УДК 519. 21

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МЕРЫ ПОСЕЩЕНИЯ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИТЕРАЦИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

By using local visitation measures, we describe the limit behavior of a sequence of iterations with random unequally distributed perturbations. As a corollary, we obtain a version of the local ergodic theorem.

За допомогою локальних мір перебування описано граничну поведінку послідовності ітерацій з випадковими не однаково розподіленими збуреннями. Як наслідок отримано варіант локальної ергодичної теореми.

1. Меры посещения. В данной работе исследуется поведение рекуррентных последовательностей вида

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) + \xi_n, \quad n \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Здесь $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — непрерывная функция, $\{\xi_n;\, n \geq 0\}$ — последовательность независимых случайных векторов в $\mathbb{R}^d$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для последовательности (1) множество частичных пределов и частота посещения их окрестностей могут быть описаны в терминах мер посещения, введенных в [1]. Поэтому этот пункт содержит определения и факты из [1], необходимые в дальнейшем.

Пусть $\{u_n;\, n \geq 0\}$ — детерминированная последовательность элементов из $\mathbb{R}^d$.

Определение 1. *Считающей мерой последовательности* $\{u_n;\, n \geq 0\}$ *для* $n \geq 0$ *называется мера*

$$\nu_n = \sum_{k=0}^{n} \delta_{u_k},$$

где δ_u — *мера единичной массы, сосредоточенная в точке* u.

Определение 2. *Последовательность конечных мер* $\{\mu_n;\, n \geq 0\}$ *на* σ-*алгебре борелевских множеств пространства* $\mathbb{R}^d$ *называется возрастающей, если*

1) *для произвольного борелевского* $A \subset \mathbb{R}^d$ *последовательность* $\{\mu_n(A);\, n \geq 0\}$ *не убывает,*

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n(\mathbb{R}^d) = +\infty.$

Определение 3. *Точка* $u \in \mathbb{R}^d$ *называется точкой роста возрастающей последовательности мер* $\{\mu_n;\, n \geq 0\}$, *если* $\forall\, \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(B(u, \varepsilon)) = +\infty.$$

Здесь $B(u, \varepsilon)$ — *открытый шар радиуса* ε *с центром в* u.

Множество всех точек роста возрастающей последовательности мер $\{\mu_n;\, n \geq 0\}$ обозначим $\mathfrak{M}_{\vec{\mu}}$. Это замкнутое множество. Если $\{\nu_n;\, n \geq 0\}$ — последовательность считающих мер последовательности $\{u_n;\, n\ge 0\}$, то $\mathfrak{M}_{\overline{\nu}}$ — множество частичных пределов $\{u_n;\, n\ge 0\}$.

Определение 4. *Две последовательности возрастающих мер* $\{\mu_n;\, n\ge 0\}$ *и* $\{\lambda_n;\, n\ge 0\}$ *эквивалентны, если*

1) $\mathfrak{M}_{\overline{\mu}} = \mathfrak{M}_{\overline{\lambda}} = \mathfrak{M} \ne \emptyset$,

2) *для любых ограниченных открытых множеств* U_1 *и* U_2 *таких, что замыкание* $\overline{U}_1 \subset U_2$, $U_1 \cap \mathfrak{M} \ne \emptyset$,

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mu_n(U_2)}{\lambda_n(U_1)} \ge 1, \qquad \varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n(U_2)}{\mu_n(U_1)} \ge 1.$$

Определение 5. *Последовательность мер, эквивалентная последовательности считающих мер последовательности* $\{u_n;\, n\ge 0\}$, *называется последовательностью мер посещения* $\{u_n;\, n\ge 0\}$.

В [1] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если возрастающая последовательность мер* $\{\mu_n;\, n\ge 0\}$ *эквивалентна последовательности* $\{c_n\lambda;\, n\ge 0\}$, *где* $\{c_n;\, n\ge 0\}$ — *числовая последовательность, а* λ — *вероятностная мера на* $\mathbb{R}^d$, *то меры* $\{\mu_n/c_n;\, n\ge 0\}$ *сходятся слабо к* λ.

Теорема 2. *Пусть* $\{\eta_n;\, n\ge 0\}$ — *ограниченная последовательность независимых случайных векторов в* $\mathbb{R}^d$. *Тогда существует множество* $\Omega_0 \subset \Omega$ *такое, что* $P(\Omega_0)=1$ *и для любого* $\omega\in\Omega_0$ *последовательность*

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} P\eta_i^{(-1)};\ n\ge 0 \right\} \tag{2}$$

является последовательностью мер посещения для $\{\eta_n(\omega);\, n\ge 0\}$.

Теорема 2 может быть интерпретирована следующим образом. С вероятностью 1 последовательность $\{\eta_n;\, n\ge 0\}$ имеет постоянное множество частичных пределов и частота посещения окрестностей частичных пределов описывается мерами (2). В некоторых случаях утверждения теорем 1 и 2 можно комбинировать, что приводит к эргодической теореме для исходной случайной последовательности (не обязательно состоящей из независимых случайных величин [2]). Цель данной статьи — получить аналог теоремы 2 для последовательности (1). Для этого нам понадобится дополнительное определение.

Определение 4 очевидным образом распространяется на случай σ-конечных мер $\{\mu_n;\, n\ge 1\}$ и $\{\lambda_n;\, n\ge 1\}$, сужения которых на каждый шар конечны.

Определение 5. *Возрастающая последовательность мер (возможно* σ*-конечных) эквивалентна последовательности считающих мер последовательности* $\{u_n;\, n\ge 1\}\subset\mathbb{R}^d$ *называется последовательностью локальных мер посещения последовательности* $\{u_n;\, n\ge 1\}$.

2. Меры посещения для последовательности итераций. Предположим, что функция φ из (1) такова, что

$$\exists\,\alpha\in(0;1):\ \forall x,y\in\mathbb{R}^d:\ \|\varphi(x)-\varphi(y)\| \le \alpha\|x-y\|.$$

Пусть случайные векторы $\{\xi_n;\, n\ge 0\}$ имеют распределения абсолютно непрерывные относительно меры Лебега с плотностями $\{p_n;\, n\ge 1\}$.

Теорема 3. *Пусть существует борелевская функция* $p\colon \mathbb{R}^d \to (0;\, +\infty)$, *для которой*

1) *существует сходящаяся к* $+\infty$ *последовательность* $\{a_n;\, n \geq 1\}$ *такая, что* $\forall\, n \geq 1$:

$$0 < \alpha_n = \inf\left\{\frac{p_n(x)}{p(x)} : \|x\| \leq a_n\right\} \leq$$

$$\leq \beta_n = \sup\left\{\frac{p_n(x)}{p(x)} : \|x\| \leq a_n\right\} < +\infty;$$

2) $\alpha_n \to 0,\ n \to \infty,\ \alpha_n \sim \beta_n,\ n \to \infty;$

3) $\forall\, m \geq 1,\ r = 0, 1, \ldots, m-1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{km+r} = +\infty;$$

4) $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \varphi(x) = u_0.$

Тогда существует множество Ω_0 *полной вероятности такое, что для любого* $\omega \in \Omega_0$ *последовательность* $\{x_n(\omega);\, n \geq 0\}$ *имеет в качестве последовательности локальных мер посещения последовательность* $\{\gamma_n \sigma;\, n \geq 0\}$, *где*

$$\gamma_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \qquad n \geq 1, \qquad d\sigma = p(x - u_0)\,dx.$$

Доказательство. Для каждого $m \geq 1$ определим последовательность $\{x_n^m;\, n \geq m\}$ следующим образом:

$$x_n^m = \xi_n + \varphi(\xi_{n-1} + \varphi(\xi_{n-2} + \ldots + \varphi(\xi_{n-m+1} + \varphi(0)))\ldots). \tag{3}$$

Поскольку функция φ удовлетворяет условию Липшица с $\alpha < 1$ и ограничена, то

$$\lim_{m \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} \left\| x_n - x_n^m \right\| = 0 (\operatorname{mod} P).$$

Построим вначале последовательность локальных мер посещения для последовательности $\{x_n^m;\, n \geq m\}$ при фиксированном m. Рассмотрим для $r = 0$, $1, \ldots, m-1$ последовательность $\{x_{jm+r}^m;\, j \geq 1\}$. Согласно (3) это последовательность независимых случайных элементов в $\mathbb{R}^d$. Следовательно, аналогично теореме 2, $\{x_{jm+r}^m;\, j \geq 1\}$ на множестве полной вероятности имеет своей последовательностью мер посещений последовательность сумм распределений вида

$$\sum_{j=1}^{n} P\left(x_{jm+r}^m\right)^{(-1)}, \qquad n \geq 1. \tag{4}$$

Для того чтобы исследовать асимптотическое поведение последовательности мер (4), рассмотрим отдельное слагаемое $P\left(x_n^m\right)^{(-1)}$ при $n \to \infty$. Согласно определению 5 достаточно исследовать поведение $P\left\{x_n^m \in \Delta\right\}$ для открытых ограниченных Δ. Обозначим через v_n^m распределение $x_n^m - \xi_n$. Тогда для достаточно больших номеров n

$$P\{x_n^m \in \Delta\} = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Delta} p_n(y-x)dy v_n^m(dx) \geq$$

$$\geq \alpha_n \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Delta} p_n(y-x)dy v_n^m(dx),$$

$$P\{x_n^m \in \Delta\} \leq \beta_n \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Delta} p_n(y-x)dy v_n^m(dx).$$

Поскольку согласно условию $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, то

$$P - \lim_{n\to\infty} \|\xi_n\| = +\infty.$$

Поэтому при $m \geq 1$

$$P - \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n^m) = P - \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\xi_{n-1}^m + \varphi(x_{n-1}^{m-1})\right) = u_0.$$

Вследствие локальной интегрируемости функции p и ограниченности Δ функция

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \int\limits_{\Delta} p(y-x)dy$$

является непрерывной. Поэтому

$$P\{x_n^m \in \Delta\} \sim \alpha_n \int\limits_{\Delta} p(y-u_0)dy, \quad n\to\infty.$$

Согласно лемме Штольца

$$\sum_{j=1}^{n} P\left(x_{jm+r}^m\right)^{(-1)}(\Delta) \sim \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jm+r} \int\limits_{\Delta} p(y-u_0)dy, \quad n\to\infty.$$

Поэтому аналогично [1] для последовательности $\{x_{jm+r}^m;\, j\geq 1\}$ последовательность мер

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{jm+r}\sigma;\ n\geq 1\right\}$$

является последовательностью локальных мер посещения на множестве полной вероятности Ω_r. Пусть $\omega \in \bigcap\limits_{r=0}^{m-1} \Omega_r$, U_1 и U_2 — непустые открытые ограниченные множества такие, что замыкание $\overline{U_1}$ лежит в U_2. Тогда

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 :$

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_{U_2}(x_k^m(\omega)) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{k\equiv r(\mathrm{mod}\, m),\, k\leq n} \chi_{U_2}(x_k^m(\omega)) \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon)\sum_{r=0}^{m-1} \sum_{k\equiv r(\mathrm{mod}\, m),\, k\leq n} \alpha_k \sigma(U_1) = (1-\varepsilon)\gamma_n \sigma(U_1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_{U_1}(x_k^m(\omega)) \leq (1+\varepsilon)\gamma_n \sigma(U_2).$$

Следовательно, на множестве полной вероятности последовательность мер $\{\gamma_n \sigma; n \geq 1\}$ является последовательностью локальных мер посещения для $\{x_n^m; n \geq 1\}$. Для завершения доказательства теоремы осталось воспользоваться тем, что

$$\lim_{m \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} \left\| x_n - x_n^m \right\| = 0 \ (\mathrm{mod}\, P),$$

аналогично тому, как это делалось в [1]. Теорема доказана.

Следствие (локальная эргодическая теорема). *При выполнении условий теоремы 3 для любой непрерывной функции* $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *с компактным носителем справедливо равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\sigma(dy) \qquad (\mathrm{mod}\, P).$$

Замечание. Условие существования предела $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} = u_0$ можно заменить совместным условием на φ и последовательность $\{\xi_n; n \geq 1\}$, гарантирующим слабую сходимость мер $\{\upsilon_n^m; n \geq 1\}$ к пределу, не зависящему от m и имеющему компактный носитель. Кроме того, при $p \equiv 1$ надобность в условии 4 естественно отпадает и его можно заменить требованием ограниченности функции φ.

Пример. Пусть $\{\eta_n; n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин со средним 0 и дисперсией 1. Рассмотрим последовательность итераций

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sin x_n + n\eta_n, \qquad n \geq 1, \qquad x_1 = 0.$$

Для случайных величин $\xi_n = n\eta_n$, $n \geq 1$, выполнены условия теоремы с функцией $p \equiv 1$, $a_n = n^{1/4}$, $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)$, $n \geq 1$. Следовательно, последовательность итераций $\{x_n; n \geq 1\}$ на множестве полной вероятности имеет в качестве локальных мер посещения последовательность $\dfrac{\ln n}{\sqrt{2\pi}}\lambda$, $n \geq 2$, где λ — мера Лебега. В частности, для произвольной финитной непрерывной функции f с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\ln n} f(x_k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

1. *Дороговцев А. А.* Некоторые характеристики последовательностей итераций со случайными возмущениями // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1047 – 1063.
2. *Dorogovtsev A. A., Denisievskii N. A.* Path-wise behavior of stationary sequences // Theor. Stochast. Processes. – 1996. – **2 (18)**, № 3–4. – P. 17–26.

Получено 22.05.97