УДК 517.925.7

А. З. Мохонько, В. Д. Мохонько (Ун-т „Львов. политехника")

О ПОРЯДКЕ РОСТА РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Assume that f is an integer transcendental solution of the differential equation $P_n(z, f, f') = P_{n-1}(z, f, f', \ldots, f^{(p)})$, P_n, P_{n-1} are polynomials in all the variables, the order of P_n with respect to f and f' is equal to n, and the order of P_{n-1} with respect to $f, f', \ldots, f^{(p)}$ is at most $n-1$. We prove that the order ρ of growth of f satisfies the relation $1/2 \le \rho < \infty$. We also prove that if $\rho = 1/2$, then, for some real η, in the domain $\{z\colon \eta < \arg z < \eta + 2\pi\} \setminus E_*$, where E_* is some set of disks with the finite sum of radii, the estimate $\ln f(z) = z^{1/2}(\beta + o(1))$, $\beta \in C$, is true (here, $z = re^{i\varphi}$, $r \ge r(\varphi) \ge 0$, and if $z = re^{i\varphi}$, $r \ge r(\varphi) \ge 0$) and, on a ray $\{z\colon \arg z = \eta\}$, the relation $\ln|f(re^{i\eta})| = o(r^{1/2})$, $r \to +\infty$, $r > 0$, $r \,\overline{\in}\, \Delta$, holds, where Δ is some set on the semiaxis $r > 0$ with $\operatorname{mes}\Delta < \infty$.

Нехай f — цілий трансцендентний розв'язок диференціального рівняння $P_n(z, f, f') = P_{n-1}(z, f, f', \ldots, f^{(p)})$, P_n, P_{n-1} — многочлени від усіх змінних; степінь P_n відносно f і f' дорівнює n, степінь P_{n-1} відносно $f, f', \ldots, f^{(p)}$ не перевищує $n-1$. Доведено, що порядок ρ зростання f задовольняє нерівності $1/2 \le \rho < \infty$. Якщо $\rho = 1/2$, то для деякого дійсного η в області $\{z\colon \eta < \arg z < \eta + 2\pi\} \setminus E_*$ справедлива оцінка $\ln f(z) = z^{1/2}(\beta + o(1))$, $z \to \infty$, $\beta \in C$, для $z = re^{i\varphi}$, $r \ge r(\varphi) \ge 0$, де E_* — деяка множина кругів із скінченною сумою радіусів, а на промені $\{z\colon \arg z = \eta\}$ виконується $\ln|f(re^{i\eta})| = o(r^{1/2})$, $r \to +\infty$, $r > 0$, $r \,\overline{\in}\, \Delta$, де Δ — деяка множина на півосі $r > 0$ з $\operatorname{mes}\Delta < \infty$.

Используем обозначения теории мероморфных функций [1]. Как установил Валирон [2, с. 224], существуют алгебраические дифференциальные уравнения (д.у.) третьего порядка, имеющие целые трансцендентные решения, порядок роста которых $\rho = 0$. Позднее В. В. Зимогляд [3] показал, что д.у. второго порядка не имеет целых трансцендентных решений нулевого порядка роста. Известно [4, с. 70], что д.у. первого порядка

$$P(z, f, f') = 0, \tag{1}$$

где P — многочлен по всем переменным, не имеет целых трансцендентных решений порядка $\rho < 1/2$. Рассмотрим более общее по сравнению с (1) д.у. $(f^{(j)} = f_j,\ j = 1, \ldots, p)$

$$\sum_{k+s=n} (1 + o(1))\alpha_s z^{\tau_s} f^k f_1^s = \sum_{|K|<n} b_K(z) f^{k_0} f_1^{k_1} \ldots f_p^{k_p}, \tag{2}$$

$$K = (k_0, k_1, \ldots, k_p), \quad |K| = k_0 + k_1 + \ldots + k_p,$$

$$\|K\| = 1k_1 + 2k_2 + \ldots + pk_p;$$

$$b_K(z) = O(z^{\tau_K}), \quad z \in D = \{z\colon |z| \ge h\}, \tag{3}$$

$$|z| \to \infty, \quad k,\ s \in Z, \quad k,\ s \ge 0, \quad \tau_s, \tau_K \in R, \quad \alpha_s \in C.$$

Предположим, что все коэффициенты д.у. (2) — аналитические в D функции, например, $b_K(z) = \sin(1/z)$, $z \in D$.

Метод Вимана – Валирона позволяет охарактеризовать свойства целого решения алгебраического д.у. Опишем асимптотические свойства целого решения д.у. (2) на произвольном луче $\{z\colon \arg z = \varphi\}$ и в угловых областях. Чтобы сформулировать соответствующий результат, понадобятся несколько определений.

Пусть $f(z)$ — целое решение д.у. (2) в D. Обозначим $m = \{\max s : k+s = n,\ \alpha_s \neq 0;\ k, s \in Z,\ k, s \geq 0\}$. Разделим обе части (2) на $f^n z^{\tau_m - m}$; после простого преобразования получим

$$\sum_{s=0}^{m} (1+o(1))\alpha_s z^{\tau_s - s - \tau_m + m} \left(\frac{z f_1(z)}{f(z)}\right)^s =$$

$$= \sum_{|K| \leq n-1} b_K(z) z^{m-\tau_m} \frac{(f_1/f)^{k_1} \ldots (f_p/f)^{k_p}}{f^{n-|K|}}. \tag{4}$$

Если обозначить

$$\tau_s - s - \tau_m + m = d_s, \qquad \frac{z f_1(z)}{f(z)} = L(z), \tag{5}$$

$$\omega(z) = \sum_{|K| \leq n-1} b_K(z) z^{m-\tau_m} \frac{(f_1/f)^{k_1} \ldots (f_p/f)^{k_p}}{f^{n-|K|}}, \tag{6}$$

то д.у. (4) можно записать в виде

$$\sum_{s=0}^{m} (1+o(1))\alpha_s z^{d_s} (L(z))^s = \omega(z), \tag{7}$$

$$|z| \to \infty, \quad d_m = 0, \quad \alpha_m \neq 0.$$

По левой части (7) построим характеристическое уравнение

$$\sum_{s=0}^{m} \alpha_s z^{d_s} L^s = 0.$$

Это уравнение имеет конечное число решений

$$L(z) = (1+o(1))\beta_j z^{\rho_j}, \tag{8}$$

$$|z| \to \infty, \quad \beta_j = |\beta_j| \exp(i\alpha_j), \quad j = 1, 2, \ldots, q \leq m,$$

$\beta_j \in C$; ρ_j — рациональные числа, которые находятся с помощью ломаных Ньютона [4, с. 69].

Если в (8) $\rho_j > 0$, то для данных ρ_j и α_j существует конечное множество целых значений k, например, $k \in \{0, 1, \ldots, m_j\}$, таких, что для чисел

$$\varphi_j = \varphi(j, k) = \frac{2\pi k - \alpha_j}{\rho_j} \tag{9}$$

выполняются неравенства $0 \leq \varphi_j < 2\pi$. Положим

$$\eta_j = \eta(j, k) = \varphi_j - \frac{\pi}{2\rho_j}, \qquad \gamma_j = \gamma(j, k) = \varphi_j + \frac{\pi}{2\rho_j}, \tag{10}$$

$$j = 1, 2, \ldots, q, \qquad k = 0, 1, \ldots, m_j.$$

Уравнение (2) удовлетворяет условиям, при которых к его целым решениям применим метод Вимана – Валирона [2, с. 222]. В частности, известно, что любое целое решение f д.у. (2) имеет конечный порядок роста $\rho = \rho_j$, где ρ_j —

одно из чисел, определенных в (8). Пусть $\{c_q\}$ — множество всех нулей целого решения f и его производных $f_1, \dots, f_p$. Выберем произвольное $\sigma > 0$ и для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим замкнутый круг с центром c_q радиуса $\delta_q = |c_q|^{-\rho-(\sigma/2)}$. Через E_* обозначим множество точек, принадлежащих этим кругам. Тогда согласно теореме Валирона [4, с. 87]

$$\sum \delta_q < c; \quad \left|\frac{f_j(z)}{f(z)}\right| < c|z|^{2(\rho+\sigma)j}, \tag{11}$$

$$z \in D \setminus E_*, \quad c = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Для каждого $c_q \in \{c_q\}$ построим также интервал $[\,|c_q| - \delta_q, |c_q| + \delta_q]$. Пусть Δ — множество точек на $[0, \infty)$, принадлежащих этим интервалам. Учитывая (11), $\operatorname{mes} \Delta \le \sum 2\delta_q < \infty$, а E_* — множество кругов с конечной суммой радиусов.

Если $g(z)$ — целая (или мероморфная) в D функция, то обозначим

$$M(r, g) = \max\{|g(z)|,\ z\colon |z| = r\}. \tag{12}$$

Известно [1, с. 50], что для того, чтобы целая в плоскости C функция g была трансцендентной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln M(r, g)}{\ln r} = +\infty. \tag{13}$$

Целая функция $g(z)$, $z \in D$, называется трансцендентной, если выполняется (13).

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целое трансцендентное решение д.у.* (2) в D. *Тогда f имеет порядок роста* ρ, $1/2 \le \rho < +\infty$. *Выполняются также следующие свойства:*

1) *существует* $l \ge 1$ *углов* $G_j = \{z\colon \eta_j < \arg z < \gamma_j\}$, *для которых в* $G_j \setminus E_*$

$$\ln f(z) = z^{\rho_j}(\beta_j \rho_j^{-1} + o(1)), \qquad z \to \infty, \tag{14}$$

(*оценка равномерна по* $\arg z$ *в области* $\{z\colon \eta_j + \varepsilon < \arg z < \gamma_j - \varepsilon\} \setminus E_*$, $\varepsilon > 0$, ε — *произвольно заданное*);

2) *существуют* $q \ge 1$ *лучей* $\{z\colon \arg z = \theta_j\}$ (*стороны углов* G_j), *на которых*

$$\ln|f(re^{i\theta_j})| = o(r^\rho), \qquad r \to \infty, \quad r \,\overline{\in}\, \Delta, \quad \operatorname{mes} \Delta < \infty; \tag{15}$$

3) *на дополнении к указанным углам и лучам вне множества* E_*

$$|f(re^{i\varphi})| < r^\nu, \qquad r > r(\varphi), \quad r \,\overline{\in}\, \Delta, \quad \nu = \text{const}. \tag{16}$$

Здесь числа ρ_j и β_j, η_j и γ_j принимают какие-то из конечных множеств значений, определенных соответственно в (8), (10); $\nu = \max\limits_{|K| \le n-1} [\tau_K + m - \tau_m + 2\rho\|K\|] + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ε — как угодно малое.

Теорема 2. *Если д.у.* (2) *имеет в* D *целое решение* $f(z)$ *порядка* $\rho = 1/2$, *то существует* $\eta_j \in R$ *такое, что в области* $\{z\colon \eta_j < \arg z < \eta_j + 2\pi\} \setminus E_*$ *верно*

$$\ln f(z) = z^{1/2}(2\beta_j + o(1)), \qquad z \to \infty, \tag{17}$$

(*оценка равномерна по* $\arg z$ *в любой внутренней угловой области*), *а на луче* $\{z\colon \arg z = \eta_j\}$

$$\ln|f(re^{i\eta_j})| = o(r^{1/2}), \quad r \to +\infty, \quad r \,\overline{\in}\, \Delta. \tag{18}$$

Замечание 1. Функция $f(z) = \cos\sqrt{z}$, $z \in C$, является целым решением д.у. $f^2 + 4z(f')^2 = 0$ и имеет порядок $\rho = 1/2$, причем $\ln f(z) = \sqrt{z}(-i + o(1))$, $z \in \{z: 0 < \arg z < 2\pi\}$, $\arg z = \text{const}$, т. е. справедливо (17), и на луче $\{z: \arg z = 0\}$ выполняется (18).

Замечание 2. Покажем, как преобразуются утверждения теорем 1, 2, если рассматривать более широкий класс мероморфных решений. Сначала предположим, что $f(z)$ — мероморфное решение д.у. (1) в D. Для $x > 0$ положим $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$. Рассмотрим неванлинновскую характеристику $m(r,f) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$. В [5] было показано, что в рассматриваемом случае либо верно

$$m(r,f) \le \ln^+ M(r,f) < \nu \ln r, \quad r \,\overline{\in}\, \Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta < \infty, \tag{19}$$

$\nu > 0$, ν — некоторая константа, либо характеристика $m(r,f)$ имеет порядок ρ, $1/2 \le \rho < \infty$; если $\rho = 1/2$, то выполняются утверждения (17), (18), где E_* — множество кругов с конечной суммой радиусов, но с центрами в нулях и полюсах решения f.

Порядок роста мероморфной функции f совпадает с порядком p ее характеристики $T(r,f)$ [1, с. 65]. Порядок роста характеристики $m(r,f)$ обозначим через ρ. Если, в частности, $f(z)$ — целое решение (1), определенное в C, то $m(r,f) = T(r,f)$, $\rho = p$, и из (19) следует, что либо f — многочлен степени не выше ν, либо f — трансцендентная целая функция порядка $\rho \ge 1/2$.

Если $f(z)$ — мероморфное в угловой области $B = \{z: \alpha \le \arg z \le \beta\}$ решение д.у. (2) конечного порядка ρ, то, как показано в [6], в области B также выполняются некоторые утверждения, аналогичные сформулированным в пунктах 1 – 3 теоремы 1 данной статьи, за следующим исключением: в теореме 1 из [6] не утверждается, что существует по крайней мере одна угловая область и хотя бы один луч, на которых соответственно выполняется (14) и (15). Это отличие отражает особенности мероморфных решений. Например, решением уравнения $(f')^2 = 4f^3 + g_2 f + g_3$, $g_j = \text{const}$, является эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$, $z \in C$ [7, с. 359], а решениями уравнений Пенлеве $f'' = 6f^2 + z$ и $f'' = 2f^3 + zf + a$, $a = \text{const}$, являются трансцендентные функции Пенлеве [8]. Эти уравнения имеют вид (2), а их решения являются мероморфными функциями конечного порядка роста ρ [9] и для них выполняется оценка (см. [6]):

$$|f(z)| < |z|^\nu, \quad z \in C \setminus E_*, \quad |z| > R_1 > R, \quad \nu = \text{const} > 0, \tag{19'}$$

E_* — некоторое множество кругов с конечной суммой радиусов. Отсюда следует, что во всей области существования решения имеет место (16).

Остается невыясненным, существуют ли мероморфные решения д.у. (2), имеющие бесконечный порядок роста; неизвестна также точная оценка снизу порядка роста таких решений.

***Доказательство теорем* 1 *и* 2.** Из (3), (6), (11) следует, что существует $\nu_1 = \text{const} > 0$, определяемая по виду уравнения (2), такая, что

$$|b_K(z) z^{m-\tau_m} (f_1/f)^{k_1} \dots (f_p/f)^{k_p}| < |z|^{\nu_1}, \quad z \in D \setminus E_*. \tag{20}$$

Выберем $\nu = \text{const} > \nu_1$ и рассмотрим множества

$$E_1 = \{z\colon z\in D\backslash E_*,\ |f(z)| \ge |z|^{\nu}\},\qquad E = D\backslash\{E_1\cup E_*\}. \tag{21}$$

Учитывая (4), (5), (20), (21), получаем $(d_m = 0,\ \alpha_m \ne 0)$

$$\sum_{s=0}^{m} (1+o(1))\alpha_s z^{d_s}(L(s))^s = o(1),\qquad z\in E_1,\quad |z|\to\infty. \tag{22}$$

Если уравнение (22) не зависит от L, то в левой части д.у. (2) только одно слагаемое $(1+o(1))\alpha_0 z^{\tau_0} f^n$, $\alpha_0 \ne 0$, имеет по f и f_1 степень n. Тогда существует $R_1 > 0\colon E_1 \cap \{z\colon |z| > R_1\} = \varnothing$. Действительно, иначе уравнение (22) имеет вид $\alpha_0(1+o(1)) = o(1)$, $z\in E_1$, $z\to\infty$, а значит, $\alpha_0 = 0$, что противоречит предположению. Поэтому из (21) следует $|f(z)| \le |z|^{\nu}$, $z\in D\backslash E_*$, $|z| > R_1$, т. е. в рассматриваемом случае во всей области D имеет место утверждение 3 теоремы 1. (Отметим, что в примерах, рассмотренных в замечании 2, характеристические уравнения не зависят от L, поэтому для них и выполняется оценка (19$'$).)

Если уравнение (22) зависит от L, $L = zf_1(z)/f(z)$, то оно имеет конечное число решений [4, с. 69]

$$\frac{zf_1(z)}{f(z)} = (\beta_j + o(1))z^{\rho_j},\qquad z\in E_1,\quad j = 1,2,\dots,q,\quad |z|\to\infty. \tag{23}$$

Пусть $z_*\in E_1$, $|z_*| \ge r_0 > h$. Рассмотрим связную компоненту E_0, $z_*\in E_0\subset E_1$. В каждой точке $z\in E_0$, $|z| \ge r_0$, r_0 — достаточно большое, выполняется одно из соотношений (23). Ни в одной точке $z\in E_0$ не могут быть равными правые части двух соотношений из (23) с индексами t и j такими, что $|\beta_t - \beta_j| + |\rho_t - \rho_j| > 0$. В точке $z_*\in E_0\subset E_1$ выполняется (23) с некоторыми фиксированными j. Учитывая непрерывность $zf'(z)/f(z)$, получаем, что то же соотношение выполняется для каждого $z\in E_0$, $|z| > r_0$. Поэтому из (23) следует, что при каждом $\varepsilon > 0$ существует $r_0 > 0$ такое, что

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = (\beta + u(z))z^{\rho},\qquad z\in E_0,\quad |u(z)| < \varepsilon, \tag{24}$$

$|z| > r_0$, $u(z)$ — некоторая функция, $\beta = \beta(E_0)$, $\rho = \rho(E_0)$; β, ρ — одно из чисел β_j, ρ_j. Обозначим

$$M(r) = M(r,f) = \max_{|z|=r}|f(z)| = |f(\zeta)|,\qquad \zeta = r\exp(i\varphi(r)). \tag{25}$$

По формуле Макинтайра [4, с. 62] в точке максимума ζ, $|\zeta| = r$,

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{rM'(r)}{M(r)} = K(r), \tag{26}$$

$M'(r)$ — производная справа. Поскольку для целой трансцендентной функции $\ln M(r)/\ln r\to\infty$, $K(r)\to+\infty$, $r\to\infty$ [4, с. 66], то из (21) следует, что $\zeta\in E_1$, $|\zeta| = r > r'$, и учитывая (24), (26), получаем

$$K(r) = (1+o(1))\beta_s\zeta^{\rho_s} > 0,\qquad \rho_s > 0,\quad |\zeta| = r \,\overline{\in}\, \Delta, \tag{27}$$

$\operatorname{mes}\Delta < \infty$, $s = 1,2,\dots,q$ (см. (11)). Пусть

$$\rho_* = \underline{\lim}\,\frac{\ln K(r)}{\ln r} \le \overline{\lim}\,\frac{\ln K(r)}{\ln r} = \rho^*, \; r\to\infty.$$

Из (27) следует, что вне множества Δ конечной меры отношение $\dfrac{\ln K(r)}{\ln r}$ при $r\to\infty$ имеет конечное число предельных значений $\rho_1,\ldots,\rho_q$. Отсюда вытекает [4, с. 33], лемма 2.23 и следствие 1, что $\rho_* = \rho^* = \rho$, ρ совпадает с одним из ρ_s в (27). Таким образом, существует $\lim \dfrac{\ln K(r)}{\ln r} = \rho_s$, $r\to\infty$, $r \overline{\in} \Delta$, $\operatorname{mes}\Delta < \infty$. Поэтому из (27) следует ([4, с. 34], лемма 2.33)

$$K(r) = (|\beta_s| + o(1))\,r^{\rho}, \qquad r > r', \tag{28}$$

ρ, $|\beta_s|$ одно и то же для каждого $r > r'$. Если обозначить $\beta_s = \beta = |\beta|\exp(i\alpha)$, $\zeta = r\exp(i\varphi(r))$, то из (27), (28) получаем

$$\rho\,\varphi(r) + \alpha = 2\pi k + o(1), \qquad \cos(\rho\,\varphi(r) + \alpha) = 1 + o(1), \tag{29}$$

$$\cos(\rho\,\varphi(r) + \alpha) > \frac{1}{2}, \qquad r \overline{\in} \Delta, \quad \operatorname{mes}\Delta < \infty, \quad r > r',$$

k — целое, $\rho = \rho_s \equiv \mathrm{const}$, $\forall r > r'$; α, k принимают конечное число возможных значений $(0 \le \varphi(r) < 2\pi)$. Из (28) и соотношения $K(r) = \dfrac{rM'(r)}{M(r)}$ интегрированием получаем

$$\ln M(r) = (|\beta|\rho^{-1} + o(1))\,r^{\rho}, \qquad r > r', \quad \rho > 0, \tag{30}$$

ρ и $|\beta|$ одно и то же при каждом $r > r'$. Из (30), (21) следует

$$|f(\zeta)| = M(r) > r^{\nu}, \qquad \zeta \in E_0 = E_0(r) \subset E_1, \tag{31}$$

E_0 — связная компонента E_1. Обозначим

$$\eta = \frac{2\pi k - \alpha}{\rho} - \frac{\pi}{2\rho}, \qquad \gamma = \frac{2\pi k - \alpha}{\rho} + \frac{\pi}{2\rho}, \tag{32}$$

где $k = k(r)$ — целое число, определенное в (29).

Покажем, что

$$\forall \chi,\ \psi \quad (\eta < \chi < \psi < \gamma),$$

$$\{z\colon |z| = r,\ \chi \le \arg z \le \psi\} \subset E_0, \quad r > r(\chi,\psi). \tag{33}$$

Если $\eta < \chi \le \theta_* \le \psi < \gamma$, то, учитывая (32), (30) $(\rho > 0)$, находим

$$\eta\rho + \alpha = 2\pi k - \frac{\pi}{2} < \rho\chi + \alpha \le$$

$$\le \rho\,\theta_* + \alpha \le \rho\,\psi + \alpha \le \gamma\rho + \alpha = 2\pi k + \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\cos(\rho\,\theta_* + \alpha) \ge \min(\cos(\rho\chi + \alpha), \cos(\rho\psi + \alpha)) > 0. \tag{34}$$

Пусть θ_0 — наименьшее, θ_* — наибольшее значения такие, что дуга $h = \{z\colon z = r\exp(i\theta),\ \theta_0 \le \theta \le \theta_*\} \subset E_0$. Из (31), (21) следует, что $\theta_0 < \arg\zeta < \theta_*$. Интегрируя (24) по дуге h от точки ζ до точки $z = r\exp(i\varphi) \in$

$\in h$, выделяя действительные части и учитывая, что $\cos(\rho(\arg\zeta)+\alpha) = 1 + o(1)$ (см. (29)), получаем

$$\ln\left|\frac{f(re^{i\varphi})}{f(\zeta)}\right| = |\beta|\rho^{-1}r^{\rho}[\cos(\rho\varphi+\alpha) - \cos(\rho(\arg\zeta)+\alpha) + o(1)] =$$

$$= |\beta|\rho^{-1}r^{\rho}[\cos(\rho\varphi+\alpha) - 1 + o(1)].$$

Поскольку $M(r) = |f(\zeta)|$, то отсюда и из (30) следует

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = |\beta|\rho^{-1}r^{\rho}[\cos(\rho\varphi+\alpha) - 1 + o(1)] +$$

$$+ |\beta|\rho^{-1}r^{\rho}(1+o(1)) =$$

$$= |\beta|\rho^{-1}r^{\rho}[\cos(\rho\varphi+\alpha) + o(1)], \quad \theta_0 \le \varphi \le \theta_*. \tag{35}$$

Предположим, что $\theta_* \le \psi$. Из определения связной компоненты E_0 и определения θ_* следует (см. (21)) $|f(re^{i\theta_*})| = r^{\nu}$. Поэтому, если в (35) $\varphi = \theta_*$, то получим

$$\ln r^{\nu} = |\beta|\rho^{-1}r^{\rho}[\cos(\rho\theta_* + \alpha) + o(1)].$$

Учитывая (34), видим, что это равенство при достаточно больших r невозможно. Поэтому $\theta_* > \psi$. Аналогично можно показать, что $\theta_0 < \chi$. Тем самым (33) доказано. Тогда из (35) следует

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = |\beta|\rho^{-1}r^{\rho}[\cos(\rho\varphi+\alpha) + o(1)], \quad \chi \le \varphi \le \psi. \tag{36}$$

Предположим, что в (36) $\rho < 1/2$. Тогда $\gamma - \eta = \pi/\rho > 2\pi$ и числа χ и ψ можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\sin(\rho\chi + \alpha + \pi\rho) \ne 0, \quad \psi = \chi + 2\pi. \tag{37}$$

Поскольку $f(re^{i\chi}) = f(re^{i(\chi+2\pi)})$, то из (36), (37) следует

$$0 = \ln|f(re^{i\psi})| - \ln|f(re^{i\chi})| =$$

$$= (\cos(\rho\chi + 2\pi\rho + \alpha) - \cos(\rho\chi+\alpha) + o(1))|\beta|r^{\rho}\rho^{-1} =$$

$$= (-2(\sin\pi\rho)\sin(\rho\chi + \alpha + \pi\rho) + o(1))|\beta|\rho^{-1}r^{\rho}. \tag{38}$$

Поскольку $0 < \pi\rho < \pi/2$, то $\sin\pi\rho \ne 0$. Тогда, учитывая (37), получаем $\sin\pi\rho\,\sin(\rho\chi+\alpha+\pi\rho) \ne 0$, что противоречит (38). Таким образом, $\rho \ge 1/2$.

Существует конечное число значений $\varphi_s \in [0, 2\pi]$, для которых $\cos(\rho\varphi_s + \alpha) = 1$, а именно $\varphi_s = (2\pi k - \alpha)/\rho$, ($k$, ρ, α принимают конечное число значений). Соответственно существует конечное число интервалов $[\varphi_s - \pi/3\rho, \varphi_s + \pi/3\rho] = [\lambda_s, \mu_s]$, на которых

$$\cos(\rho\theta + \alpha) \ge \frac{1}{2}, \quad \lambda_s \le \theta \le \mu_s, \quad s \in I, \tag{39}$$

где I – конечное множество индексов.

Из (29) следует, что если $\zeta = r\exp(i\varphi(r))$ — точка максимума, то значение $\varphi(r)$ принадлежит какому-то из отрезков $[\lambda_s, \mu_s]$:

$$(\forall r > r',\ r \,\overline{\in}\, \Delta)\ (\exists s = s(r) \in I):\ \lambda_s < \varphi(r) < \mu_s,$$

$$|f(r\exp(i\varphi(r)))| = M(r). \tag{40}$$

Поскольку отрезков $[\lambda_s, \mu_s]$, $s \in I$, конечное число, то

$$(\exists s(0) \in I)\ (\forall a > 0)\ (\exists r > a,\ r \,\overline{\in}\, \Delta)\colon \lambda_{s(0)} < \varphi(r) < \mu_{s(0)}. \qquad (41)$$

Пусть $A = \{r\colon r \,\overline{\in}\, \Delta,\ \lambda_{s(0)} < \varphi(r) < \mu_{s(0)}\}$. Из (41) следует $\sup A = +\infty$. Тогда на отрезке $[\lambda_{s(0)}, \mu_{s(0)}] \subset]\chi, \psi[$ выполняется соотношение (36):

$$\ln|f(re^{i\theta})| \sim |\beta|\rho^{-1} r^{\rho}\cos(\rho\theta + \alpha),$$
$$\lambda_{s(0)} < \theta < \mu_{s(0)}, \qquad r \in A. \qquad (42)$$

В [6, с. 518] было доказано такое утверждение: если для множества кругов E_* с центрами в в точках c_q, $c_q \in \{c_q\}$, и радиусами δ_q выполняется $\sum \delta_q < c$ (см. (11)), то $\forall\, \theta_1, \theta_2$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, $\exists\, \kappa$, $\theta_1 < \kappa < \theta_2$, такое, что луч $\{z\colon \arg z = \kappa,\ |z| > d > 0\}$ не пересекает круги E_*: $\{z\colon \arg z = \kappa,\ |z| > d = 2\pi c/(\theta_2 - \theta_1)\} \cap E_* = \varnothing$.

Поэтому, если выбрать $\theta_1 = \lambda_{s(0)}$, $\theta_2 = \mu_{s(0)}$, то $\exists\, \kappa$, $\lambda_{s(0)} < \kappa < \mu_{s(0)}$: луч $S(\kappa) = \{z\colon \arg z = \kappa,\ |z| > d = 2\pi c/(\mu_{s(0)} - \lambda_{s(0)})\}$ имеет свойство $S(\kappa) \cap E_* = \varnothing$.

Из (41), (42), (39), (21) следует, что $E_1 \cap S(\kappa) \neq \varnothing$. Множество $E_1 \cap S(\kappa)$ можно представить в виде объединения „максимальных" отрезков ω_t таких, что

$$|f(z)| \ge |z|^{\nu}, \qquad z \in \omega_t, \qquad (43)$$

причем, если z_{1t} — начало, z_{2t} — конец ω_t и $|z_{1t}| > r'$, $|z_{2t}| < \infty$, то

$$|f(z_{1t})| = |z_{1t}|^{\nu}, \qquad |f(z_{2t})| = |z_{2t}|^{\nu}. \qquad (44)$$

Рассмотрим на луче $S(\kappa)$ точку $z = r_* e^{i\kappa}$, $r_* \in A$. Из (39), (42), (43) следует, что $r_* e^{i\kappa} \in \omega_t \subset E_0$, E_0 — связная компонента E_1. На ω_t выполняется (24). Если проинтегрировать (24) на ω_t и выделить действительные части, получим ($q(z)$, $v(z)$ — некоторые функции, $|q(z)|$, $|v(z)| < \delta$, $\delta > 0$ — как угодно малое, если $|z|$ достаточно большое, $z_{1t} = z_1$, $z_{2t} = z_2$, $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$), то

$$\ln\frac{f(z)}{f(z_1)} = (z^{\rho} - z_1^{\rho})(\beta\rho^{-1} + v(z)), \qquad z = re^{i\kappa} \in \omega_t, \qquad (45)$$

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right| = (r^{\rho} - r_1^{\rho})(|\beta|\rho^{-1}\cos(\rho\kappa + \alpha) + q(z)), \qquad r_1 \le r \le r_2. \qquad (46)$$

Принимая во внимание (39), (42), получаем $\cos(\rho\kappa + \alpha) \ge 1/2$. Предположим, что ω_t имеет конечную длину. Из (44), (46) следует $\nu\ln(r_2/r_1) = (r_2^{\rho} - r_1^{\rho}) \times (|\beta|\rho^{-1}\cos(\rho\kappa + \alpha) + q(z_2))$, поэтому $\nu\rho^{-1}\ln(r_2^{\rho}/r_1^{\rho}) > (r_2^{\rho} - r_1^{\rho})|\beta|\rho^{-1} \times 2^{-1}\cos(\rho\kappa + \alpha)$ или

$$c(\ln x_2 - \ln x_1) > x_2 - x_1, \qquad x_1 = r_1^{\rho} < x_2 = r_2^{\rho}, \quad c = \frac{2\nu}{|\beta|\cos(\rho\kappa + \alpha)}. \qquad (47)$$

Функция $x - c\ln x$ возрастает на $[c, \infty)$, поэтому неравенство (47) невозможно, если r_1 (следовательно, x_1) достаточно большое. Отсюда следует, что

ω_t имеет бесконечную длину, если r_{1t} достаточно большое. Тогда, учитывая (45), получаем

$$\ln f(z) = z^{\rho}\beta\rho^{-1}(1+o(1)), \quad z = re^{i\kappa}, \quad r > r_0,$$

$$\ln|f(z)| = r^{\rho}|\beta|\rho^{-1}\cos(\rho\kappa+\alpha)(1+o(1)), \quad r > r_0. \tag{48}$$

Таким образом, луч

$$\{z\colon \arg z = \kappa,\ |z| > r_0\} \subset E_0. \tag{49}$$

Пусть в (32) α, ρ, κ те значения, при которых в (29), (39), (41) определяется отрезок $[\lambda_{s(0)}, \mu_{s(0)}]$. Повторяя с незначительными изменениями рассуждения, использованные при доказательстве (36) (это доказательство см. в [6, форм. (44)]), можно показать, что из (49) следует: $\forall \chi,\ \psi$ $(\eta < \chi < \psi < \gamma)$, $\{z\colon \chi \le \arg z \le \psi,\ |z| > r_0\}\setminus E_* \subset E_0$ и в этой области выполняется оценка (14), равномерная по $\arg z$. Если в (32), (14) $\gamma - \eta = 2\pi$, то из (14) следует (17). Доказательство оценок (15), (16) смотри в [6].

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. *Валирон Ж.* Аналитические функции. – М.: Гостехтеориздат, 1957. – 235 с.
3. *Зимогляд В. В.* О порядке роста целых трансцендентных решений алгебраических дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. сб. – 1971. – **85(127)**, №2 (6). – С. 286–302.
4. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 467 с.
5. *Мохонько В. Д., Горбачевский А. Е.* О мероморфных решениях дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 6. – С. 1087–1089.
6. *Мохонько А. З.* О мероморфных решениях алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 4. – С. 514–523.
7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. В 2-х т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
8. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
9. *Boutroux P.* Sur quelques proprietés des fonctions entiéres // Acta math. – 1904. – **29**. – P. 97–204.

Получено 13.08.96,
после доработки — 12.03.98