УДК 517.9

Т. А. Мельник (Одес. ун-т)

ЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

We establish the closeness of solutions of a linear singularly perturbed problem with asymptotically large impulse influences and of the corresponding degenerate problem.

Встановлена близькість розв'язків лінійної сингулярно збуреної задачі з асимптотично великими імпульсними діями та відповідної виродженої задачі.

В статье исследуются линейные сингулярно возмущенные задачи с импульсными воздействиями, допускающие в отличие от работ [1, 2] асимптотически большие разрывы быстрых переменных.

1. Постановка задачи. Рассматривается решение линейной сингулярно возмущенной системы

$$\mu\dot{z} = A_{1i}(t)z + A_{2i}(t)y + f_{1i}(t),$$

$$\dot{y} = A_{3i}(t)z + A_{4i}(t)y + f_{2i}(t), \quad t \neq t_i, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$z(0,\mu) = z^0, \quad y(0,\mu) = y^0, \tag{2}$$

допускающее в момент времени $t = t_i$, $i = \overline{1, n}$, разрывы первого рода:

$$\mu\Delta z\big|_{t=t_i(\mu)} = B_{1i}(\mu)x(t_i,\mu) + B_{2i}(\mu),$$

$$\Delta y\big|_{t=t_i(\mu)} = B_{3i}(\mu)x(t_i,\mu) + B_{4i}(\mu). \tag{3}$$

Здесь $\mu > 0$ – малый параметр; $t \in I = [0, T]$; $z \in R^M$, $y \in R^m$, $x = \begin{pmatrix} z \\ - \\ y \end{pmatrix}$ $\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i+0,\mu) - x(t_i-0,\mu)$; решение $x(t,\mu)$ задачи (1) – (3) для определенности будем считать непрерывным слева; $t_i(\mu) \in (0, T)$ — моменты времени занумерованные в возрастающем порядке.

Пусть выполняются условия

1) $\lim\limits_{\mu\to 0} t_i(\mu) = \bar{t}_i$, $\lim\limits_{\mu\to 0} B_{ki}(\mu) = \overline{B_{ki}}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, 4}$;

2) собственные значения $\lambda_{ri}(t)$ матрицы $A_{1i}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Re}\lambda_{ri}(t) \le -\alpha < 0, \quad t \in I_i, \quad r = \overline{1, M},$$

где $I_i = [\bar{t}_i - \varepsilon, \bar{t}_{i+1} + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, — некоторая константа;

3) матрицы $A_{ki}(t)$, $k = \overline{1, 4}$, $f_{ji}(t)$, $j = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, n}$, непрерывно дифференцируемы на I_i.

Вырожденная задача, соответствующая задаче (1) – (3), имеет вид

$$0 = A_{1i}(t)\bar{z} + A_{2i}(t)\bar{y} + f_{1i}(t), \quad t \neq \bar{t}_i,$$

$$\dot{\bar{y}} = A_{3i}(t)\bar{z} + A_{4i}(t)\bar{y} + f_{2i}(t), \tag{4}$$

$$\bar{y}(0) = y^0, \tag{5}$$

$$\Delta\bar{y} = \left[\overline{B_{3i}} - A_{0i}(\bar{t}_i)\overline{B_{1i}}\right]\bar{x}(\bar{t}_i) + \left[\overline{B_{4i}} - A_0(\bar{t}_i)\overline{B_{2i}}\right], \qquad (6)$$

где $A_{0i}(t) = A_{3i}(t)A_{1i}^{-1}(t)$, причем вырожденную задачу (4) – (6) нельзя получить из задачи (1) – (3) формально, полагая параметр μ равным нулю.

2. Основной результат. Близость решений $x(t,\mu)$ и $\bar{x}(t)$ задач (1) – (3) и (4) – (6) соответственно устанавливает следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия* 1 – 3. *Тогда справедлива оценка*

$$\|z(t,\mu) - \bar{z}(t)\| \le \gamma(\mu) + \frac{C}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-k\frac{t-t_i}{\mu}\right)H(t,t_i) +$$

$$+ C\exp\left(-k\frac{t}{\mu}\right) + C\sum_{i=1}^{n}|H(t,t_i) - H(t,\bar{t}_i)|, \qquad (7)$$

$$\|y(t,\mu) - \bar{y}(t)\| \le$$

$$\le \gamma(\mu) + C\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-k\frac{t-t_i}{\mu}\right)H(t,t_i)\,C\sum_{i=1}^{n}|H(t,t_i) - H(t,\bar{t}_i)| +$$

$$+ C\sum_{i=1}^{n}|H(t,t_i) - H(t,\bar{t}_i)|,$$

где $\gamma(\mu)\to 0$ *при* $\mu\to 0$; $H(t,t_i)=1$ *для* $t>t_i$; $H(t,t_i)=0$ *при* $t\le t_i$; $k>0$; $C>0$.

3. Частные случаи. Пусть выполняются условия 1 – 3. Рассмотрим задачу (1), (2), у которой быстрые переменные имеют разрыв порядка $O(1)$, т. е.

$$\Delta z|_{t=t_i(\mu)} = B_{1i}(\mu)x + B_{2i}(\mu), \quad \Delta y|_{t=t_i(\mu)} = B_{3i}(\mu)x + B_{4i}(\mu). \qquad (8)$$

Тогда дополнительные условия в вырожденной задаче (4), (5) имеют вид

$$\Delta\bar{y}|_{t=\bar{t}_i} = \overline{B}_{3i}\bar{x}(\bar{t}_i) + \overline{B}_{4i}. \qquad (9)$$

Здесь вырожденную задачу (4), (5), (9) можно получить из задачи (1), (2), (8), формально полагая параметр μ равным нулю.

Следствие **1.** *Для решений* $x(t,\mu)$ *и* $\bar{x}(t)$ *задач* (1), (2), (8), *и* (4), (5), (9) *выполняются оценки*

$$\|z(t,\mu) - \bar{z}(t)\| \le \Gamma_1(\mu), \quad \|y(t,\mu) - \bar{y}(t)\| \le \Gamma_2(\mu), \quad t\in I,$$

где $t_0 = 0$,

$$\Gamma_1(\mu) = \gamma(\mu) + C\sum_{i=0}^{n}\exp\left(-k\frac{t-t_i}{\mu}\right)H(t,t_i) + C\sum_{i=1}^{n}|H(t,t_i) - H(t,\bar{t}_i)|,$$

$$\Gamma_2(\mu) = \gamma(\mu) + C\sum_{i=1}^{n}|H(t,t_i) - H(t,\bar{t}_i)|.$$

Если в задаче (1), (2) дополнительные условия имеют вид

$$\Delta z|_{t=t_i(\mu)} = B_{1i}(\mu)x(t_i,\mu) + B_{2i}(\mu),$$

$$\Delta y|_{t=t_i(\mu)} = \mu[B_{3i}(\mu)x(t_i,\mu) + B_{4i}(\mu)], \qquad (10)$$

то в соответствующей задаче (4), (5) дополнительные условия отсутствуют.

Следствие 2. *Для решений* $x(t,\mu)$ *и* $\bar{x}(t)$ *задач* (1), (2), (10) *и* (4), (5) *выполняются неравенства*

$$\|z(t,\mu) - \bar{z}(t)\| \le \Gamma_1(\mu), \quad \|y(t,\mu) - \bar{y}(t)\| \le \gamma(\mu), \quad t \in I. \tag{11}$$

Рассмотрим задачу (1), (2), в которой

$$\Delta z|_{t=t_i(\mu)} \in Z, \quad \Delta y|_{t=t_i(\mu)} \in \mu Y, \tag{12}$$

где $Z \subset R^M$, $Y \subset R^m$ — компактные множества.

Следствие 3. *Для любых решений* $x(t,\mu)$ *задачи* (1), (2), (12) *и решения задачи* (4), (5) *справедлива оценка* (11)

Пусть в задаче (1), (2) дополнительные условия имеют вид

$$\Delta z|_{t=t_i(\mu)} \in Z, \quad \Delta y|_{t=t_i(\mu)} \in Y, \tag{13}$$

в соответствующей вырожденной задаче (4), (5) дополнительные условия примут вид

$$\Delta\bar{y}|_{t=\bar{t}_i} \in Y. \tag{14}$$

Следствие 4. Для множеств $X(t,\mu)$ и $\overline{X}(t)$ решений $x(t,\mu)$ и $\bar{x}(t)$ задач (1), (2), (13) и (4), (5), (14) справедливы неравенства

$$h(Z(t,\mu), \overline{Z}(t)) \le \Gamma_1(\mu), \quad h(Y(t,\mu), \overline{Y}(t)) \le \Gamma_2(\mu),$$

где $h(\cdot,\cdot)$ — расстояние по Хаусдорфу.

4. Доказательство теоремы. В силу условия 2) матрица $A_{2i}(t)$ невырожденная. Таким образом, получим из системы (4) при $t \in (\bar{t}_i, \overline{t_{i+1}}]$

$$\bar{z}(t) = -A_{1i}^{-1}(t)[A_{2i}(t)\bar{y}(t) + f_{1i}(t)],$$
$$\dot{\bar{y}} = [A_{4i}(t) - A_{0i}(t)A_{2i}(t)]\bar{y} + [f_{2i}(t) - A_{0i}(t)f_{1i}(t)] \tag{15}$$

и из системы (1) при $t \in (t_i, t_{i+1}]$

$$z(t,\mu) = -A_{1i}^{-1}(t)[A_{2i}(t)y(t,\mu) + f_{1i}(t) - \mu\dot{z}(t,\mu)],$$
$$\dot{y} = [A_{4i}(t) - A_{0i}(t)A_{2i}(t)]y + [f_{2i}(t) - A_{0i}(t)f_{1i}(t)] +$$
$$+ \mu A_{0i}(t)\dot{z}(t,\mu). \tag{16}$$

Согласно формуле Коши решение $z(t,\mu)$ первого уравнения системы (1) и решение $y(t,\mu)$ второго уравнения системы (16) на промежутке $(t_i, t_{i+1}]$ можно представить в виде

$$z(t,\mu) = Z_i(t,t_i,\mu)K_{1i}(\mu) + \frac{1}{\mu}\int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)[A_{2i}(s)y(s,\mu) + f_{1i}(s)]ds,$$
$$y(t,\mu) = Y_i(t,t_i)[y(t_i,\mu) + B_{3i}x(t_i,\mu) + B_{4i}(\mu)] +$$
$$+ \int_{t_i}^{t} Y_i(t,s)[f_{2i}(s) - A_{0i}(s)f_{1i}(s)]ds + \mu\int_{t_i}^{t} Y_i(t,s)A_{0i}(s)\dot{z}(s,\mu)ds, \tag{17}$$

где $Z_i(t,s,\mu)$ и $Y_i(t,s)$ — фундаментальные матрицы систем

$$\mu\frac{\partial Z_i}{\partial t} = A_{1i}(t)Z_i, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial t} = [A_{4i}(t) - A_{0i}(t)A_{2i}(t)]Y_i,$$

$$Z_i(s,s,\mu) = E_M, \quad Y_i(s,s) = E_m, \tag{18}$$

$$K_{1i}(\mu) = z(t_i,\mu) + \frac{1}{\mu}[B_{1i}(\mu)x(t_i,\mu) + B_{2i}(\mu)].$$

Из второго уравнения системы (17) с помощью интегрирования по частям заключаем

$$y(t,\mu) = Y(t,t_i)K_{2i}(\mu) + \int_{t_i}^{t} Y(t,s)\,[f_2(s) - A_0(s)f(s)]ds +$$

$$+ \mu A_0(t)z(t,\mu) - \mu\int_{t_i}^{t}\frac{d}{ds}[Y(t,s)A_0(s)]z(s,\mu)ds, \tag{19}$$

где $t \in (t_i, t_{i+1}]$,

$$K_{2i}(\mu) = y(t_i,\mu) + B_{3i}(\mu)x(t_i,\mu) + B_{4i}(\mu) - \mu A_0(t_i)z(t_i+0,\mu) =$$

$$= y(t_i,\mu) + [B_{3i}(\mu) - A_0(t_i)B_{1i}(\mu)]x(t_i,\mu) +$$

$$+ [B_{4i}(\mu) - A_0(t_i)B_{2i}(\mu)] - \mu A_0(t_i)B_{2i}(\mu).$$

Подставим полученное представление (19) для $y(t,\mu)$ в первое уравнение системы (17). Тогда при $t_i < t \le t_{i+1}$

$$z(t,\mu) = Z(t,t_i,\mu)K_{1i}(\mu) + \sum_{k=1}^{3} I_{ki}(\mu) +$$

$$+ \int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)A_2(s)A_0(s)z(t,\mu)ds -$$

$$- \int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)\frac{\partial}{\partial s}[Y_i(t,s)A_0(s)]z(s,\mu)ds. \tag{20}$$

Здесь

$$I_{1i}(\mu) = \frac{1}{\mu}\int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)\,A_2(s)Y_i(s,t_i)K_{2i}(\mu)ds,$$

$$I_{2i}(\mu) = \frac{1}{\mu}\int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)\,A_2(s)\int_{t_i}^{s} Y_i(s,\tau)[f_2(\tau) - A_0(\tau)f_1(\tau)]d\tau ds,$$

$$I_{3i}(\mu) = \frac{1}{\mu}\int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)f_{1i}(s)ds.$$

В интеграле $I_{2i}(\mu)$, поменяв местами пределы интегрирования, получим

$$I_{2i}(\mu) = \frac{1}{\mu}\int_{t_i}^{t}\int_{\tau}^{t} Z_i(t,s,\mu)A_{2i}(s)Y_i(s,\tau)[f_{2i}(\tau) - A_{0i}(\tau)f_{1i}(\tau)]dsd\tau.$$

Воспользуемся тем, что в силу системы (18)

$$Z_i(t, s, \mu) = -\mu \frac{\partial Z_i(t,s,\mu)}{\partial s} A_{1i}^{-1}(s),$$

тогда

$$I_{1i}(\mu) = -\int_{t_i}^{t} \frac{\partial Z_i(t,s,\mu)}{\partial s} A_{1i}^{-1}(s) A_{2i}(s) Y_i(s,t_i) K_{2i}(\mu) ds =$$

$$= A_{1i}^{-1}(t) A_{2i}(t) Y_i(t,t_i) K_{2i}(\mu) + Z_i(t,t_i,\mu) A_{1i}^{-1}(t_i) A_{2i}(t_i) K_{2i}(\mu) + I_{5i}(\mu),$$

$$I_{2i}(\mu) = -\int_{t_i}^{t}\int_{\tau}^{t} \frac{\partial Z_i(t,s,\mu)}{\partial s} A_{1i}^{-1}(s) A_{2i}(s) Y_i(s,\tau)[f_{2i}(\tau) - A_{0i}(\tau) f_{1i}(\tau)] ds d\tau =$$

$$= -\int_{t_i}^{t} A_{1i}^{-1}(t) A_{2i}(t) Y_i(t,\tau)[f_{2i}(\tau) - A_{0i}(\tau) f_{1i}(\tau)] d\tau + I_{5i}(\mu),$$

$$I_{3i}(\mu) = -\int_{t_i}^{t} \frac{\partial Z_i(t,s,\mu)}{\partial s} A_{1i}^{-1}(s) f_{1i}(s)\, ds =$$

$$= -A_{1i}^{-1}(t) f_{1i}(t) + Z_i(t,t_i\mu) A_{1i}^{-1}(t_i) f_{1i}(t_i) + I_{6i}(\mu),$$

где

$$I_{4i}(\mu) = \int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu) \frac{\partial}{\partial s}\Big(A_{1i}^{-1}(s) A_{2i}(s) Y_i(s,t_i)\Big) K_{1i}(\mu) ds,$$

$$I_{5i}(\mu) = \int_{t_i}^{t} Z_i(t,\tau\mu) A_{1i}^{-1}(\tau) A_{2i}(\tau)[f_{2i}(\tau) - A_{0i}(\tau) f_{1i}(\tau)] d\tau +$$

$$+ \int_{t_i}^{t}\int_{\tau}^{t} Z_i(t,s,\mu) \frac{\partial}{\partial s}[A_{1i}^{-1}(s) A_{2i}(s) Y_i(s,\tau)] ds [f_{2i}(\tau) - A_{0i}(\tau) f_{1i}(\tau)] d\tau,$$

$$I_{6i}(\mu) = \int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu) \frac{d}{ds}[A_{1i}^{-1}(s) f_{1i}(s)] ds.$$

В силу оценки [3]

$$\| Z_i(t,s,\mu) \| \le C \exp \frac{-\alpha(t-s)}{\mu}, \tag{21}$$

заметим, что $I_{4i}(\mu) + I_{5i}(\mu) + I_{6i}(\mu) \le \beta(\mu)$, где $\|\beta(\mu)\| \to 0$ при $\mu \to 0$.

Таким образом, соотношение (20) примет вид

$$z(t, \mu) = Z_i(t,t_i,\mu)[K_{1i}(\mu) A_{1i}^{-1}(t_i) A_{2i}(t_i)(K_{2i}(\mu) + f_{1i}(t_i))] +$$

$$+ \beta(\mu) - A_{1i}^{-1}(t) A_{2i}(t) Y_i(t,t_i) K_{2i}(\mu) -$$

$$- A_{1i}^{-1}(t)[A_{2i}(t) \int_{t_i}^{t} Y_i(t,s)[f_{2i}(s) - A_{0i}(s) f_{1i}(s)] ds + f_{1i}(t)] +$$

$$+\int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)A_{2i}(s)A_{0i}(s)z(s,\mu)ds\ -$$

$$-\int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)\frac{\partial}{\partial s}[Y_i(t,s)A_{0i}(s)]z(s,\mu)ds. \qquad (22)$$

Согласно формуле Коши из представлений (15) следует, что $\bar{y}(t)=\bar{y}_i(t)$, $\bar{z}(t)=\bar{z}_i(t)$ при $t\in(\bar{t}_i,\overline{t_{i+1}}]$, где

$$\bar{y}_i(t) = Y(t,t_i)\overline{K}_{2i} + \int_{t_i}^{t} Y_i(t,s)[f_{2i}(s)-A_{0i}(s)f_{1i}(s)]ds, \qquad (23)$$

$$\bar{z}_i(t) = -A_{1i}^{-1}(t)A_{2i}(t)Y_i(t,\bar{t}_i)\overline{K}_{2i}\ - \qquad (24)$$

$$-A_{1i}^{-1}(t)[A_{2i}(t)\int_{t_i}^{t} Y_i(t,s)[f_{2i}(s)-A_{0i}(s)f_{1i}(s)]ds+f_{1i}(t)],$$

$$\overline{K}_{2i} = \bar{y}(\bar{t}_i) + [\overline{B}_{3i}-A_0(\bar{t}_i)\overline{B}_{1i}]\bar{x}(\bar{t}_i)+[\overline{B}_{4i}-A_{0i}(\bar{t}_i)\overline{B}_{2i}].$$

Сравнивая представление (22) для $z(t,\mu)$ с представлением (23) для $\bar{z}_i(t)$, видим, что при $t\in(\bar{t}_i,\overline{t_{i+1}}]$

$$z(t,\mu)-\bar{z}_i(t) = Z_i(t,t_i,\mu)[K_{1i}(\mu)+A_1^{-1}(t_i)A_2(t_i)(K_{2i}(\mu)+f_1(t_i))] + \beta_1(\mu)\ +$$

$$+\int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)[A_{2i}(s)A_{0i}(s)-\frac{d}{ds}(Y_i(t,s)A_{0i}(s))][z(s,\mu)-\bar{z}_i(s)]ds, \qquad (25)$$

где

$$\beta_1(\mu) = \beta(\mu) - A_{1i}^{-1}(t)[A_{2i}(t)[Y_i(t,t_i)K_{1i}(\mu)-Y_i(t,\bar{t}_i)\overline{K}_{1i}(\mu)]\ -$$

$$-\int_{t_i}^{t} Z_i(t,s,\mu)[A_{2i}(s)A_{0i}(s)-\frac{d}{ds}(Y_i(t,s)A_{0i}(s))][\bar{z}_i(s)ds\ -$$

$$-A_{1i}^{-1}(t)A_{2i}(t)\int_{t_i}^{\bar{t}_i} Y_i(t,s)[f_{2i}(s)-A_{0i}(s)]\,f_{1i}(s)]ds.$$

Обозначая через $r(t)=\exp(\alpha t/\mu)\,\|\,z(t,\mu)-\bar{z}_i(t)\,\|$, из (25) и (21) получаем

$$r(t) \le h(t) + C\int_{t_i}^{t} r(s)ds, \qquad (26)$$

где

$$h(t) = \frac{C}{\mu}e^{\alpha t_i/\mu}+e^{\alpha t/\mu}\|\beta_1(\mu)\|, \quad \lim_{\mu\to 0}\|\beta_1(\mu)\| = 0.$$

Применяя лемму Гронуолла – Беллмана [4] к неравенству (26), приходим к оценке

$$r(t) \leq h(t) + C\int_{t_i}^{t} h(s)e^{C(t-s)}ds, \qquad t \in (t_i', t_{i+1}'],$$

откуда при $t \in (t_i, t_{i+1}]$

$$\| z(t, \mu) - \bar{z}_i(t) \| \leq \| \beta_1(\mu) \| + \frac{C}{\mu} e^{-\alpha(t-t_i)/\mu}. \tag{27}$$

Из соотношений (19) и (23) вытекает

$$y(t, \mu) - \bar{y}_i(t) = [Y_i(t, t_i) K_{2i}(\mu) - Y_i(t, \bar{t}_i) \bar{K}_{2i}(\mu)] +$$

$$+ \mu A_{0i}(t) z(t, \mu) - \mu \int_{t_i}^{t} \frac{\partial}{\partial s} [Y_i(t, s) A_{0i}(s)] z(s, \mu) ds -$$

$$- \int_{\bar{t}_i}^{t_i} Y_i(t, s) [f_{2i}(s) - A_{0i}(s) f_{1i}(s)] ds.$$

Следовательно,

$$\| y(t, \mu) - \bar{y}_i(t) \| \leq \| \beta_1(\mu) \| + Ce^{-\alpha(t-t_i)/\mu}. \tag{28}$$

Оценка (7) вытекает из неравенства

$$\| \bar{x}(t) - \bar{x}_i(t) \| \leq$$

$$\leq C|H(t, t_i) - H(t, \bar{t}_i)| + C|H(t, t_{i+1}) - H(t, \bar{t}_{i+1})|, \quad t \in (t_i, t_{i+1}]$$

и оценок (27), (28).

1. *Перестюк Н. А., Лисовская В. П.* Периодические решения сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений, подверженных импульсному воздействию // Дифференц. уравнения с малым параметром. –Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 85 – 93.
2. *Bainov D.D., Hekimova M. A., Veliov V. M.* Boundary value problem for a singularly perturbed system of linear differential equations with impulses // Proc. Edin. Math. Soc. – 1988. – **31**. – P. 107 – 126.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
4. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.

Получено 14.06.96