УДК 519.1

А. И. Сапелкин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

P-ТОЧНЫЕ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

We prove a theorem that describes P-faithful partially ordered sets.

Доведено теорему, що описує P-точні впорядковані множини.

1. Введение. Понятие P-точного бинарного отношения введено в работе [1]. Настоящая работа посвящена доказательству теоремы, описывающей P-точные частично упорядоченные множества, которая была высказана в [1] в качестве гипотезы. Используя утверждение из [2] (которое мы называем леммой М. В. Зельдича и для удобства читателя приводим его краткое доказательство), сводим доказательство к случаю, когда граф Хассе частично упорядоченного множества является схемой Дынкина. Аналогичный план доказательства содержится в [3] (теорема 2), однако остальные сформулированные там утверждения приведены без доказательств.

Напомним некоторые определения. Пусть R — произвольное бинарное отношение на конечном множестве $S = \{1, \ldots, n\}$. R можно рассматривать как функцию от двух переменных, определенную на S со значениями в $\{0, 1\}$: $R(i, j) = 1$, если i и j находятся в отношении R, и $R(i, j) = 0$ — в противном случае. Сопоставим R квадратичную форму (форму Ройтера)

$$f_R(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} R(i, j) x_i x_j$$

и назовем *нормой* $\|R\|$ отношения R наименьшее значение, которое форма f_R принимает на стандартном симплексе, т. е. на множестве векторов $(x_1, \ldots, x_n)$, где x_i — вещественные неотрицательные числа и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Вектор $x^* = (x_1, \ldots, x_n)$ (вообще говоря, не единственный), на котором достигается это наименьшее значение, назовем *минимальным* для множества (S, R). Множество векторов гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ будем обозначать через Υ.

Пусть R_1 — отношение на S_1, а R_2 — на S_2. $S_1 \sqcup S_2$ — дизъюнктивное объединение S_1 и S_2 и $R_1 \sqcup R_2$ — соответствующее отношение на $S_1 \sqcup S_2$ (если R_1 и R_2 — отношения частичного порядка, то $(S_i \sqcup S_2, R_1 \sqcup R_2)$ называется *кардинальной суммой* $(S_1, R_1) + (S_2, R_2)$ [4]). Множество S с отношением R *связное*, если

$$(S, R) \neq (S_1 \sqcup S_2, R_1 \sqcup R_2).$$

Лемма 1 [5].

$$\|R_1 \sqcup R_2\|^{-1} = \|R_1\|^{-1} + \|R_2\|^{-1}.$$

В связи с этим утверждением вводится функция $P(S) = P(S, R)$, равная $\|R\|^{-1}$. Тогда

$$(S_1 \sqcup S_2, R_1 \sqcup R_2) = P(S_1, R_1) + P(S_2, R_2).$$

Из определения функции P следует, что если $S' \subset S$ и R' — отношение на S', индуцированное R, то $P(S', R') \leq P(S, R)$. Множество (S, R) назовем *P-точным*, если $P(S', R') < P(S, R)$ для любого $(S', R') \subset (S, R)$.

Изучение P-точных множеств сводится к изучению связных, так как из леммы 1 следует, что $\left(\sqcup_{i=1}^{l} S_i, \sqcup_{i=1}^{l} R_i\right)$ P-точно, если и только если P-точно каждое (S_i, R_i).

2. Критерий P-точности. Основным инструментом, используемым для выделения P-точных чум, является приведенная ниже лемма, устанавливающая необходимое и достаточное условие P-точности произвольного бинарного отношения R (ср. с [3]).

Пусть

$$A_R = \{R(i, j) + R(j, i)\}_{i,\, j = \overline{1, n}}$$

— матрица формы Ройтера $f_R(x)$ бинарного отношения R, т.е.

$$f_R(x) = \frac{1}{2}(A_R x, x),$$

e — вектор, все компоненты которого равны единице.

Лемма 2. *Для того чтобы множество (S, R) было P-точным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *форма $f_R(x)$ положительно определена, т.е. принимает положительное значение на любом ненулевом векторе;*

2) *существует такой положительный вектор x^* (т.е. $x_i^* > 0$ при $i = \overline{1, n}$) и такое вещественное λ, что*

$$A_R x^* = \lambda e, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1.$$

При этом вектор x^* будет минимальным для множества (S, R).

***Замечание* 1.** Если ввести вектор $\bar{x} = \lambda^{-1} x^*$, то второе условие леммы можно переформулировать в следующем виде:

существует такой положительный вектор $\bar{x}$, что

$$A_R \bar{x} = e.$$

По необходимости будем пользоваться той или иной формой условия 2. Следует отметить, что элементы вектора $\bar{x}$ меньше $1/2$. Такой вектор будем называть приведенным минимальным вектором.

Доказательство. Для того чтобы множество (S, R) было P-точным, необходимо и достаточно, чтобы форма $f_R(x)$ достигала своего минимума только на положительных векторах гиперплоскости Υ. В противном случае минимум достигается на неотрицательном векторе с некоторыми компонентами, равными нулю. Т.е. существует подмножество (S', R') множества (S, R) с нормой, равной норме всего множества, что противоречит P-точности. Множество положительных векторов гиперплоскости Υ является открытым множеством на Υ. Это означает, что минимум на этом множестве должен достигаться в точке условного экстремума.

Необходимость. Чтобы точка x^* была решением задачи

$$f_R(x) \to \min, \qquad x \in \Upsilon,$$

необходимо, чтобы x^* была стационарной точкой функции Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f_R(x) + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

т.е. чтобы выполнялись условия

$$\left.\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x_i}\right|_{x = x^*} = \left\{A_R x^* - \lambda\right\}_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\left.\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x=x^*} = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^* = 0.$$

С учетом положительности вектора x^* мы доказали необходимость выполнения условия 2.

Покажем, что если форма $f_R(x)$ не положительно определена (т.е. существует ненулевой вектор $\bar{x}$ такой, что $f_R(\bar{x}) = 0$), то множество не может быть P-точным. А именно, вектор, удовлетворяющий условию 2, не может быть минимальным. Рассмотрим два случая:

1) $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \alpha \neq 0$;

2) $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = 0$.

1. Введем вектор $x' = 1/\alpha\bar{x}$. Тогда $x' \in \Upsilon$,

$$f_R(x') = \frac{1}{\alpha^2} f_R(\bar{x}) = 0.$$

Пусть Λ — прямая, проходящая через x^* и x' и заданная соотношением

$$\Lambda(k) = kx^* + (1-k)\,x', \qquad k \in R.$$

Прямая Λ лежит в гиперплоскости Υ. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i(k) = k\sum_{i=1}^{n} x_i^* + (1-k)\sum_{i=1}^{n} x_i' = 1.$$

Найдем значение $f_R(x)$ на прямой Λ:

$$f_R(\Lambda(k)) = f_\Lambda(k) = \frac{1}{2}(A_R(kx^* + (1-k)x'), kx^* + (1-k)x') =$$

$$= \frac{1}{2}k^2(A_R x^*, x^*) + \frac{1}{2}k(1-k)(A_R x^*, x') +$$

$$+ \frac{1}{2}k(1-k)(A_R x', x^*) + \frac{1}{2}k^2(A_R x', x') =$$

$$= k^2 f_R(x^*) + \frac{1}{2}k(1-k)[\lambda + (A_R x', x^*)].$$

Если

$$f_R(x^*) \neq \frac{1}{2}[(A_R x', x^*) + \lambda],$$

то $f_\Lambda(k)$ — квадратичная функция относительно k. Предположим, что x^* — точка локального минимума $f_R(x)$ на Υ. Тогда существует такая окрестность $O(x^*)$ этой точки на Υ, что $f_R(x) > f_R(x^*)$ для произвольной точки x этой окрестности, за исключением самой x^*. Пересечение прямой Λ с $O(x^*)$ будет окрестностью x^* на гиперплоскости Λ, на которой очевидным образом $f_\Lambda(k)$ будет достигать локального минимума. Но так как $f_\Lambda(k)$ — квадратичная функция, $k = 0$ — ее корень, а $k = 1$ — точка локального минимума, то $k = 2$ также будет корнем. Тогда

$$(A_R x', x^*) = 4 f_R(x^*) - \lambda.$$

Подставляя это выражение в $f_\Lambda(k)$, получаем

$$f_\Lambda(k) = (-k^2 + 2k) f_R(x^*).$$

Но поскольку $f_R(x^*) > 0$, то коэффициент при k^2 оказывается меньшим нуля.

Значит, $f_\Lambda(k)$ достигает при $k = 1$ максимума, что невозможно.

Если же

$$f_R(x^*) = \frac{1}{2}[(A_R x', x^*) + \lambda],$$

то функция $f_\Lambda(k)$ линейна, что противоречит тому, что на пересечении $O(x^*)$ с прямой Λ $f_\Lambda(k)$ должна достигать локального минимума.

2. Пусть теперь $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i = 0$. Тогда на прямой

$$\Lambda(k) = x^* + k\bar{x}, \qquad k \in R,$$

форма $f_R(x)$ будет принимать следующие значения:

$$f_\Lambda(k) = f_R(\Lambda(k)) = \frac{1}{2}(A_R(x^* + k\bar{x}), x^* + k\bar{x}) =$$

$$= \frac{1}{2}(A_R x^*, x^*) + \frac{1}{2}k(A_R x^*, \bar{x}) + \frac{1}{2}(A_R \bar{x}, x^*) + \frac{1}{2}k^2(A_R \bar{x}, \bar{x}) =$$

$$= f_R(x^*) + \frac{1}{2}k(A_R \bar{x}, x^*).$$

Поскольку $f_\Lambda(k)$ — линейная функция, то приходим к противоречию, аналогичному противоречию второй части предыдущего случая. То, что Λ лежит в Υ, доказывается аналогично предыдущему случаю.

Достаточность. Покажем теперь, что при выполнении обоих условий леммы множество будет P-точным. Разложим форму в ряд Тейлора в точке x^* (ясно, что производные выше второго порядка равны нулю):

$$f_R(x) = f_R(x^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_R(x)}{\partial x_i}\bigg|_{x = x^*}(x_i - x_i^*) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_R(x)}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x = x^*}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) =$$

$$= f_R(x^*) + \sum_{i=1}^n \left\{A_R x^*\right\}_i (x_i - x_i^*) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left\{A_R\right\}_{i,j}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) =$$

$$= f_R(x^*) + \lambda\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) + f_R(x - x^*).$$

Если $x \in \Upsilon$, то

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) = 0, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, если $x \in \Upsilon$ и $x \neq x^*$, то

$$f_R(x) = f_R(x^*) + f_R(x - x^*) > f_R(x^*),$$

т. е. x^* — точка глобального минимума на гиперплоскости Υ, что обеспечивает отсутствие минимального вектора с нулевыми компонентами и, как следствие, P-точность.

3. Цикличные частично упорядоченные множества. Здесь и далее $S = (S, \leq)$ — конечное частично упорядоченное множество (чум). *$Q(S)$-колчан Хассе* чум S: две точки (элементы) S соединяются стрелкой $x \to y$, если $x < y$ и не существует $z \in S$ такого, что $x < z < y$. *Графом Хассе* $\Gamma(S)$ частично упорядоченного множества S назовем (неориентированный) граф $\Gamma(Q(S))$, получаемый из колчана Хассе удалением ориентации ребер. Будем изображать чум его колчаном Хассе, не указывая направления ребер, но подразумевая, что стрелка всегда направлена вверх. Будем говорить, что граф содержит *цикл*, если существует такая последовательность точек графа, что каждая точка этой последовательности (кроме последней) соединена ребром с последующей, а последняя — с первой точкой последовательности. Граф *циклический*, если он не содержит точек, не входящих в цикл. Чум *циклично*, если его граф Хассе содержит цикл.

Пусть граф Хассе чум S — циклический. Удалим из S *транзитивные* элементы, т.е. такие b, что существуют a, c такие, что $a \le b \le c$. Полученное чум будет состоять только из минимальных и максимальных элементов. Если такое чум циклично, то назовем его *циклом первого рода*. В противном случае назовем S *циклом второго рода*. Ясно, что все элементы цикла первого рода являются либо максимальными, либо минимальными*.

Докажем основной результат данного пункта.

Предложение 1. *Цикличные чум не являются P-точными.*

Доказательство. Рассмотрим подмножество цикличного чум S, соответствующее циклу в его графе Хассе. Допустим, что после удаления транзитивных элементов мы получили цикл первого рода D. Это означает, что и первоначальное чум содержит такой цикл. Определим вектор x следующим образом: размерность x равна количеству элементов чум S; компоненты, соответствующие элементам S, не входящим в D, равны нулю; компоненты, соответствующие максимальным элементам D, равны единице; компоненты, соответствующие минимальным элементам D, равны -1. Пусть количество элементов цикла D равно k. Тогда

$$f_R(x) = \sum_{i,j=1}^{n} R(i,j)x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i,j=1, i\ne j}^{n} R(i,j)x_ix_j =$$

$$= k + \sum_{i,j\in D, i\ne j}^{n} R(i,j)x_ix_j .$$

В последней сумме количество слагаемых равно k, так как количество ребер графа Хассе чум D, равное k, совпадает с количеством сравнимых в D пар из-за отсутствия транзитивных элементов. При этом все слагаемые равны -1, поскольку если элемент максимальный, то он может быть сравним только с минимальным элементом, опять-таки из-за отсутствия транзитивных элементов. Таким образом форма Ройтера обращается в нуль на указанном векторе x, т.е. она не положительно определена, и, значит, согласно критерию P-точности S — не P-точное чум.

Если же подмножество S, соответствующее циклу в графе Хассе (далее C), — цикл второго рода, то можно провести следующие рассуждения. C не может содержать менее четырех элементов. Если количество элементов более четырех, то удаление транзитивного элемента сохраняет цикличность множества. Любое не одноэлементное конечное чум содержит хотя бы один максимальный элемент M и хотя бы один минимальный элемент m. Значит, все элементы C, кроме M и m, являются транзитивными и сравнимы с максимальным и минимальным элементами, т.е. C можно представить как множество, получаемое из двух не менее чем трехэлементных цепей отождествлением их максимальных и минимальных элементов. Пусть a и b — элементы C такие, что только M больше этих элементов. Пусть S содержит f_1, больший a, b и не

---

* Подобное утверждение без доказательства сформулировано в [3] (утверждение 1).

сравнимый с M. Тогда S содержит цикл первого рода $(\{a, b, M, f_1\}, \{a \le M, b \le M, a \le f_1, b \le f_1\})$. Если же S содержит f_2, меньший a, b и не сравнимый с m, то S содержит цикл первого рода $(\{a, b, M, f_2\}, \{m \le a, m \le b, f_2 \le a, f_2 \le b\})$. Поскольку мы показали, что P-точное чум не может содержать цикл первого рода, то в дальнейшем можно предположить, что S не содержит элементов, подобных f_1, f_2.

Пусть x — приведенный минимальный вектор, R_v — сумма значений элементов S (определенных вектором x), сравнимых с v и отличных от a, b, M, m. Договоримся, для краткости, отождествлять обозначения точек чум и обозначения значений вектора x на этих точках в арифметических выражениях (это не может привести к недоразумению, так как мы не вводили никаких операций над элементами чум). Тогда

$$\{A_R x\}_M = 2M + m + a + b + R_M = 1,$$

$$\{A_R x\}_m = M + 2m + a + b + R_m = 1,$$

$$\{A_R x\}_a = M + m + 2a + R_a = 1,$$

$$\{A_R x\}_b = M + m + 2b + R_b = 1.$$

Вычтем из суммы первого и второго равенств сумму третьего и четвертого:

$$M + m + (R_M + R_m - R_a - R_b) = 0.$$

Покажем, что выражение в скобках неотрицательно. Действительно, элементы, большие a и b, можно разделить на два класса:

1) сравнимые только с a или только с b;

2) сравнимые с a и b и поэтому, с учетом приведенного выше замечания, сравнимые с M (элементы, сравнимые с a и b и не сравнимые с M, отсутствуют в силу приведенного выше замечания).

Элементы первого класса сравнимы с m, поэтому соответствующие им значения входят в R_m. Элементы второго класса таковы, что их значения входят как в R_a, R_b, так и в R_M, R_m. Аналогичные рассуждения показывают, что сокращаются и значения, соответствующие меньшим a или b элементам. Таким образом, если предположить, что вектор x положительный, то последнее равенство вообще не может иметь места. Т.е. мы показали, что P-точное чум не может содержать цикл второго рода, но в таком случае оно вообще не может быть цикличным, поскольку по определению циклов (первого и второго родов) цикличное чум всегда содержит цикл первого или второго рода. Предложение доказано.

4. Нецикличные частично упорядоченные множества. Напомним, что *формой Титса* колчана Q называют форму

$$f_T(x) = \sum_{i \in Q_s} x_i^2 - \sum_{(i,j) \in Q_v} x_i x_j,$$

где Q_s — множество точек колчана, Q_v — множество пар точек колчана, соединенных ребром. Под *формой Титса чум* S мы понимаем форму Титса его колчана Хассе. Далее,

$$R_T(i,j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i \le j, \quad i \ne j \text{ и не существует } k \text{ такого, что } i \le k \le j; \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

A_T — *матрица формы Титса*:

$$A_T = \{2g(i,j) - R_T(i,j) - R_T(j,i)\}_{i, j = \overline{1, n}},$$

где $g(i, j)$ — функция, равная 1, если $i = j$, и нулю — в противном случае. Ясно, что $f_T(x) = 1/2(A_T x, x)$.

Докажем лемму, которая позволит нам выделить класс чум с положительно определенной формой Ройтера.

Лемма 3 (М. В. Зельдич). *Форма Титса $f_T(x)$ чум S, не содержащего цикл второго рода (или, следуя М. В. Зельдичу, не содержащая обходов [2]), эквивалентна его форме Ройтера $f_R(x)$.*

Доказательство. Пусть i и j — две различные точки колчана. Будем говорить, что i и j соединены *путем длины* n, если существует последовательность n однонаправленных ребер колчана, соединяющая i и j. Если при этом ребра направлены от i, то будем говорить, что путь направлен из i в j. Если все пути в колчане Хассе некоторого чум имеют длину 1, то такое чум состоит только из максимальных и минимальных элементов. Таковы, например, забор и цикл первого рода. Введем функцию $N(i, j)$, равную количеству путей из i в j $(N(i, i) = 0)$. Через $N_k(i, j)$ обозначим количество путей длины k из i в j $(N_k(i, i) = 0)$. Ясно, что

$$N(i, j) = \sum_{i=1}^{M_Q} N_k(i, j),$$

где M_Q — длина максимального пути в колчане Q.

Пусть S — произвольное чум, Q — его колчан Хассе, $\overline{A_T}$ — верхняя треугольная часть матрицы A_T (т.е. $A_T = 2E - \overline{A_T} - \overline{A_T}^T$). Ясно, что

$$\overline{A_T} = \{R_T(i, j)\}_{i, j = \overline{1, n}},$$

где n — количество элементов чум S. Рассмотрим матрицу, обратную к $E - \overline{A_T}$. Как известно,

$$(E - \overline{A_T})^{-1} = E + \overline{A_T} + \overline{A_T}^2 + \ldots + \overline{A_T}^l + \ldots,$$

если ряд в правой части сходится. Очевидно, что $\{\overline{A_T}\}_{ij} = N_1(i, j)$. Далее,

$$\{\overline{A_T}^2\}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \{\overline{A_T}\}_{ik} \{\overline{A_T}\}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} R_T(i, k) R_T(k, j) = N_2(i, j),$$

поскольку слагаемое $R_T(i, k) R_T(k, j)$ не равно нулю только когда существует путь длины 2 из i в j, проходящий через k, и суммирование проводится по всем точкам.

Предположим, что $\{\overline{A_T}^l\}_{ij} = N_l(i, j)$, и покажем, исходя из этого, что $\{\overline{A_T}^{l+1}\}_{ij} = N_{l+1}(i, j)$.

Действительно,

$$\{\overline{A_T}^{l+1}\}_{ij} = \{\overline{A_T}^l \overline{A_T}\}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \{\overline{A_T}^l\}_{ik} \{\overline{A_T}\}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} N_l(i, k) R_T(k, j) = N_{l+1}(i, j),$$

поскольку слагаемое $N_l(i, k) R_T(k, j)$ отлично от нуля только тогда, когда существует $N_k(i, k)$ путей длины $l + 1$ из i в j, проходящих через k, и суммирование проводится по всем точкам.

Доказанное соотношение позволяет записать

$$\{(E - \overline{A_T})^{-1}\}_{ij} = g(i, j) + N_1(i, j) + N_2(i, j) + \ldots + N_{M_S}(i, j) = g(i, j) + N(i, j),$$

где M_S — длина максимального пути в колчане Хассе чум S.

Если чум S не содержит цикл второго рода, то между двумя любыми точками его колчана Хассе не может существовать более одного пути. При этом такой путь существует, только если эти элементы сравнимы. Таким образом,

$$(E-\overline{A_T})^{-1} = E + \overline{A_R},$$

где $\overline{A_R}$ — верхняя треугольная часть матрицы A_R ($A_R = 2E+\overline{A_R}+\overline{A_R}^T$). Наряду с этим можем записать

$$(E-\overline{A_T}^T)^{-1} = E + \overline{A_R}^T.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$(E-\overline{A_T})^{-1} + (E-\overline{A_T}^T)^{-1} = 2E + \overline{A_R} + \overline{A_R}^T = A_R.$$

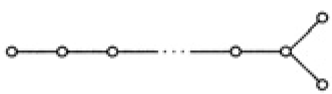
Умножая последнее равенство справа на $E-\overline{A_T}$, а слева на $E-\overline{A_T}^T$, имеем

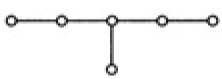
$$E-\overline{A_T} + E-\overline{A_T}^T = A_T = (E-\overline{A_T})^T A_R(E-\overline{A_T}).$$

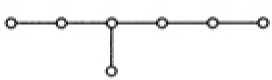
Это означает, что форма Ройтера и форма Титса эквивалентны.

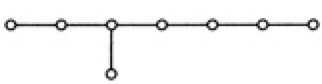
Доказанная лемма позволяет свести вопрос о знакоопределенности формы Ройтера к знакоопределенности формы Титса. Для того чтобы выполнялось первое условие критерия P-точности, нужно, чтобы форма Ройтера была положительно определена, т.е. форма Титса также должна быть положительно определена. Форма Титса положительно определена для колчанов, граф которых есть схема Дынкина с однократными связями, т. е. одна из схем A_n, D_n, E_6, E_7, E_8.

A_n  ($n \geq 1$ точке)

D_n  ($n \geq 4$ точкам)

E_6 

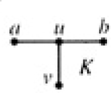
E_7 

E_8 

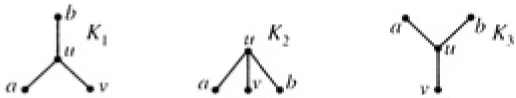
Докажем предложение, сужающее класс допустимых чум до множеств, граф Хассе которых есть схема Дынкина A_n.

Предложение 2. *Частично упорядоченное множество, граф Хассе которого есть одна из схем Дынкина* D_n, E_6, E_7, E_8, *не является* P*-точным множеством.*

Доказательство. Покажем, что для таких чум не может выполняться второе условие критерия P-точности. Действительно, все упомянутые в предложении схемы содержат подсхему K:



При этом одна из точек подсхемы K имеет *кратность*, равную единице (кратностью точки мы называем количество ребер, связанных с ней). Без ограничения общности можем принять, что это точка v. Тогда чум, граф Хассе которых есть одна из рассматриваемых схем Дынкина, содержит одно из подчум K_1, K_2, K_3 либо содержит подчум, получаемое из них переориентацией стрелок. Т.е. нужно рассмотреть три случая: чум содержит K_1; чум содержит K_2; чум содержит K_3:



Введем обозначения: n_i — *кратность* точки i колчана Хассе чум. Пусть i — точка кратности 2 или 1 и j — точка колчана, соединенная с i ребром, т.е. $R_T(i, j) = 1$ или $R_T(j, i) = 1$. Точкам поставлены в соответствие действительные числа, определяемые вектором x, удовлетворяющим второму условию критерия P-точности во второй форме, т.е. x — приведенный минимальный вектор (мы, по-прежнему, в арифметических выражениях будем отождествлять обозначения точек и значения вектора x на этих точках). Тогда α_i — сумма значений точек таких, что существует путь между j и этими точками, проходящий через i, β_i — сумма значений точек, сравнимых с i и не сравнимых с j. Возможны два варианта: если $n_i = 2$, то $\alpha_i = 0$, $\beta_i > 0$ или $\beta_i = 0$, $\alpha_i > 0$; либо $\alpha_i = 0$ и $\beta_i = 0$, если $n_i = 1$. Заметим также, что если $n_a \neq 1$ или $n_b \neq$ $\neq 1$, т.е. граф колчана не есть D_n, то количество точек одной из ветвей должно быть меньше 2, а другой меньше 4 в силу размеров схем E_6, E_7, E_8. Рассмотрим теперь каждый из упомянутых выше случаев.

Пусть чум содержит подчум K_1. Из предположения, что выполнено второе условие критерия P-точности, следует

$$\begin{gathered}
\{A_R x\}_u = 2u + v + a + b + \alpha_a + \alpha_b = 1, \\
\{A_R x\}_v = u + 2v + b + \alpha_b = 1, \\
\{A_R x\}_a = u + 2a + b + \alpha_a + \beta_a + \alpha_b = 1, \\
\{A_R x\}_b = u + v + a + 2b + \alpha_a + \alpha_b + \beta_b = 1.
\end{gathered} \tag{1}$$

Вычитая из первого равенства четвертое, из первого третье и из второго первое, получаем

$$u - b - \beta_b = 0, \quad u + v - a - \beta_a = 0, \quad v - u - a - \alpha_a = 0. \tag{2}$$

Теперь вычтем из второго равенства четвертое: $2u + \alpha_a - \beta_a = 0$. Но тогда $2u + \alpha_a = \beta_a > 0$, так как $u > 0$. Поскольку либо $\alpha_a = 0$, либо $\beta_a = 0$, то $\alpha_a = 0$. Т.е. чум должно содержать элемент a_1, больший элемента a. При этом справедливы равенства $\beta_a = 2u$, $a = v - u$.

Возможны четыре следующих случая:

1) $n_{a_1} = 1$;

2) $\alpha_b = b_1$, $n_{b_1} = 1$;

3) $\beta_b = b_1$, $n_{b_1} = 1$;

4) $n_b = 1$.

1. Если $n_{a_1} = 1$, то $\beta_a = a_1 = 2u$. Поскольку $\{A_R x\}_{a_1} = 2a_1 + a = 1$, то $a = 1 - 4u$, $v = 1 - 3u$. Прибавляя к первому равенству из (2) $\{A_R x\}_v = 1$, получаем $2v + 2u + \alpha_b - \beta_b = 1$. Отсюда $a + \alpha_b = \beta_b > 0$. Последнее неравенство приводит к тому, что $\alpha_b = 0$, $\beta_b = 1 - 4u$, $b = 5u - 1$. Далее можем записать

$$\beta_b = b_1 + \alpha_{b_1} = 1 - 4u, \quad \{A_R x\}_{b_1} = 2b_1 + b + \alpha_{b_1} + \beta_{b_1} = 1.$$

Выражая из первого равенства b_1 и подставляя это выражение во второе равенство, получаем $\beta_{b_1} = \alpha_{b_1} + 3u > 0$. Т.е. $\alpha_{b_1} = 0$, $\beta_{b_1} = 3u$, $b_1 = 1 - 4u$. Поскольку $\beta_{b_1} \neq 0$, то существует такой элемент b_2, что

$$\beta_{b_1} = b_2 + \alpha_{b_2} = 3u, \quad \{A_R x\}_{b_2} = 2b_2 + b_1 + \alpha_{b_2} + \beta_{b_2} = 1.$$

Снова выражая из первого равенства b_2 и подставляя это выражение во второе равенство, получаем $2u + \beta_{b_2} = \alpha_{b_2} > 0$. Отсюда $\beta_{b_2} = 0$, $\alpha_{b_2} = 2u$, $b_2 = u$. Из-за размеров схемы $\alpha_{b_2} = b_3 = 2u$ и $n_{b_3} = 1$. В силу того, что $\{A_R x\}_{b_3} = 2b_3 + b_2 + b_1 = 1$, получаем $u = 0$, что противоречит положительности вектора x.

2. Пусть теперь $\alpha_b = b_1$, $n_{b_1} = 1$. Из (2) и $\{A_R x\}_{b_1} = 1$ следует $b = u$, $v = \frac{1}{2}(1 - 3u)$, $a = \frac{1}{2}(1 - 5u)$, $b_1 = u$. Далее,

$$\beta_a = a_1 + \alpha_{a_1} = 2u, \quad \{A_R x\}_{a_1} = 2a_1 + a + \alpha_{a_1} + \beta_{a_1} = 1.$$

Подставляя во второе равенство выражение для a_1 из первого, получаем

$$\beta_{a_1} = \alpha_{a_1} + \frac{1}{2}(1-3u) = \alpha_{a_1} + v > 0,$$

а это значит, что $\alpha_{a_1} = 0$, $\beta_{a_1} = \frac{1}{2}(1-3u)$, $a_1 = 2u$. Аналогично

$$\beta_{a_1} = a_2 + \alpha_{a_2} = \frac{1}{2}(1-3u), \quad \{A_R x\}_{a_2} = 2a_2 + a_1 + \alpha_{a_2} + \beta_{a_2} = 1.$$

Отсюда $\beta_{a_2} = \alpha_{a_2} + u > 0$, что приводит к равенствам $\alpha_{a_2} = 0$, $\beta_{a_2} = u$, $a_2 = \frac{1}{2}(1 - 3u)$. Из-за размеров схемы $\beta_{a_2} = a_3 = u$ и $n_{a_3} = 1$. В силу того, что $\{A_R x\}_{a_3} = 2a_3 + a_2 = 1$, имеем $u = 1$. Но из $A_R x = e$ следует, что компоненты вектора x должны быть меньше $1/2$.

3. Если $\beta_b = b_1$, $n_{b_1} = 1$, то из (2) и $\{A_R x\}_{b_1} = 1$ следует $b = 2u - 1 < 0$, поскольку $u < 1/2$.

4. $n_b = 1$. Здесь мы рассматриваем чум, граф Хассе которого есть D_n. Из (2) получаем $b = u$, $v = \frac{1}{2}(1 - 2u)$, $a = \frac{1}{2}(1 - 4u)$. Далее,

$$\beta_a = a_1 + \alpha_{a_1} = 2u, \quad \{A_R x\}_{a_1} = 2a_1 + a + \alpha_{a_1} + \beta_{a_1} = 1,$$

откуда

$$\beta_{a_1} = \alpha_{a_1} + \frac{1}{2}(1-4u) = \alpha_{a_1} + a > 0.$$

А это значит, что

$$\alpha_{a_1} = 0, \quad \beta_{a_1} = \frac{1}{2}(1-4u) = a, \quad a_1 = 2u.$$

Аналогично

$$\beta_{a_1} = a_2 + \alpha_{a_2} = \frac{1}{2}(1-4u), \qquad \{A_R x\}_{a_2} = 2a_2 + a_1 + \alpha_{a_2} + \beta_{a_2} = 1.$$

Отсюда $\beta_{a_2} = \alpha_{a_2} + 2u > 0$, что приводит к равенствам $\alpha_{a_2} = 0$, $\beta_{a_2} = 2u$, $a_2 = \frac{1}{2}(1-4u) = a$. Поскольку $a_2 = a$ и $\beta_{a_2} = \beta_a$, то дальнейшие выкладки будут повторяться, и мы приходим к тому, что a_i с четными индексами будут совпадать с a, а с нечетными будут равны a_1. С другой стороны, для D_n

$$\{A_R x\}_{a_{n-4}} = 2a_{n-4} + a_{n-3} = 1.$$

Если n — четное, то $2a + a_1 = 1$. Отсюда $u = 0$. Если n — нечетное, то $2a_1 + a = 1$. Отсюда $u = 1/4$, $a = 0$.

Пусть теперь частично упорядоченное множество содержит подчум K_2. Тогда

$$\begin{gathered}\{A_R x\}_u = 2u + v + a + b + \alpha_a + \alpha_b = 1,\\ \{A_R x\}_v = u + 2v = 1,\\ \{A_R x\}_a = u + 2a + \alpha_a + \beta_a = 1,\\ \{A_R x\}_b = u + 2b + \alpha_b + \beta_b = 1.\end{gathered} \tag{3}$$

Вычитая из удвоенного первого равенства сумму третьего и четвертого, получаем

$$2u + 2v + \alpha_a + \alpha_b - \beta_a - \beta_b = 0.$$

Учитывая второе равенство, приходим к тому, что

$$1 + u + \alpha_a + \alpha_b = \beta_a + \beta_b > 1.$$

Но из третьего и четвертого равенств видно, что $\beta_a < 1$ и $\beta_b < 1$, т.е. $\beta_a > 0$, $\beta_b > 0$, $\alpha_a = 0$, $\alpha_b = 0$. Это означает, что существуют элементы a_1 и b_1 чум, большие соответственно a и b. Из-за размеров схем и соображений симметрии можем положить $n_{a_1} = 1$. Тогда из упомянутых выше равенств несложно получить следующие результаты:

$$v = \frac{1}{2}(1-u), \qquad a = \frac{1}{3}(1-2u), \qquad a_1 = \frac{1}{3}(1+u),$$

$$\beta_b = \frac{2}{3}(1+u), \qquad b = \frac{1}{6}(1-5u).$$

Далее,

$$\beta_b = b_1 + \alpha_{b_1} = \frac{2}{3}(1+u), \qquad \{A_R x\}_{b_1} = 2b_1 + b + \alpha_{b_1} + \beta_{b_1} = 1,$$

откуда

$$\beta_{b_1} + \frac{1}{2}(1+u) = \alpha_{b_1} > 0,$$

т.е.

$$\beta_{b_1} = 0, \qquad \alpha_{b_1} = \frac{1}{2}(1+u), \qquad b_1 = \frac{1}{6}(1+u).$$

Поскольку $\alpha_{b_1} \neq 0$, то существует такой элемент b_2, что

$$\alpha_{b_1} = b_2 + \alpha_{b_2} = \frac{1}{2}(1+u), \qquad \{A_R x\}_{b_2} = 2b_2 + b_1 + b + \alpha_{b_2} + \beta_{b_2} = 1.$$

Отсюда

$$\beta_{b_2} + \frac{1}{3}(1+u) = \alpha_{b_2} > 0,$$

т.е.

$$\beta_{b_2} = 0, \quad \alpha_{b_2} = \frac{1}{3}(1+u), \quad b_2 = \frac{1}{6}(1+u).$$

Из-за размеров схемы $\alpha_{b_2} = b_3 = \frac{1}{3}(1+u)$. Поскольку

$$\{A_R x\}_{b_3} = 2b_3 + b_2 + b_1 + b = 1,$$

получаем $u = -1$, что противоречит положительности вектора x.

Наконец, пусть частично упорядоченное множество содержит подчум K_3. Тогда

$$\begin{aligned}
\{A_R x\}_u &= 2u + v + a + b + \alpha_a + \alpha_b = 1, \\
\{A_R x\}_v &= u + 2v + a + b + \alpha_a + \alpha_b = 1, \\
\{A_R x\}_a &= u + v + 2a + \alpha_a + \beta_a = 1, \\
\{A_R x\}_b &= u + v + 2b + \alpha_b + \beta_b = 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Вычитая из первого равенства второе, находим $v = u$. Вычитая из удвоенного первого равенства сумму третьего и четвертого, получаем

$$2u + \alpha_a + \alpha_b = \beta_a + \beta_b > 0,$$

т.е. либо $\beta_a > 0$ либо $\beta_b > 0$. Из соображений симметрии можем положить $\beta_a > 0$ и $\alpha_a = 0$. Тогда варианты исчерпываются следующими четырьмя случаями:

1) $n_b = 1$;
2) $n_{a_1} = 1$, $\alpha_b > 0$;
3) $n_{a_1} = 1$, $\beta_b > 0$;
4) $\alpha_b = b_1$, $n_{b_1} = 1$.

1. Если $n_b = 1$, то $\beta_b = 0$, $\alpha_b = 0$. А такое чум соответствует схеме D_u, как и в четвертом случае для чум, содержащих K_1. Из соотношений (4) находим

$$a = \frac{1}{2}(1-4u), \quad b = \frac{1}{2}(1-2u), \quad \beta_a = 2u.$$

Т.е. a и β_a такие же, как и в четвертом случае, когда чум содержит K_1. Это позволяет утверждать, что дальнейшие выкладки повторяют уже проведенные нами и приведшие к противоречию.

2. Если $n_{a_1} = 1$, $\alpha_b > 0$, то из соотношений (4) находим

$$a = \frac{1}{3}(1-4u), \quad b = \frac{1}{3}(1-u), \quad \alpha_b = \frac{1}{3}(1-4u), \quad a_1 = \frac{1}{3}(1+2u).$$

Далее,

$$\alpha_b = b_1 + \alpha_{b_1} = \frac{1}{3}(1-4u), \quad \{A_R x\}_{b_1} = 2b_1 + b + 2u + \alpha_{b_1} + \beta_{b_1} = 1,$$

откуда $\beta_{b_1} = \alpha_{b_1} + u > 0$. Т.е.

$$\alpha_{b_1} = 0, \quad \beta_{b_1} = u, \quad b_1 = \frac{1}{3}(1-4u).$$

Поскольку $\beta_{b_1} \neq 0$, то существует такой элемент b_2, что

$$\beta_{b_1} = b_2 + \alpha_{b_2} = u, \quad \{A_R x\}_{b_2} = 2b_2 + b_1 + \alpha_{b_1} + \beta_{b_1} = 1.$$

Отсюда

$$\beta_{b_2} = \alpha_{b_2} + \frac{2}{3}(1-u) = \alpha_{b_2} + 2b > 0,$$

т.е.

$$\alpha_{b_2} = 0, \quad \beta_{b_2} = \frac{2}{3}(1-u), \quad b_2 = u.$$

Из-за размеров схемы $\beta_{b_2} = b_3 = \frac{2}{3}(1-u)$ и $n_{b_3} = 1$. В силу того, что $\{A_R x\}_{b_3} = 2b_3 + b_2 = 1$, получаем $u = 1$, что невозможно.

3. Если $n_{a_1} = 1$, $\beta_b > 0$, то из соотношений (4), как и в предыдущем случае, находим $a = 1/3(1-4u)$, $a_1 = 1/3(1+2u)$. При этом

$$\beta_b = 2u - \beta_a = 2u - a_1 = \frac{1}{3}(4u-1) = -a < 0,$$

что невозможно.

4. В последнем случае находим

$$\beta_a = \frac{1}{3}(1+4u), \quad \alpha_{a_1} = u,$$

$$\beta_{a_2} = a_3 = \frac{1}{3}(1-2u), \quad a_2 = u, \quad n_{a_3} = 1.$$

Отсюда

$$\{A_R x\}_{a_3} = 2a_3 + a_2 + 1.$$

Тогда $u = -1$, что невозможно. Этим завершается доказательство предложения 2.

Таким образом, среди претендентов на P-точность остались только чум, граф Хассе которых есть A_n. В работе [1] показано, что линейно упорядоченное множество, т.е. цепь, является P-точным. Напомним, что чум S называется *забором*, если S — объединение t непересекающихся цепей $Z_1, \ldots, Z_t$, где $|Z_i| \geq 2$, $i = \overline{1,t}$, $t > 1$, минимальный элемент Z_i меньше максимального элемента Z_{i+1}, $i = \overline{1,t-1}$, и других сравнений между элементами разных цепей нет. Таким образом, забор задается набором $\langle n_1, \ldots, n_t \rangle$, где $n_i = |Z_i|$, $n_i \geq 2$. *Равновысокий забор* (т.е. $n_i = n/t$ при $i = \overline{1,t}$) P-точен, а забор $\{n_1, n_2\}$ при $n_1 \neq n_2$ не P-точен. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Не линейно упорядоченное P-точное чум является забором.*

Доказательство. Пусть u — максимальная или минимальная точка не линейно упорядоченного чум, граф Хассе которого есть A_n, a, b — минимальные или, соответственно, максимальные точки, сравнимые с u (ясно, что такая пара всегда существует). Пусть x — приведенный минимальный вектор (как и ранее, мы не различаем обозначения элементов чум и обозначения значений вектора x на этих элементах). Покажем, что такой вектор может существовать только для заборов. Точки чум, не являющиеся минимальными или максимальными, будем называть *общими*. Очевидным следствием второго условия критерия P-точности есть то, что значения минимального вектора на общих точках, сравнимых с парой, состоящей из максимального и минимального элементов, совпадают. Покажем, что для P-точного чум либо для пары (u, a), либо для пары (u, b) не существует общих элементов. Действительно, пусть n_a — количество общих элементов пары (u, a), a' — значение вектора x на этих элементах, n_b и b' — аналогичные величины для пары (u, b). Тогда

$$\{A_R x\}_u = 2u + a + b + n_a a' + n_b b' = 1,$$
$$\{A_R x\}_a = u + a + (n_a + 1)\, a' = 1,$$
$$\{A_R x\}_b = u + b + (n_b + 1)\, b' = 1.$$

Вычитая из первого равенства сумму второго и третьего, получаем $a' + b' = 1$. Тогда одна из этих величин (пусть это будет a') должна удовлетворять условию $a' \geq 1/2$. Это значит, что $(n_a + 1)\, a' \geq 1$, так как $n_a \geq 1$. Но тогда $u + a \leq \leq 0$, что противоречит определению вектора x.

Доказанное утверждение позволяет заключить, что рассматриваемое чум должно быть объединением некоторого количества t непересекающихся цепей $Z_1, \ldots, Z_t$ таких, что минимальный элемент каждой цепи Z_i меньше максимального элемента Z_{i+1}, $i = \overline{1, t-1}$, и других сравнений между элементами разных цепей нет. Нам осталось показать, что среди этих цепей нет одноэлементных. Пусть цепь Z_i при $i = \overline{2, t-1}$ одноэлементна. Тогда, так как ее элемент больше минимального элемента предыдущей цепи и меньше максимального элемента следующей цепи, эти три элемента сами являются цепью, что противоречит отсутствию сравнений между элементами различных цепей, кроме упомянутых выше. Рассмотрим теперь случаи, когда одноэлементной будет только первая цепь, или первая и последняя цепи (ясно, что случай, когда одноэлементной будет только последняя цепь, аналогичен первому).

Минимальные точки цепей Z_i при $i = \overline{2, t}$ обозначим через a_i, а максимальные точки цепей Z_i при $i = \overline{2, t}$ — через b_i. Элемент первой цепи обозначим через a_1. Общие точки цепи Z_i при $i = \overline{2, t}$ и соответствующие им значения вектора x обозначим через z_i, а их количество — через n_i. Тогда

$$\begin{aligned} \{A_R x\}_{a_1} &= 2a_1 + b_2 = 1, \\ \{A_R x\}_{b_2} &= a_1 + 2b_2 + a_2 + n_2 z_2 = 1, \\ \{A_R x\}_{z_2} &= b_2 + a_2 + (n_2 + 1) z_2 = 1, \\ \{A_R x\}_{a_2} &= 2a_2 + b_2 + b_3 + n_2 z_2 = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Вычитая из первого равенства второе и прибавляя третье, получаем $a_1 + z_2 = 1$. Но тогда одна из этих величин $\geq 1/2$, что противоречит равенствам (5) и предположению о положительности вектора x. Тогда $n_2 = 0$ и предпоследнее равенство из (5) не выполняется. Из остальных равенств находим

$$b_2 = 1 - 2a_1, \quad b_3 = 2(1 - 2a_1) = 2b_1, \quad a_2 = 3a_1 - 1.$$

Покажем, что для $i = \overline{2, t-1}$ имеют место равенства

$$b_i = (i-1) b_2 = (i-1)(1 - 2a_1), \quad n_i = 0, \quad a_i = (2i-1) a_1 - (i-1). \tag{6}$$

Действительно, пусть выполнены упомянутые равенства и $i \leq t - 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \{A_R x\}_{a_i} &= 2a_i + b_i + b_{i+1} = 1, \\ \{A_R x\}_{b_{i+1}} &= a_i + 2b_{i+1} + a_{i+1} + n_{i+1} z_{i+1} = 1, \\ \{A_R x\}_{z_{i+1}} &= b_{i+1} + a_{i+1} + (n_{i+1} + 1) z_{i+1} = 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Из первого равенства находим $b_{i+1} = i b_2 = i(1 - 2a_1)$. Вычитая из второго равенства третье, получаем $a_i + b_{i+1} - z_{i+1} = 0$. Отсюда $a_1 + z_{i+1} = 1$. Но, как было показано, подобное равенство не должно иметь места, так как приводит к очевидному противоречию. Отсюда заключаем, что $n_{i+1} = 0$, и третье равенство не имеет места.

Пусть теперь $i = t - 1$. Тогда если последняя цепь не одноэлементна, то рассуждения с использованием формул (7) сохраняют свою силу, и для элементов последней цепи получаем формулы, аналогичные формулам (6). Если последняя цепь одноэлементна, то из формул (7) имеет место только первая, из которой находим

$$b_t = (t-1)b_2 = (t-1)(1-2a_1).$$

В первом случае имеем $\{A_R x\}_{a_t} = 2a_t + b_t = 1$, откуда $a_1 = 1/2$, что невозможно. Во втором случае множество является забором двухэлементных цепей. Цепи определяются следующим образом: первая состоит из элементов b_t и a_{t-1}, вторая — из b_{t-1} и a_{t-2} и т.д. Этим завершается доказательство леммы. А именно, мы показали, что цепи, из которых составлено чум, не менее чем двухэлементны, т.е. P-точное чум должно быть забором.

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Если S — забор и $|Z_1| = k$, то S может быть P-точным, только если S — равномерный забор, т.е.*

a) $k \le |Z_i| \le k+1$ *при* $i = \overline{2, t-1}$;

b) $|Z_t| = k$;

c) *если m — число тех Z_i, для которых $|Z_i| = k+1$ $(0 \le m \le t-2)$, то $m+1$ взаимно просто с t;*

d) *если $u_1 < \ldots < u_m \in \{1, \ldots, t\}$ — те числа, для которых $|Z_{u_i}| \ne k$, то* $u_i = \left[\dfrac{it}{m+1}\right] + 1$.

При выполнении условий a), b), c), d) *существует вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий второму условию критерия P-точности.*

Следовательно, равномерные заборы являются P-точными, поскольку они удовлетворяют обоим условиям критерия.

Итак, мы показали (предложение 1), что цикличные чум не P-точны. После этого вопрос о положительной определенности формы Ройтера нецикличного чум сведен к вопросу об определенности формы Титса (лемма М. В. Зельдича, см. также [3]). Оказалось, что среди чум с положительно определенной формой Титса второму условию критерия P-точности могут удовлетворять только чум, граф Хассе которых есть A_n (предложение 2), а именно, равномерные заборы и цепи (лемма 4, предложение 3). Таким образом, основная теорема доказана.

Теорема. *Каждое P-точное связное частично упорядоченное множество является либо цепью, либо равномерным забором.*

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук А. В. Ройтеру, без которого появление этой работы было бы невозможно.

1. *Назарова Л.А., Ройтер А. В.* Норма отношения, разделяющие функции и представления маркированных колчанов // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 6. – Р. 808 – 840.
2. *Зельдiч М. В.* Про характеристичнi форми частково впорядкованих множин з однозв'язним графом Хассе // Вiсн. Київ. ун-ту. Сер. фiз.-мат. – 2001. – № 4. – С. 36 – 44.
3. *Зельдiч М. В.* Про ρ-точнi частково впорядкованi множини // Там же. – С. 45 – 51.
4. *Биркгоф Г.* Теория структур. – М.:Изд-во иностр. лит., 1952. – 405 с.
5. *Roiter A. V.* The norm of a relation // Representation Theory I. Finite Dimensional Algebras, Proc. – Ottawa, 1984. – P. 269 – 272. – Lect. Notes Math. – **1177**.

Получено 29.04.2002