УДК 517.946.9

Т. М. Нетесова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Invariance conditions and conditions of invariant solvability are obtained for boundary-value problems in mathematical physics.

Отримані умови інваріантності та інваріантної розв'язності крайових задач математичної фізики.

В обширной сфере приложений теории группового анализа дифференциальных уравнений [1] имеется целый ряд задач интересных и важных как в области фундаментальных исследований, так и в практическом плане, изучение которых еще далеко до завершения. Один из таких вопросов — групповой анализ краевых задач математической физики. До сих пор встречаются лишь отдельные примеры изучения свойств инвариантности краевых задач [2, 3].

Данная работа посвящена исследованию вопросов инвариантности краевых задач математической физики. Предпринята попытка установления критериев их инвариантной разрешимости.

Пусть в некотором пространстве $R^N(x, u)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_m)$, $N = n + m$, рассматривается краевая (начально-краевая) задача для системы дифференциальных уравнений:

$$\mathfrak{M}: F^{\nu}(x, u, u', \ldots, u^{(\kappa)}) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k, \tag{1}$$

с краевыми (начально-краевыми) условиями

$$\mathfrak{K}: \omega^{\mu}(x, u, u', \ldots) = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

где $u', u'', \ldots, u^{(\kappa)}$ — производные переменных $u_1, u_2, \ldots, u_m$ по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до порядка κ включительно.

Рассматривая $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$ как многообразия в некотором продолженном пространстве $R^M(x, u, u', u'', \ldots, u^{(\kappa)})$, $M = n + m + (\kappa - 1)$, будем называть краевую (начально-краевую) задачу $\mathfrak{M}$ – $\mathfrak{K}$ – (1), (2) *инвариантной (симметрийной)*, если существует группа преобразований G^N, относительно которой инвариантны как уравнения $\mathfrak{M}$ – (1), так и краевые (начально-краевые) условия $\mathfrak{K}$ – (2) задачи. Единственное решение U такой задачи, если оно существует, будем называть *инвариантным (симметрийным)* решением задачи $\mathfrak{M}$ – $\mathfrak{K}$, а саму задачу — *инвариантно разрешимой*.

Дальше ядро основных групп G^N преобразований исходного уравнения (системы уравнений) будем обозначать через G .

Очевидно, что для рассматриваемой задачи преобразованиями инвариантности будут только те преобразования P из ядра G основных групп системы уравнений (1), которые являются таковыми для поставленных краевых (начально-краевых) условий (2) задачи. В этой связи групповой анализ краевых задач уместно вести в терминах одного отдельно взятого преобразования P из ядра G основных групп исходной системы уравнений рассматриваемой задачи.

Ясно, что в корне исследуемого вопроса лежит критерий инвариантности многообразия. Напомним, что рассматриваемое в E_n многообразие (поверхность) $\mathfrak{M}$, заданное уравнениями

$$\Psi^\sigma(x) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, s, \quad x = x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{3}$$

называется инвариантным многообразием некоторой группы G_r преобразований (n — размерность пространства, r — параметр группы), если для любого преобразования $T_a \in G_r^n$ (T_a: $\bar{x}_i = f_i(x,a)$, $a = a_1, a_2, \ldots, a_r$), $x \in \mathfrak{M}$, следует $T_a x \in \mathfrak{M}$. Согласно критерию инвариантности многообразия для того, чтобы заданное многообразие (3) было инвариантным, необходимо и достаточно, чтобы для всех точек этого многообразия выполнялись равенства

$$X_\alpha \Psi^\sigma(x) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r, \quad \sigma < 1, 2, \ldots, s, \tag{4}$$

где X_α — инфинитезимальный оператор группы G_r^n, соответствующий преобразованию T_a.

В наших исследованиях ограничимся рассмотрением однопараметрических групп преобразований ($r = 1$). Это означает, что если преобразованию T_a из r-параметрической группы G_r^n преобразований соответствует инфинитезимальный оператор X_α, то при наших предположениях преобразованию P из однопараметрической группы G будет соответствовать оператор

$$X_P = \xi^i(x, u)\partial_{x_i} + \zeta^i(x, u)\partial_{u_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Тогда многообразия $\mathfrak{M}$ – (1) и $\mathfrak{K}$ – (2) будут инвариантны относительно одного и того же преобразования P, если в продолженном пространстве R^M выполняются равенства

$$\hat{X}_P^\kappa F^\nu(x, u, u', \ldots, u^{(\kappa)})\big|_{\mathfrak{M}} = 0, \tag{6}$$

$$\hat{X}_P^\kappa \omega^\mu(x, u, u', \ldots)\big|_{\mathfrak{K}} = 0, \tag{7}$$

где „$\wedge$" означает продолжение оператора X_P до порядка κ.

Равенства (6) и (7), которые представляют собой условия инвариантности уравнений (1) и (2) относительно преобразования $P \subset G$, будем называть *равенствами (условиями) инвариантности* краевой (начально-краевой) задачи относительно преобразования P из ядра G основных групп преобразований системы уравнений (1).

Необходимо отметить, что понятие инвариантности краевого условия в задачах математической физики имеет специфическую особенность, которая предполагает выполнение дополнительного условия. А именно, требование инвариантности краевого многообразия $\mathfrak{K}$ относительно преобразования $P \subset G$, допускаемого уравнениями (2), включает в себя еще и выполнение требования определенной согласованности поставленных краевых (и начальных) условий рассматриваемой задачи. Это дополнительное требование заключается в том, что ввиду уменьшения числа независимых переменных в результате применения методов группового анализа соответственно должно уменьшаться число поставленных дополнительных условий рассматриваемой задачи. Другими словами, два (или более) условия поставленной краевой (начально-краевой) задачи должны трансформироваться в одно условие в редуцированной задаче. Например, в случае начально-краевых задач для одномерных эволюционных уравнений математической физики (при этом искомое решение $u = u(x, t)$ — функция пространственной переменной x и времени t) ставятся два краевых и одно начальное условие. В результате редукции прийдем к краевым задачам для обыкновенного дифференциального уравнения, в которых на искомую функцию накладываются только два условия. Описанное таким образом требование уменьшения числа поставленных дополнительных условий краевой задачи будем называть *свойством инвариантной редукции* краевых (и начальных) условий задачи, а сами краевые условия — *инвариантно редуцируемыми.*

Приведенные рассуждения можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема. *Для того чтобы краевая (начально-краевая) задача математической физики* (1), (2) *была инвариантно разрешимой относительно некоторого преобразования* P, *необходимо и достаточно, чтобы:*

а) преобразование P *принадлежало ядру основных групп* G *преобразований системы уравнений* (1) — $P \subset G$;

б) в каждой точке рассматриваемой области выполнялись условия инвариантности (6) *и* (7);

в) краевые и (начальные) условия (2) *задачи были инвариантно редуцируемыми.*

Замечание. Поскольку групповой анализ основан на локальной теории групп Ли преобразований, то ясно, что техника его может быть применима лишь к задачам, допускающим локальное рассмотрение (например, задача Коши, Гурса).

В качестве примера рассмотрим начально-краевую задачу, являющуюся математической моделью процессов тепло-массопереноса в стратифицированной водной среде [4]:

$$\mathfrak{M}\colon\ [f(u_x)u_x]_x - u_t = 0, \quad 0 \le x < \infty, \quad t \ge 0; \tag{8}$$

$$\mathfrak{K}:\ \begin{cases} u(x,0) = 0, & x > 0; \\ f(u_x)u_x\,|_{x=0} = 0, & t > 0; \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \ \ \lim\limits_{x\to\infty}[f(u_x)u_x] = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Для установления инвариантной разрешимости поставленной задачи прежде всего необходимо определить ядро основных групп G преобразований исходного уравнения (8) задачи.

Инфинитезимальный оператор группы G будем искать в виде

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_t + \zeta\partial_u, \tag{10}$$

где ξ, η и ζ — функции от x, t, u; ∂_x, ∂_t и ∂_u — производная по соответствующей переменной.

Введя обозначения $u_x = p,\ u_t = q,\ u_{xx} = r,\ u_{xt} = s,\ u_{tt} = l,$ запишем второе продолжение искомого оператора:

$$\hat{X}^2 = \xi\partial_x + \eta\partial_t + \zeta\partial_u + \alpha\partial_p + \beta\partial_q + \rho\partial_r + \sigma\partial_s + \tau\partial_l,$$

где продолженные коэффициенты α и β являются функциями x, t, u, p и q, а ρ, σ и τ — функциями переменных x, t, u, p, q, r, s, l.

Тогда, исходя из условий инвариантности (6), получаем определяющее уравнение для искомых координат ξ, η и ζ оператора (10)

$$\hat{X}^2\{[f(p)p]_x - q\}|_{\mathfrak{M}} = (\zeta_{xx} + 2p\zeta_{xu} + p^2\zeta_{uu} + \zeta_u - 2r\xi_x - 2s\eta_x - p\xi_{xx} -$$

$$- q\eta_{tt})[pf' + f] - \zeta_t - q\zeta_u + q\xi_x + q\eta_t + (\zeta_x + p\zeta_u - q\eta_t)[rf' + rpf''] = 0.$$

Полученное уравнение решается методом последовательного расщепления совместно с операциями исключения и дифференцирования, что в результате приводит к системе нетривиальных дифференциальных уравнений, общее решение которой и определяет искомые коэффициенты оператора X. А именно,

$$\xi = \alpha a_4 x + (\alpha - 1)a_1, \quad \eta = \alpha^2 a_4 t + \frac{\alpha^2 - 1}{2} a_2, \quad \xi = \alpha a_4 u + (\alpha - 1)a_3.$$

Соответствующие этим коэффициентам инфинитезимальные операторы и определяют ядро G основных групп преобразований уравнения (8):

$$\begin{array}{llll} P_1: & \bar{x} = x + \alpha, & \bar{t} = t, & \bar{u} = u; \\ P_2: & \bar{x} = x, & \bar{t} = t + \alpha^2, & \bar{u} = u; \\ P_3: & \bar{x} = x, & \bar{t} = t, & \bar{u} = u + \alpha; \\ P_4: & \bar{x} = \alpha x, & \bar{t} = \alpha^2 t, & \bar{u} = \alpha u. \end{array}$$

Второе условие инвариантности (7) краевых задач позволяет выделить из этого ядра группу преобразований P_4, относительно которой краевые условия (9) рассматриваемой задачи инвариантны и, в то же время, инвариантно редуцируемы. Действительно, группа преобразований P_4 является группой масштабных преобразований с инвариантами:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad \text{и} \quad V = \frac{u}{\sqrt{t}}. \tag{11}$$

Выразив решение рассматриваемой задачи $U = u(x, t)$ через инварианты (11) в виде $u(x, t) = \sqrt{t}\, V(\eta)$, легко видеть, что первое и третье из условий (9) задачи трансформируются в одно условие для функции $V(\eta)$, а именно,

$$\lim_{\eta \to \infty} V(\eta) = 0.$$

Таким образом, нелинейная краевая задача (8), (9) инвариантно разрешима и отыскание ее инвариантного (в данном случае автомодельного) решения сводится к решению следующей задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$[f(V')V'] + 1/2(\eta V' - V) = 0, \tag{12}$$

$$f(V')V|_{\eta=0} = Q, \quad \lim_{\eta \to \infty} V(\eta) = 0, \quad \lim_{\eta \to \infty} [f(V')V'] = 0. \tag{13}$$

Техника группового анализа оказывается успешно применимой также при рассмотрении специального класса задач, в которых решение U порождается действием некоторого (мгновенно или постоянно действующего) источника. В таких задачах на искомое решение U накладываются дополнительные условия, обусловленные законами сохранения. Рассмотрим математическую модель процесса возникновения электромагнитного поля в ферромагнитной среде ($j = \sigma E$, $D = \varepsilon E$, $B = bH^{1/n}$, $n > 1$) под действием плоского или точечного источника электромагнитной энергии интенсивности $W_u(t)$ [5]:

$$\frac{1}{\theta^k}\left(\theta^k H_\theta\right)_\theta - \frac{b\sigma}{n} H^{(1-n)/n} H_t = 0, \quad k = 1, 2, 3; \tag{14}$$

$$H(\theta, 0) = 0, \quad H(\infty, t) = 0, \quad (\theta^k H_\theta)_\theta = 0; \tag{15}$$

$$\frac{b\omega_k}{n+1} \int_0^\infty H^{\frac{n+1}{n}} \theta^{k-1} d\theta + \frac{\omega_k}{\sigma} \int_0^t dt \int_0^\infty H_\theta^2 d\theta - \int_0^t W_u(t) dt. \tag{16}$$

Ядро основных групп G преобразований уравнения (14) представляется преобразованиями:

$$\begin{array}{llll} P_1: & \bar{\theta} = \alpha^{1/2}\theta, & \bar{t} = \alpha t, & \bar{H} = H; \\ P_2: & \bar{\theta} = \alpha^{-b/2}\theta, & \bar{t} = t, & \bar{H} = \alpha H; \\ P_3: & \bar{\theta} = \theta + \alpha, & \bar{t} = t, & \bar{H} = H. \end{array}$$

Если считать, что интенсивность источника $W_u(t)$ — степенная функция, т. е. $W_u(t) = pwt^{p-1}$, то рассматриваемая задача (14)–(16) будет инвариантно разрешимой относительно группы преобразований

$$P = c_1P_1 + c_2P_2: \ \bar\theta = \alpha^{\frac{c_1-bc_2}{2}}\theta, \quad \bar t = \alpha^{c_1}t, \quad \bar H = \alpha^{c_2}H, \tag{17}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Действительно, выразив решение $H(\theta, t)$ через инварианты V и η

$$H(\theta, t) = t^m V(\eta), \quad \eta = \theta^2/t^l, \quad m = c_2/c_1, \quad l = 1 - bc_2/c_1, \tag{18}$$

и подставив в исходное уравнение и условия (15), (16), получим редуцированную задачу

$$\eta^{\frac{k+1}{2}}\left(\eta^{\frac{k+1}{2}}V'\right) + \frac{\sigma b}{4n}\left(\frac{m}{\eta}V - lV'\right)V^{\frac{1-n}{n}} = 0, \quad 0 \le \eta < \infty, \tag{19}$$

$$V(\infty) = 0, \quad \left(\eta^{\frac{k+1}{2}}V'\right)_{\eta=0} = 0, \tag{20}$$

$$t^{\mu}\left[\frac{b}{2(n+1)}\int_0^\infty V^{\frac{n+1}{n}}\eta^{\frac{k+1}{2}}d\eta + \frac{4}{\sigma p}\int_0^\infty (V')^2\eta^{\frac{k+1}{2}}d\eta\right] = \frac{W}{\omega}t^p. \tag{21}$$

Из равенств (20) следует, что начально-краевая задача (14)–(16) будет инвариантно разрешимой относительно группы масштабных преобразований (17) при условии $p = 2m + 1 + (k+1)l/2$, откуда $c_1 = c_2$ и решение ее сводится к решению краевой задачи (19) – (21).

Возможности применения техники и методов группового анализа при решении краевых задач до настоящего времени окончательно еще не оценены. Наряду с фактом упрощения исходной задачи путем понижения порядка уравнения появляется необходимость в дополнительном исследовании вопросов существования и поиска решений редуцировонной задачи. Дополнительного исследования требуют также и получаемые инвариантные решения на предмет их физического смысла и устойчивости. В общем случае групповой анализ является аппаратом, дающим лишь математическое решение задач математической физики и может быть применен при построении фундаментальной математической теории краевых задач математической физики.

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Меньшиков В. М.* О непрерывном сопряжении инвариантных решений // Динамика сплошной среды. – 1972. – Вип. 10. – С. 70 – 84.
3. *Пухначев В. В.* Неустановившееся движение вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично-инвариантными решениями уравнения Навье – Стокса // Там же. – 1972. – Вип. 10. – С. 125 – 137.
4. *Березовский А. А., Нетесова Т. М.* Автомодельные решения задачи опреснения морских вод // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 41 – 46.
5. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч. II. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – 282 с.

Получено 18.04.97