УДК 517.51

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

ХАРАКТЕРИСТИКА ТОЧЕК СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЛАПЛАСА ФУНКЦИЙ КЛАССА $L(S^m)$ ПРИ КРИТИЧЕСКОМ ПОКАЗАТЕЛЕ

We announce the result that enables one to determine fairly constructive characteristics of a set of points of full measure on a sphere S^m at which the strong means converge to a given function $f(\cdot)$.

Анонсується результат, згідно з яким вказується досить конструктивна характеристика множини точок повної міри на сфері S^m, в яких сильні середні збігаються до даної функції $f(\cdot)$.

1. Пусть $L_p(S^m)$, $m \geq 3$, $p \geq 1$ ($L(S^m) = L_1(S^m)$), — множество функций $f(x)$, интегрируемых в p-й степени на единичной сфере с центром в начале координат:

$$\int\limits_{S^m} |f(x)|^p \, dS(x) < \infty,$$

$$S[f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int\limits_{S^m} f(y) P_n^{(\lambda)}(\cos\gamma)\, dS(y) \qquad (1)$$

— ряд Фурье – Лапласа функции $f \in L(S^m)$,

$$\sigma_n^{(\lambda)}(f; x) = \frac{1}{A_n^{\lambda}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\lambda-1} S_k^{(\lambda)}(f; x), \qquad \lambda = \frac{m-2}{2},$$

— среднее Чезаро (C, λ) ряда (1), $S_n^{(\lambda)}(f; x)$ — частная сумма ряда (1), $\cos\gamma = (x, y)$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_m) \in S^m$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in S^m$, $P_n^{(\lambda)}(t)$ — многочлены Гегенбауэра, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Определение 1 (см., например, [1, с. 262]). *Точка $x \in S^m$ называется D_p-точкой функции f $(p \geq 1)$, если*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2\lambda p+1}} \int\limits_0^h \left| \int\limits_{(x,y)=\cos\gamma} [f(y) - f(x)]\, dt(y) \right|^p d\gamma = 0;$$

точка $x \in S^m$ называется D_p^*-точкой функции f, если x и x^* одновременно являются D_p-точками функции f, где x^* — точка, противоположная точке x.

Известно, что если $f \in L_p(S^m)$, $p \geq 1$, то почти каждая точка x является ее D_p^*-точкой. Множество всех D_p^*-точек функции f обозначим через $D_p^* = D_p^*(f)$.

Определение 2. *Пусть*

$$H_{n,q}^{(\lambda)}(f; x) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sigma_k^{(\lambda)}(f; x) - f(x) \right|^q \right\}^{1/q}, \qquad q > 0.$$

Если

$$\lim_{n\to 0} H_{n,q}^{(\lambda)}(f;x) = 0, \tag{2}$$

то говорят, что ряд Фурье – Лапласа (1) *сильно* q*-суммируем в точке* $x \in S^m$ *к значению* $f(x)$ *при критическом показателе* λ.

В [2] для любой функции $f \in L_p(S^m)$, $p > 1$, показана справедливость (2) в каждой точке $x \in D_p^*$ при любом $q > 0$.

2. В настоящей статье анонсируется результат, согласно которому для каждой функции f класса $L(S^m)$ указывается характеристика множества точек полной меры, в которых имеет место (2) при любом $q > 0$. Пусть $\delta \in (0, \pi]$, $\Delta_k^{(n)} = \Delta_k^{(n)}(\delta) = \left[\dfrac{k\delta}{2(n+1)}, \dfrac{(k+1)\delta}{2(n+1)}\right]$, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$. Полагая

$$g_x(\gamma) = \int\limits_{(x,y)=\cos\gamma} [f(y) - f(x)]\,dt(y),$$

для каждой функции $f \in L(S^m)$ при $n = 0, 1, \ldots$ определим величину

$$h_{n,p}^{(\lambda)}(f;x) = h_{n,p}^{(\lambda)}(f;x;\delta) = \left\{\sum_{k=0}^{2n+1}\left[\left(\frac{n+1}{k+1}\right)^{2\lambda+1}\int\limits_{\Delta_k^{(n)}}|g_x(\gamma)|\,d\gamma\right]^p\right\}^{1/p}, \quad p > 1,$$

характеризующую локальные метрические свойства функции f в точке $x \in S^m$. Пусть, далее,

$$G_p^* = G_p^*(f) = \left\{x \in S^m: \lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\lambda)}(f;x) = 0, \lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\lambda)}(f;x^*) = 0\right\}.$$

Ясно, что $G_{p_1}^* \subset G_p^*$ при $p_1 < p$.

Приведем некоторые свойства величины $h_{n,p}^{(\lambda)}(f;x)$. С этой целью через

$$S_h(f;x) = \frac{1}{|S^{m-1}|\sin^{2\lambda} h}\int\limits_{(x,y)=\cos h} f(y)\,dt(y)$$

обозначим сферический сдвиг с шагом h функции f, $C(S^m)$ — пространство непрерывных на S^m функций с нормой $\|f\|_{C(S^m)} = \max\limits_{x\in S^m}|f(x)|$,

$$\omega(f;t) = \sup_{0<h\le t}\|f(x) - S_h(f;x)\|_{C(S^m)}$$

— равномерный модуль непрерывности функции $f \in C(S^m)$.

Предложение 1. *Если* $f \in C(S^m)$, *то*

$$h_{n,p}^{(\lambda)}(f;x;\pi) \le K\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt[2q]{n+1}}\right), \quad q = \frac{p}{p-1},$$

где $K = K(p,\lambda)$ *— величина, равномерно ограниченная по* $n = 0, 1, \ldots$, *и* $f \in C(S^m)$.

Предложение 2. *Пусть* $f \in L_p(S^m)$, $p > 1$. *Тогда в каждой* D_p*-точке* x *функции* f

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\lambda)}(f;x) = 0.$$

Предложение 3. *Если* $f \in L(S^m)$, *то множество* G_p^* *имеет полную меру.*

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L(S^m)$, $m \geq 3$, $q = p/(p-1)$. *Тогда в каждой точке* $x \in G_p^*$ *функции* $f(x)$

$$H_{n,q}^{(\lambda)}(f; x) \leq K\{h_{n,p}^{(\lambda)}(f; x) + h_{n,p}^{(\lambda)}(f; x^*) + o(1)\}, \qquad n \to \infty,$$

где $K = K(p, \lambda)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n, $q \geq 2$.

Теорема 2. *Если* $f \in L(S^m)$, *то для каждого* $q_1 \in (0, q]$, $q \geq 2$, $q = p/(p-1)$, *в каждой точке* $x \in G_p^*$

$$\lim_{n \to \infty} H_{n,q_1}^{(\lambda)}(f; x) = 0.$$

В заключение отметим, что аналогичные факты сильной q-суммируемости в случае тригонометрических рядов, а также более общих ортогональных разложений установлены в [3 – 5].

1. *Топурия С. Б.* Ряды Фурье – Лапласа на сфере. – Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1987. – 356 с.
2. *Хочолава В. В.* О сильной суммируемости рядов Фурье – Лапласа функций класса $L_p(S^k)$, $p > 1$ // Сообщ. АН ГССР. – 1980. – **97**, № 3. – С. 573 – 576.
3. *Габисония О. Д.* О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Мат. заметки. – 1973. – **14**, № 5. – С. 615 – 628.
4. *Новиков И. Я., Родин В. А.* Характеризация точек p-сильной суммируемости тригонометрических рядов Фурье // Изв. вузов. – 1988. – **9**. – С. 58 – 62.
5. *Степанец А. И., Ласурия Р. А.* Сильная суммируемость ортогональных разложений суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – Ч. I. – С. 260 – 277; № 3. – Ч. II. – С. 393 – 405.

Получено 01.07.2002