. *Оператор* $G: X \to X^*$ *называется:*

деминепрерывным, если каждой сильносходящейся последовательности ставит в соответствие слабо сходящуюся последовательность;

монотонным, если $\langle G(y_1) - G(y_2), y_1 - y_2\rangle \geq 0$ *для произвольных* y_1, y_2 *из области определения;*

максимально монотонным, если он монотонен и его график не содержится в графике другого монотонного отображения.

Известно, что монотонное, деминепрерывное отображение является c-слабо локально ограниченным и обобщенно псевдомонотонным [6, 7].

Теорема 1. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $A : X \to \operatorname{Conv}(X^*)$ — частично „+"-коэрцитивный на выпуклом замкнутом множестве $K \subset X$, c-слабо локально ограниченный, обобщенно псевдомонотонный оператор. Тогда вариационное неравенство* (1) *разрешимо.*

Доказательство. Построим возмущающий оператор $G = cJ_Y : Y \to Y^*$ с помощью оператора двойственности

$$J_Y(y) = \left\{ w \in Y^* : \langle w, y \rangle_Y = \| y \|_Y^p \right\}.$$

Поскольку X и Y являются рефлексивными банаховыми пространствами и вложение $X \subset Y$ непрерывно и плотно, то оператор G деминепрерывен и максимально монотонен [8, 9]. Следовательно, $\mathcal{A} = A + G$ сохраняет свойства оператора A [3, 6, 7]. В частности, оператор $\mathcal{A}$ является c-слабо локально ограниченным и обобщенно псевдомонотонным [7]. Кроме того, $\mathcal{A}$ „+"-коэрцитивен на K. Следовательно, возмущенная задача

$$[\mathcal{A}(y), \xi - y]_+ = [(A+G)(y), \xi - y]_+ \geq \langle \hat{f}, \xi - y \rangle \qquad \forall \xi \in K \tag{2}$$

разрешима для произвольного $\hat{f} \in X^*$ (см. теорему 2 [10]).

Пусть $f \in Y^*$ и рассмотрим шар $B_R \subset Y^*$ $\left(B_R = \{ u \in Y^* : \| u \|_{Y^*} \leq R \}\right)$. Пусть $\hat{f} = f + u$, где $u \in B_R$. Отображение $\tilde{\mathcal{A}}(y) = \mathcal{A}(y) - 2B_R - f$ является c-слабо локально ограниченным, обобщенно псевдомонотонным и „+"-коэрцитивным на K. Из „+"-коэрцитивности следует существование шара $B_{R'} \subset X$ $\left(B_{R'} = \{ \zeta \in X : \| \zeta \|_X \leq R' \}\right)$ такого, что

$$[\tilde{\mathcal{A}}(\xi) + \partial I_K(\xi), \xi - y_0]_+ \geq 0 \qquad \forall \xi \in \partial(K \cap B_{R'}),$$

где $\partial I_K(\xi) = \left\{ w \in X^* : \langle w, \zeta \rangle \leq 0 \;\; \forall \zeta \in \bigcup_{h>0} h^{-1}(K - \xi) \right\}$ — нормальный конус ко множеству K в точке ξ, $\partial(K \cap B_{R'})$ — граница $K \cap B_{R'}$. Радиус R' выбирается из условия $R^q \leq cR'^p$ $(q^{-1} + p^{-1} = 1)$ для выбранного R. Из определения частичной „+"-коэрцитивности следует, что подобная пара (R, R') всегда существует (поскольку f фиксированный и $p > 1$). Например, если $f = 0$, то можно рассмотреть $R' = r$, $R^q = cR'^p$, r взято из определения частичной коэрцитивности. Таким образом, для каждого $u \in B_R$ имеет решение следующее включение, тождественное неравенству (2) (см. теорему 1 [10]):

$$\mathcal{A}(y) - u - f + \partial I_K(y) \ni 0, \qquad y \in K_{R'} = K \cap B_{R'}. \tag{3}$$

Теперь можно рассматривать локализованную задачу

$$[A(y), \xi - y]_+ \geq \langle f, \xi - y \rangle \qquad \forall \xi \in K_{R'}. \tag{4}$$

Данное вариационное неравенство разрешимо [7, 3]. Обозначим через y^* некоторое решение (4). Положим $u^* = G(y^*)$. Тогда $\| u^* \|_{Y^*} \leq R$, $u^* \in B_R$. Пусть $\{u_n\}$ — произвольная сходящаяся последовательность из B_R: $u_n \to u^*$ в Y^*; $\{y_n\} \subset K_{R'}$ — решения (3), соответствующие $\{u_n\}$. Тогда существуют элементы $w_n \in \mathcal{A}(y_n)$ такие, что

$$\langle w_n, \xi - y_n \rangle \geq \langle f + u_n, \xi - y_n \rangle \qquad \forall \xi \in K_{R'}.$$

Поскольку множество $\{y_n\}$ ограничено, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. В силу c-слабой локальной ограниченности оператора $\mathcal{A}$ множество $\{w_n\}$ ограничено (или перейдем к ограниченной подпоследовательности), т. е. можно выделить слабо сходящиеся подпоследовательности $y_m \to y \in K_{R'}$ в X и $w_m \to w$ в X^*, для которых

$$\limsup_{m\to\infty} \langle w_m, y_m - y \rangle \leq \limsup_{m\to\infty} \langle f + u_m, y_m - y \rangle = 0.$$

И поскольку оператор $\mathcal{A}$ обобщенно псевдомонотонен, то $w \in \mathcal{A}(y)$ и $\langle w_n, y_n \rangle \to \langle w, y \rangle$. Следовательно,

$$[\mathcal{A}(y), \xi - y]_+ \geq \langle w, \xi - y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle w_n, \xi - y_n \rangle \geq \lim_{n\to\infty} \langle f + u_n, \xi - y_n \rangle = \langle f + u^*, \xi - y \rangle \quad \forall \xi \in X.$$

С другой стороны, $\langle G(y_n), y_n - y \rangle = [\mathcal{A}(y_n), y_n - y]_- - [\mathcal{A}(y_n), y_n - y]_-$.

Предположим, что

$$\limsup_{n\to\infty} \langle G(y_n), y_n - y \rangle > 0.$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} [A(y_n), y_n - y]_- = \lim_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - y \rangle < 0,$$

где $d_m \in A(y_m)$, $\{y_m\} \subset \{y_n\}$. Но оператор A обобщенно псевдомонотонен и c-слабо локально ограничен. Следовательно, не умаляя общности, можно рассматривать слабые пределы $y_m \to y \in K_{R'}$ в X и $d_m \to d$ в X^*, для которых $d \in A(y)$ и $\langle d_m, y_m \rangle \to \langle d, y \rangle$, т. е.

$$\limsup_{n\to\infty} [A(y_n), y_n - y]_- = 0$$

и принятое предположение не верно:

$$\limsup_{n\to\infty} \langle G(y_n), y_n - y \rangle = 0.$$

Монотонный деминепрерывный оператор является обобщенно псевдомонотонным и c-слабо локально ограниченным [7], и аналогично предыдущему получаем $u^* = G(y)$. Но $G: Y \to Y^*$ — биекция. Следовательно, $y \equiv y^*$. Таким образом, произвольное решение вариационного неравенства (4) с $R^q \leq c(R')^p$ является решением вариационного неравенства (1).

2. Слабое решение недивергентной задачи. Пусть $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ — открытое ограниченное подмножество с регулярной (локально липшицевой) границей $\partial\Omega$, ν — нормаль к границе $\partial\Omega$, $Dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right)$. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-\sum_{1\leq i\leq n} a_i(x, y)\partial_{x_i} b_i(x, y, Dy) = f \quad \text{п. в. на } \Omega, \tag{5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{1\leq i\leq n} a_i(x, y) b_i(x, y, Dy) \cos(x_i, \nu),$$

$$y \geq 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geq 0, \quad y\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{п. в. на } \partial\Omega. \tag{6}$$

Пусть функции a_i, b_i удовлетворяют следующим правилам:

a) a_i, b_i — функции типа Каратеодори, т. е. $a_i(\cdot, y)$, $b_i(\cdot, y, \xi)$ измеримы для всех $y \in \boldsymbol{R}^1$, $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ и $a_i(x, \cdot)$, $b_i(x, \cdot, \cdot)$ непрерывны для почти всех $x \in \Omega$;

b) для почти всех $x \in \Omega$ и для всех $y \in \boldsymbol{R}^1$, $\xi \in \boldsymbol{R}^n$,

$$|a_i(x,y)| \leq \alpha_i^{1a}(x) + \alpha_i^{2a}(x)|y| \quad \text{или} \quad |a_i(x,y)| \leq \alpha_i^{1a}(x) + C^a|y|^{p-1-r_2},$$

$$|b_i(x,\xi_0,\xi)| \leq \alpha_i^{1b}(x) + \sum_{0 \leq j \leq n} \alpha_{ij}^{2b}(x)|\xi_j|$$

или

$$|b_i(x,\xi_0,\xi)| \leq \alpha_i^{1b}(x) + \sum_{0 \leq j \leq n} C_{ij}^b |\xi_j|^{p-1-r_1},$$

где

$$\alpha_i^{1a} \in L_{r_1}(\Omega), \quad \alpha_i^{2a} \in L_{r_1'}(\Omega), \quad \alpha_i^{1b} \in L_{r_2}(\Omega), \quad \alpha_{ij}^{2b} \in L_{r_2'}(\Omega), \quad (r_1 + r_2)^{-1} + p^{-1} = 1,$$

$$(r_1' + r_2')^{-1} + 3p^{-1} = 1, \quad C^a > 0, \quad C_{ij}^b > 0;$$

c) если в точке $x \in \Omega$ существуют частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y)$, то

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y)\right| \leq \beta_i^1(x) + \beta_i^2(x)|y| \quad \text{или} \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,y)\right| \leq \beta_i^1(x) + C'|y|^{p-2-r_2},$$

где $\beta_i^1 \in L_{r_1}(\Omega)$, $\beta_i^2 \in L_{r_1'}(\Omega)$, $C' > 0$;

d) $a_i(\cdot, y)$ и $a_i(x, \cdot)$ локально липшицевы, в частности

$$|a_i(x,y) - a_i(x,z)| \leq K_i(x,y)|y - z| \tag{7}$$

для любого y и всех z из ε-окрестности y, константа Липшица $K_i(\cdot, y) \in$ $\in L_{r_1}(\Omega)$;

e) $a_i(x, y) \geq \bar{a}_i > 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и для всех $y \in \boldsymbol{R}^1$, и $a_i(x, y)$ близки к линейно однородной при малых отклонениях, т. е.

$$\exists \lambda_0 \colon a_i(x, (1+\lambda)y) \geq (1+\lambda)a_i(x,y) \quad \text{при} \quad \lambda \in (0; \lambda_0);$$

f) $\sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x, y, \xi_1, \ldots, \xi_n)\xi_i \geq \bar{b} \sum_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|^p, \quad \bar{b} > 0;$

g) если в точке $x \in \Omega$ существуют частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y)$, то

$$\left| y \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y)\right| \leq a_i(x, y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|$$

для достаточно больших y (например, $a_i(x, y) = |y|$ при $|y| > R_1 >> 1$).

Обозначим верхние выпуклые аппроксимации (подробнее см. [11]) следующим образом:

$$\hat{a}_{iy}^{0}(x, y; h) = \limsup_{\zeta \to y, \lambda \to +0} \frac{a_i(x, \zeta + \lambda h) - a_i(x, \zeta)}{\lambda},$$

$$\hat{a}_{ij}^{0}(x, y; \delta x_j) = \limsup_{z_j \to x_j, \lambda \to +0} \frac{a_i(z + \lambda \delta x_j, y) - a_i(z, y)}{\lambda},$$

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $z_i = x_i$ при $i \neq j$, δx_j обозначает вектор с единственной ненулевой координатой в j-й позиции. Тогда соответствующие частные обобщенные градиенты имеют вид

$$\partial_y a_i(x, y) = \left\{ w \,\middle|\, wh \leq \hat{a}_{iy}^{0}(x, y; h) \right\},$$

$$\partial_{x_i} a_i(x, y) = \left\{ w \,\middle|\, w\delta x_i \leq \hat{a}_{ii}^{0}(x, y; \delta x_i) \right\}.$$

Функции $a_i(\cdot, y)\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ дифференцируемы почти всюду вследствие условия d) и теоремы Радемахера [12]. Пусть на множестве $\Gamma_{iy}^{x} \subset \Omega$ функции $a_i(\cdot, y)$ не дифференцируемы. Тогда обобщенный градиент

$$\partial_{x_j} a_i(x,y) = \overline{\text{co}} \left\{ \lim_{x_j^m \to x_j} \nabla a_i(x^m, y)\colon x^m \to x,\ x^m \notin S \cup \Gamma_{iy}^{x_j} \right\},$$

где $S \subset \Omega$, является фиксированным множеством, лебегова мера которого равна нулю (теорема 2.5.1 [1]), $x_k^m = x_k$ для всех $k \neq j$, и в силу свойства c) $\partial_{x_j} a_i(x, y) \subset L_{r_1}(\Omega)$.

Для доказательства интегрируемости $\partial_y a_i(x, y)$ используем свойства обобщенного градиента по направлению. Функция $h \mapsto \hat{a}_{iy}^{0}(x, y; h)$ является конечной и удовлетворяет неравенству

$$\left| \hat{a}_{iy}^{0}(x, \xi; h) \right| \leq K_i(x,y)|h| \quad \forall \xi \in B_\varepsilon(y), \tag{8}$$

где K_i взято из оценки (7). Поскольку обобщенная производная является интегрируемой, то соответствующий обобщенный градиент также интегрируем:

$$\partial_y a_i(x, y) = \left\{ w \in L_{r_1}(\Omega)\colon w(x)h(x) \leq \limsup_{\zeta \to y \lambda \to +0} \frac{a_i(x, \zeta + \lambda h) - a_i(x, \zeta)}{\lambda} \ \ \forall h \in L_p(\Omega) \right\}.$$

В соответствии с исчислением обобщенных градиентов

$$\partial_{x_i}\big(a_i(x, y) b_i(x, y, Dy)\big) \subset a_i(x, y) \partial_{x_i} b_i(x, y, Dy) +$$

$$+ \partial_{x_i} a_i(x, y) b_i(x, y, Dy) + \partial_y a_i(x, y) \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y, Dy).$$

Левая часть интегрируема в силу условий a), b), т. е. данная производная может быть рассмотрена как обобщенная. Кроме того, как доказано выше, второе и третье слагаемые правой части также интегрируемы. И поскольку для дифференцируемых функций обобщенные градиенты совпадают с обычными производными, то равенству (5) соответствует следующее включение:

$$f \in \sum_{1 \leq i \leq n} \left(-\frac{\partial}{\partial x_i} \big(a_i(x, y) b_i(x, y, Dy)\big) + \right.$$

$$\left. + \partial_{x_i} a_i(x, y) b_i(x, y, Dy) + \partial_y a_i(x, y) \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y, Dy) \right). \tag{9}$$

Аналогично однозначному случаю [8] можно показать, что система (9), (6) эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$[A(y), \xi - y]_+ = \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega a_i(x, y) b_i(x, y, Dy) \frac{\partial(\xi - y)}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \hat{a}^0_{iy}(x, y; \xi - y) \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y, Dy) dx + \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega b_i(x, y, Dy)(\xi - y) \hat{a}^0_{ii}(x, y; dx) \ge$$

$$\ge \int_\Omega f(\xi - y) dx \quad \forall \xi \in W_p^{+,1}(\Omega), \tag{10}$$

где $W_p^{+,1}(\Omega) = \{z \in W_p^1(\Omega): z|_{\partial\Omega} \ge 0\}$.

Мы получили слабую формулировку задачи с использованием опорных функций соответствующих обобщенных градиентов.

Определение 3. *Назовем* $y \in W_p^{+,1}(\Omega)$ *слабым решением задачи* (5), (6), *если* y *удовлетворяет вариационному неравенству* (10).

Теорема 2. *Пусть функции* a_i *и* b_i *удовлетворяют условиям* a) – g). *Тогда граничная задача* (5), (6) *имеет хотя бы одно слабое решение для каждого* $f \in W_q^{-1}(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Доказательство. Выделим два оператора, составляющие оператор $A = A_1 + A_2$:

$$\langle A_1(y), \xi \rangle = \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega a_i(x, y) b_i(x, y, Dy) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx,$$

$$[A_2(y), \xi]_+ = \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \hat{a}^0_{iy}(x, y; \xi) \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y, Dy) dx +$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega b_i(x, y, Dy) \xi \hat{a}^0_{ii}(x, y; dx) =$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \sup_{\omega_{iy} \in \partial_y a_i(x,y)} \int_\Omega \omega_{iy} \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y, Dy) \xi \, dx +$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \sup_{\omega_i \in \partial_{x_i} a_i(x,y)} \int_\Omega \omega_i b_i(x, y, Dy) \xi \, dx.$$

Проверим свойства оператора A_1. Пусть $y_k \to y$ слабо в $W_p^1(\Omega)$ и

$$\limsup_{k\to\infty} \langle A_1(y_k), y_k - y \rangle \le 0.$$

Тогда $y_k \to y$ в $L_p(\Omega)$ и в силу непрерывности почти всюду функций $a_i(x, \cdot)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i(x, y_k) b_i(x, y_k, Dy_k) \frac{\partial(y_k - y)}{\partial x_i} dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n \int_\Omega (a_i(x, y_k) - a_i(x, y)) b_i(x, y_k, Dy_k) \frac{\partial(y_k - y)}{\partial x_i} dx = 0$$

($a_i(\cdot, y_k) \to a_i(\cdot, y)$ сильно в $L_{r_1}(\Omega)$, $b_i(\cdot, y_k, Dy_k)$ принадлежит ограниченному множеству из $L_{r_1}(\Omega)$, $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ слабо в $L_p(\Omega)$).

Рассмотрим оператор A. Пусть $y_k \to y$ слабо в $W_p^1(\Omega)$, $w_k \in A(y_k)$, $w_k \to w$ слабо в $W_q^{-1}(\Omega)$ $(1/p + 1/q = 1)$ и

$$\limsup_{k\to\infty} \langle w_k, y_k - y \rangle \le 0. \tag{11}$$

Тогда $y_k \to y$ в $L_p(\Omega)$ и в силу интегрируемости функций $\partial_{x_i} a_i(\cdot, y)$ и $b_i(\cdot, y, Dy)$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{d_{ik} \in \partial_{x_i} a_i(x, y_k)} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} d_{ik} b_i(x, y_k, Dy_k)(y_k - y)\,dx = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{d_{ik} \in \partial_{x_i} a_i(x, y_k)} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} d_{ik} b_i(x, y_k, Dy_k)(y_k - y)\,dx = 0.$$

Кроме того, в силу оценки (8)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \hat{a}_{iy}^{0}(x, y_k; y_k - y) b_i(x, y_k, Dy_k) \frac{\partial (y_k - y)}{\partial x_i}\,dx \ge$$

$$\ge -\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} K(x, y) |y_k - y| b_i(x, y_k, Dy_k) \frac{\partial (y_k - y)}{\partial x_i}\,dx = 0.$$

Таким образом, из оценки (11) следует

$$\limsup_{k\to\infty} \langle A_1(y_k), y_k - y \rangle \le 0.$$

Тогда

$$\limsup_{k\to\infty} \langle w_k, \xi - y_k \rangle = \limsup_{k\to\infty} \langle w_k, \xi - y \rangle \le [A(y_k), \xi - y]_+ =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \Bigg(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, y_k) b_i(x, y_k, Dy_k) \frac{\partial (\xi - y)}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \int_{\Omega} \hat{a}_{iy}^{0}(x, y_k; \xi - y) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} b_i(x, y_k, Dy_k)\,dx +$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \int_{\Omega} b_i(x, y_k, Dy_k)(\xi - y) \hat{a}_{ii}^{0}(x, y_k; dx) \Bigg).$$

Первое слагаемое сходится к $\langle A_1(y), \xi - y \rangle$ в силу непрерывности функций a_i, b_i. Для оценки второго слагаемого, учитывая ограниченность в совокупности подынтегральных функций, вносим предел под знак интеграла. И поскольку обобщенная производная полунепрерывна сверху $(\limsup \hat{a}_{iy}^{0}(x, y_k; \xi - y) \le$ $\le \hat{a}_{iy}^{0}(x, y; \xi - y))$, то

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \hat{a}_{iy}^0(x, y_k; \xi - y)\frac{\partial y_k}{\partial x_i} b_i(x, y_k, Dy_k)dx \le$$

$$\le \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \hat{a}_{iy}^0(x, y; \xi - y)\frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y, Dy)dx.$$

Поскольку для каждого y_k функции $a_i(\cdot, y_k)$ дифференцируемы почти всюду, то вместо третьего слагаемого рассмотрим интеграл по множеству $\Omega_N = \Omega \setminus \left\{ \bigcup_{k\ge N} \Gamma_{iy_k}^x \cup S \right\}$, где $\Gamma_{iy_k}^x$ — множество, на котором $a_i(\cdot, y_k)$ не имеет производной. В силу оценки c) и непрерывности функций $a_i(x, \cdot)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\cdot, y_k) \to \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\cdot, y)$$

слабо в $L_p(\Omega)$, т. е.

$$\sum_{1\le i\le n} \int_\Omega b_i(x, y_k, Dy_k)(\xi - y)\hat{a}_{ii}^0(x, y_k; dx) =$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \int_{\Omega_N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y_k) b_i(x, y_k, Dy_k)(\xi - y)dx \to$$

$$\to \sum_{1\le i\le n} \int_{\Omega_N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y) b_i(x, y, Dy)(\xi - y)dx =$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega b_i(x, y, Dy)(\xi - y)\hat{a}_{ii}^0(x, y; dx).$$

Следовательно,

$$\limsup_{k\to\infty} \langle w_k, \xi - y_k \rangle \le \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega b_i(x, y, Dy)(\xi - y)\hat{a}_{ii}^0(x, y; dx) +$$

$$+ \langle A_1(y), \xi - y \rangle + \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \hat{a}_{iy}^0(x, y; \xi - y)\frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y, Dy)dx =$$

$$= [A(y), \xi - y]_+ \qquad \forall \xi \in W_p^1(\Omega),$$

оператор A является псевдомонотонным.

Оценим ограниченность оператора. Пусть $y_k \to y$ слабо в $W_p^1(\Omega)$. Тогда

$$\|A(y_k)\|_+ = \sup_{\xi \in B_1 \subset W_p^1(\Omega)} [A(y_k), \xi]_+ \le$$

$$\le \sup_{\xi \in B_1 \subset W_p^1(\Omega)} \left| \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega a_i(x, y_k) b_i(x, y_k, Dy_k)\frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx + \right.$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \hat{a}_{iy}^0(x, y_k; \xi)\frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y_k, Dy_k)dx +$$

$$\left. + \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega b_i(x, y_k, Dy_k)\xi \hat{a}_{ii}^0(x, y_k; dx) \right| \le$$

$$\leq \sup_{\xi \in B_1} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \int_\Omega \left| a_i(x, y_k) b_i(x, y_k, Dy_k) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right| dx + \right.$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq n} \int_\Omega K_i(x, y) \left| \xi \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y_k, Dy_k) \right| dx +$$

$$\left. + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_N} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y_k) b_i(x, y_k, Dy_k) \xi \right| dx \right) \leq M,$$

где $K_i(\cdot, y) \in L_{r_1}(\Omega)$ — константа Липшица (см. условие d)), замена выполнена в соответствии с оценкой (8). Первое слагаемое ограничено в совокупности в силу свойства b), второе — в силу свойств b) и d), третье — в силу свойств b) и c). Таким образом, A c-слабо локально ограничен.

Осталось доказать „+"-коэрцитивность. Из условий g) и e) очевидно, что $[A_2(y), y]_+ \geq 0$:

$$[A_2(y), y]_+ \geq \sum_{1 \leq i \leq n} \int_\Omega \hat{a}_{iy}^0(x, y; y) \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i(x, y, Dy) dx -$$

$$- \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_N} b_i(x, y, Dy) \left| y \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y) \right| dx \geq 0.$$

Учитывая условие f), получаем, что A_1 частично „+"-коэрцитивен:

$$\langle A_1(y), y \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_\Omega a_i(x, y) b_i(x, y, Dy) \frac{\partial y}{\partial x_i} dx \geq \bar{b} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_\Omega \bar{a}_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^p dx.$$

Оператор $A(\cdot) - f : W_p^1(\Omega) \to W_q^{-1}(\Omega)$ является обобщенно псевдомонотонным, c-слабо локально ограниченным и частично „+"-коэрцитивным. Согласно теореме 1 вариационное неравенство (10) разрешимо. Теорема 2 доказана.

3. Примеры. Рассмотрим задачу с весовым p-лапласианом, $p \geq 2$, в липшицевой области Ω:

$$- \sum_{1 \leq i \leq n} a_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{п. в. на } \Omega, \tag{12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial}{\partial x_i} \cos(x_i, \nu),$$

$$y \geq 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} \geq 0, \quad y \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{п. в. на } \partial\Omega, \tag{13}$$

где $f \in L_q(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Заметим, что $f \in L_{q'}(\Omega)$ для произвольного q' $((q^{-1})' + (p^{-1})' = 1,\ p' > p)$, поскольку $q' < q$ и область Ω липшицева [13].

Поскольку теперь мы рассматриваем фиксированные функции b_i, то уточним условия b) – d); остальные свойства функций a_i остаются теми же, что и в предыдущем пункте.

***Пример* 1.** Пусть

b$'$) для почти всех $x \in \Omega$ и для всех $y \in \boldsymbol{R}$

$$|a_i(x,y)| \leq \alpha_i^{1a}(x) + C|y|,$$

где $\alpha_i^{1a}(x) \in L_{p+1}(\Omega)$, $C > 0$ или выполняется более сильное условие: $a_i(\cdot, y) \in L_\infty(\Omega)$ для всех y;

c′) если в точке $x \in \Omega$ существуют частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y)$, то

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y) \right| \le \beta_i^1(x) + C' |y|,$$

где $\beta_i^1 \in L_{p+1}(\Omega)$, $C' > 0$;

d′) $a_i(\cdot, y)$ локально липшицевы, в частности

$$|a_i(x, y) - a_i(x, z)| \le K_i(x, y) |y - z| \tag{14}$$

для всех z из ε-окрестности y и почти всех $x \in \Omega$, константа Липшица $K_i(\cdot, y) \in L_\infty(\Omega)$ для любого ограниченного y.

Тогда аналогично предыдущему случаю (12) соответствует включение

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \in \sum_{1 \le i \le n} \partial_y a_i(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p} +$$

$$+ \sum_{1 \le i \le n} \partial_{x_i} a_i(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} + f(x),$$

т. е. можно искать решение (12), (13) как решение следующего вариационного неравенства:

$$\sum_{1 \le i \le n} \int_\Omega \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} (\xi - y) \hat{a}_{ii}^0(x, y; dx) +$$

$$+ \sum_{1 \le i \le n} \int_\Omega a_i(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial (\xi - y)}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \sum_{1 \le i \le n} \int_\Omega \hat{a}_{iy}^0(x, y, \xi - y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p} dx \ge$$

$$\ge \int_\Omega f(x)(\xi - y)\, dx \qquad \forall \xi \in W_{p+1}^{+,1}(\Omega) = \left\{ y \in W_{p+1}^1(\Omega) : y\big|_{\partial\Omega} \ge 0 \right\}. \tag{15}$$

Последняя формула эквивалентна включению

$$-f \in A_1(y) + A_2(y) + N_{W_{p+1}^{+,1}(\Omega)}(y),$$

где

$$\langle A_1(y), \xi \rangle = \sum_{1 \le i \le n} \int_\Omega a_i(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx,$$

$$A_2(y) = \sum_{1 \le i \le n} \partial_y a_i(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p} + \sum_{1 \le i \le n} \partial_{x_i} a_i(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i}.$$

Докажем аналогично п. 2 обобщенную псевдомонотонность и c-слабую локальную ограниченность A.

Проверим свойства оператора A_1. Пусть $y_k \to y$ слабо в $W^1_{p+1}(\Omega)$ и

$$\limsup_{k\to\infty} \langle A_1(y_k), y_k - y\rangle \le 0.$$

Тогда $y_k \to y$ в $L_{p+1}(\Omega)$ и в силу непрерывности почти всюду функций $a_i(x,\cdot)$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, y_k)\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial (y_k - y)}{\partial x_i} dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (a_i(x, y_k) - a_i(x, y))\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial (y_k - y)}{\partial x_i} dx = 0$$

($a_i(\cdot, y_k) \to a_i(\cdot, y)$ сильно в $L_{p+1}(\Omega)$, $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ слабо в $L_{p+1}(\Omega)$).

Рассмотрим оператор A. Пусть $y_k \to y$ слабо в $W^1_{p+1}(\Omega)$, $w_k \in A(y_k)$, $w_k \to w$ слабо в $W^{-1}_{q'}(\Omega)$ $\bigl(1/(p+1) + 1/q' = 1\bigr)$ и

$$\limsup_{k\to\infty} \langle w_k, y_k - y\rangle \le 0. \tag{16}$$

Тогда $y_k \to y$ в $L_{p+1}(\Omega)$ и в силу конечности и интегрируемости функций $\partial_{x_i} a_i(\cdot, y)$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sup_{d_{ik}\in\partial_{x_i} a_i(x,y_k)} \int_\Omega d_{ik}\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(y_k - y) dx = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \inf_{d_{ik}\in\partial_{x_i} a_i(x,y_k)} \int_\Omega d_{ik}\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(y_k - y) dx = 0.$$

Кроме того, в силу оценки (14)

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \hat{a}^0_{iy}(x, y; y_k - y)\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial (y_k - y)}{\partial x_i} dx \ge$$

$$\ge -\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega K_i(x, y)\,|y_k - y|\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial (y_k - y)}{\partial x_i} dx = 0.$$

Таким образом, из оценки (16) следует

$$\limsup_{k\to\infty} \langle A_1(y_k), y_k - y\rangle \le 0.$$

Тогда

$$\limsup_{k\to\infty} \langle w_k, \xi - y_k\rangle = \limsup_{k\to\infty} \langle w_k, \xi - y\rangle \le \limsup_{k\to\infty} [A(y_k), \xi - y]_+ =$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, y_k)\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial (\xi - y)}{\partial x_i} dx + \right.$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \hat{a}^0_{iy}(x, y_k; \xi - y)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(\xi - y)\hat{a}^0_{ii}(x, y_k; dx)\Bigg).$$

Первое слагаемое сходится к $\langle A_1(y), \xi - y\rangle$ в силу непрерывности функций a_i. Для оценки второго слагаемого, учитывая ограниченность в совокупности подынтегральных функций, вносим предел под знак интеграла. И поскольку обобщенная производная полунепрерывна сверху, то

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \hat{a}^0_{iy}(x, y_k; \xi - y)\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^p dx \le \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \hat{a}^0_{iy}(x, y; \xi - y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^p dx.$$

Поскольку для каждого y_k функции $a_i(\cdot, y_k)$ дифференцируемы почти всюду, то вместо третьего слагаемого рассмотрим интеграл по множеству $\Omega_N = \Omega\setminus\left\{\bigcup_{k\ge N}\Gamma^x_{iy_k}\cup S\right\}$, где $\Gamma^x_{iy_k}$ — множество, на котором $a_i(\cdot, y_k)$ не имеет производной. В силу оценки $c')$ и непрерывности функций $a_i(x,\cdot)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\cdot, y_k) \to \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\cdot, y)$$

слабо в $L_{p+1}(\Omega)$, т. е.

$$\sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(\xi - y)\hat{a}^0_{ii}(x, y_k; dx) =$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \int_{\Omega_N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y_k)\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(\xi - y)dx \to$$

$$\to \sum_{1\le i\le n} \int_{\Omega_N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(\xi - y)dx =$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\xi - y)\hat{a}^0_{ii}(x, y; dx).$$

Следовательно, для каждого $\xi \in W^1_{p+1}(\Omega)$

$$\limsup_{k\to\infty} \langle w_k, \xi - y_k\rangle \le \langle A_1(y), \xi - y\rangle + \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \hat{a}^0_{iy}(x, y; \xi - y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^p dx +$$

$$+ \sum_{1\le i\le n} \int_\Omega \left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i}(\xi - y)\hat{a}^0_{ii}(x, y; dx) = [A(y), \xi - y]_+,$$

оператор A является псевдомонотонным.

Оценим ограниченность оператора. Пусть $y_k \to y$ слабо в $W^1_{p+1}(\Omega)$. Тогда

$$\|A(y_k)\|_+ = \sup_{\xi\in B_1\subset W^1_{p+1}(\Omega)} [A(y_k), \xi]_+ \le$$

$$\le \sup_{\xi\in B_1\subset W^1_{p+1}(\Omega)} \left|\sum_{1\le i\le n} \int_\Omega a_i(x, y_k)\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}dx + \right.$$

$$+\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega}\hat{a}^0_{iy}(x,y_k;\xi)\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^p dx+\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\xi\,\hat{a}^0_{ix_i}(x,y_k;dx)\Bigg| \le$$

$$\le \sup_{\xi\in B_1}\left(\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega}|a_i(x,y_k)|\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-1}\left|\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right|dx+\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega}K_i(x,y)|\xi|\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^p dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega_N}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,y_k)\right|\left|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right|^{p-1}|\xi|dx\right)\le M,$$

где $K_i(\cdot,y)\in L_\infty(\Omega)$ — константа Липшица (см. условие d′)), замена выпол на в соответствии с оценкой (14). Первое слагаемое ограничено в совокупнос в силу свойства b′), второе — в силу свойств b′) и d′), третье — в си свойств b′) и c′). Таким образом, A c-слабо локально ограничен.

Условия коэрцитивности совпадают с общим случаем, описанным в пред дущем пункте.

При выполнении условий a), b′)–d′), e), g) вариационное неравенство (1 имеет решение $y\in W^{+,1}_{p+1}(\Omega)$; по аналогии с однозначным случаем мы называ это решение обобщенным решением (12), (13).

Пример 2. Пусть:

b″) $a_i(\cdot,y)\in L_\infty(\Omega)$ для почти всех $x\in\Omega$ и для всех y;

c″) если в точке $x\in\Omega$ существуют частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,y)$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(\cdot,y)\le\beta_i(x),\qquad \beta_i(x)\in L_\infty(\Omega);$$

d″) $a_i(\cdot,y)$ и $a_i(x,\cdot)$ локально липшицевы, в частности

$$|a_i(x,y)-a_i(x,z)|\le K_i(x,y;|y-z|)$$

для произвольного ограниченного y и для всех z из ε-окрестности y фун ция $K_i(\cdot,y;|y-z|)\in L_\infty(\Omega)$, где $K_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ непрерывна по третьему аргументу.

В таком случае оценка (8) примет вид

$$\left|\hat{a}^0_{iy}(x,\xi;h)\right|\le K_i(x,y;|h|)\qquad\forall\xi\in B_\varepsilon(y).$$

Тогда аналогично предыдущему случаю (12) соответствует включение

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x,y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\in\sum_{1\le i\le n}\partial_y a_i(x,y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^p+$$

$$+\sum_{1\le i\le n}\partial_{x_i}a_i(x,y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial y}{\partial x_i}+f(x),$$

т. е. можно искать решение (12), (13) как решение следующего вариационно неравенства:

$$\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega}a_i(x,y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial(\xi-y)}{\partial x_i}dx+$$

$$+\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial y}{\partial x_i}(\xi-y)\hat{a}^0_{ii}(x,y,dx)+$$

$$+\sum_{1\le i\le n}\int_{\Omega}\hat{a}^{0}_{iy}(x,y,\xi-y)\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|^{p}dx \ \ge$$

$$\ge \int_{\Omega} f(x)(\xi-y)dx \qquad \forall \xi\in W_p^{+,1}(\Omega)=\left\{y\in W_p^1(\Omega):\ y\big|_{\partial\Omega}\ge 0\right\}. \tag{17}$$

Аналогично доказывается, что вариационное неравенство (17) имеет решение в пространстве $W_p^1(\Omega)$.

Автор выражает благодарность В. С. Мельнику за полезные обсуждения проблемы.

1. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
2. *Ben Cheikh Ali M., Guibe O.* Résults d'existence et d'unicité pour une classe de problèmes non linéares et non coercifs // C.r. Acad sci. Ser. 1. – 1999. – **329**. – P. 967 – 972.
3. *Solonukha O. V.* On solvability of monotone type problems with non-coercive set-valued operators // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2000. – **6**, № 2. – P. 66 – 72.
4. *Солонуха О. В.* Про існування розв'язків некоерцитивних задач з вільною межею // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2000. – № 2. – С. 109 – 112.
5. *Browder F. E., Hess P.* Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces // J. Funct. Anal. – 1972. – **11**, № 2. – P. 251 – 294.
6. *Мельник В. С., Солонуха О. В.* О стационарных вариационных неравенствах с многозначными операторами // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 3. – С. 74 – 89.
7. *Solonoukha O. V.* On the stationary variational inequalities with the generalized pseudomonotone operators // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1997. – **3**, № 4. – P. 81 – 95.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
9. *Barbu V.* Analysis and control of non-linear infinite dimensional systems. – Boston: Acad. Press, Inc., 1995. – 478 p.
10. *Solonoukha O. V.* On solvability of variational inequalities with "+"-coercive multyvalued mappings // Nonlinear Boundary Value Problems. – 1999. – **9**. – P. 126 – 129.
11. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 374 с.
12. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Birkhauser: Acad. Press, Inc., 1990. – 459 p.
13. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

Получено 05.09.2000