УДК 517.5

А. А. Маляренко (Міжнар. мат. центр НАН України, Київ)

ЛОКАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА КОМПАКТНИХ СИМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ І ТЕОРЕМИ ТИПУ ДЖЕКСОНА ТА БЕРНШТЕЙНА

We consider local properties of sample functions of Gaussian isotropic random fields on the compact Riemann symmetric spaces $\mathcal{M}$ of rank one. We give conditions under which the sample functions of a field almost surely possess logarithmic and power modulus of continuity. As a corollary, we prove the Bernshtein-type theorem for optimal approximations of functions of this sort by harmonic polynomials in the metric of space $L_2(\mathcal{M})$. We use the Jackson–Bernshtein-type theorems to obtain sufficient conditions of almost surely belonging of the sample functions of a field to classes of functions associated with Riesz and Cesàro means.

Розглядаються локальні властивості вибіркових функцій гауссових ізотропних випадкових полів на компактних ріманових симетричних просторах $\mathcal{M}$ рангу 1. Наведено умови, при виконанні яких вибіркові функції поля майже напевне мають логарифмічний та степеневий модулі неперервності. Як наслідок доведено теорему типу Бернштейна для оптимальних наближень таких функцій гармонічними многочленами в метриці простору $L_2(\mathcal{M})$. Теореми типу Джексона – Бернштейна використано для отримання достатніх умов належності майже напевне вибіркових функцій до класів функцій, пов'язаних з середніми Рісса та Чезаро.

1. Вступ. Нехай $\mathcal{M} = G/K$ — N-вимірний компактний симетричний простір рангу 1 з групою рухів G і стаціонарною підгрупою K [1]. Нехай $\xi(x)$ — неперервне в середньому квадратичному гауссове поле на $\mathcal{M}$ з нульовим середнім значенням і кореляційною функцією

$$B(x, y) = E\xi(x)\overline{\xi(y)}.$$

Поле $\xi(x)$ називається *ізотропним в широкому розумінні* [2], якщо

$$B(gx, gy) = B(x, y), \quad g \in G, \quad x, y \in \mathcal{M}.$$

В теоремі 1 наводимо достатні умови неперервності випадкового поля $\xi(x)$, що узагальнюють результати роботи [3], в якій відповідні твердження доведено для випадку N-вимірної сфери $\mathcal{M} = S^N$.

Використовуючи поняття моделі випадкової функції та ядра гауссової міри в просторі $C(\mathcal{M})$ неперервних функцій на $\mathcal{M}$ [4], доводимо теорему типу Бернштейна (теорема 2): якщо середня квадратична похибка оптимального наближення функції гармонічними многочленами порядку не більше n мажорується числовою послідовністю a_n, що задовольняє одну з умов (9a) – (9c), то функція задовольняє відповідну умову (11a) – (11c).

В пункті 3 використовуємо теореми типу Джексона та Бернштейна з [5] для отримання достатніх умов належності майже напевне вибіркових функцій випадкового поля $\xi(x)$ до класів неперервних функцій, пов'язаних з середніми значеннями Рісса та Чезаро (теорема 3).

2. Умови неперервності випадкового поля на компактному симетричному просторі і теорема типу Бернштейна. Нехай $\rho(x, y)$ — довжина геодезичної лінії, що зв'язує точки $x, y \in \mathcal{M}$, $L = \sup_{x, y \in \mathcal{M}} \rho(x, y)$ — діаметр простору $\mathcal{M}$. З метою спрощення подальших формул зафіксуємо одиницю вимірювання відстані в метриці ρ так, щоб виконувалась умова $L = \pi$.

Існує список компактних ріманових симетричних просторів рангу 1 [1]. А саме:

сфери

$$S^N = SO(N+1)/SO(N), \quad N \geq 1;$$

дійсні проективні простори

$$P^N(\mathbb{R}) = SO(N+1)/O(N), \quad N \geq 2;$$

комплексні проективні простори

$$P^N(\mathbb{C}) = SU(l+1)/S(U(l)\times U(1)), \quad l = \frac{N}{2} \geq 2;$$

кватерніонні проективні простори

$$P^N(\mathbb{H}) = Sp(l+1)/Sp(l)\times Sp(1), \quad l = \frac{N}{4} \geq 2;$$

проективна площина Келі над алгеброю октав

$$P^{16}(\mathrm{Cay}) = F_{4(-52)}/SO(9),$$

де $SO(m)$ — група ортогональних матриць порядку m з одиничним визначником; $O(m)$ — група ортогональних матриць порядку m; $SU(m)$ — група унітарних матриць порядку m з одиничним визначником; $U(m)$ — група унітарних матриць порядку m; $S(U(l)\times U(1))$ — підгрупа матриць з одиничним визначником в групі $U(l)\times U(1)$; $Sp(m)$ — група ортогональних симплектичних матриць порядку m; $F_{4(-52)}$ — виняткова група Лі рангу 4 розмірності 52.

Нехай $S_\theta(x)$ — множина точок простору $\mathcal{M}$, що знаходяться на віддалі θ від фіксованої точки $x \in \mathcal{M}$, $A(\theta)$ — $(N-1)$-вимірна міра Лебега многовиду $S_\theta(x)$. Має місце формула [6]

$$A(\theta) = \Omega_N 2^p \sin^p\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin^q\theta,$$

де Ω_N — N-вимірна міра Лебега сфери одиничного радіуса в просторі $\mathbb{R}^N$, а параметри p та q мають наступні значення: для сфер $p=0$, $q=N-1$; для дійсних проективних просторів $p=N-1$, $q=0$; для комплексних проективних просторів $p=N-2$, $q=1$; для кватерніонних проективних просторів $p=N-4$, $q=3$ і для проективної площини Келі $p=8$, $q=7$. Диференціальний оператор

$$\Delta_0 = \frac{1}{A(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(A(\theta)\frac{d}{d\theta}\right), \quad 0 < \theta < \pi,$$

являє собою радіальну частину оператора Лапласа – Бельтрамі простору $\mathcal{M}$.

Нехай dm — G-інваріантна міра на $\mathcal{M}$, нормована умовою $\int_{\mathcal{M}} dm = 1$. Тоді спектр оператора Δ_0 в просторі $L^2(\mathcal{M}, dm)$ складається з точок $-\lambda_n^2 = -n(n+\alpha+\beta+1)$, $n \geq 0$, де параметри α та β обчислюються за формулами

$$\alpha = \frac{1}{2}(p+q-1), \quad \beta = \frac{1}{2}(q-1). \tag{1}$$

Розглянемо неперервне унітарне зображення U групи G в просторі $L^2(\mathcal{M}, dm)$, що діє за формулою

$$(Uf)(g)(x) = f(g^{-1}x), \quad g \in G.$$

Легко перевірити, що оператор Δ_0 комутує із зображенням U. Тому згідно з загальною теорією [7], в кожному з просторів

$$\mathcal{H}_n = \left\{ f \in C^\infty(\mathcal{M}) \colon \Delta_0 f = -\lambda_n^2 f \right\}, \quad n \geq 0,$$

реалізується незвідна компонента U_n зображення U, причому всі компоненти попарно нееквівалентні. Елементи простору $\mathcal{H}_n$ називаються *гармонічними многочленами.*

Теорема Петера – Вейля [8] стверджує, що кожне з названих зображень є зображенням класу 1 відносно підгрупи K, тобто містить ненульові K-інваріантні вектори. Розмірність простору таких векторів дорівнює кратності входження U_n до U, в нашому випадку — одиниці. Зафіксуємо K-інваріантний вектор ψ одиничної довжини. Матричний елемент зображення U_n, що відповідає вектору ψ (зональна сферична функція)

$$\psi_n(g) = \int_{\mathcal{M}} \psi(g^{-1}y)\overline{\psi(y)}\,dm(y),$$

не залежить від вибору вектора ψ. Більш того, вона залежить від відстані між точками x та o з простору $\mathcal{M}$, що відповідають елементу $g \in G$ та одиничному елементу $e \in G$ при канонічній проекції з G на $\mathcal{M}$. В [9] доведено, що зональна сферична функція компактного ріманового простору рангу 1 має вигляд

$$\psi_n(\theta) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)},$$

де $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ — многочлен Якобі.

Позначимо через $h(\mathcal{M}, n)$ розмірність простору $\mathcal{H}_n$. Нехай $\{ \psi_l \colon 1 \leq l \leq \leq h(\mathcal{M}, n) \}$, $\psi_1 = \psi$ — фіксований ортонормований базис у просторі $\mathcal{H}_n$. Згідно з теоремою Петера – Вейля функції

$$S_n^l(x) = \sqrt{h(\mathcal{M}, n)} \int_G \psi_l(g^{-1}x)\overline{\psi_l(x)}\,dg$$

утворюють ортонормований базис простору $L^2(\mathcal{M})$. Тут dg — ймовірнісна міра Хаара на G. Маємо

$$\sum_{l=1}^{h(\mathcal{M},n)} S_n^l(x)\overline{S_n^l(y)} = h(\mathcal{M}, n)\psi_n(\rho(x, y)) \tag{2}$$

(це просто формула множення матриць). Нехай тепер b_n, $n \geq 0$ — послідовність невід'ємних дійсних чисел, що задовольняють умову

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\mathcal{M}, n) b_n < \infty,$$

а $\{ \xi_n^l \colon n \geq 0,\ 1 \leq l \leq h(\mathcal{M}, n) \}$ — стандартна гауссова послідовність. Тоді гауссове випадкове поле

$$\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{b_n} \sum_{l=1}^{h(\mathcal{M},n)} S_n^l(x)\xi_n^l$$

буде ізотропним, а його кореляційна функція, обчислена з застосуванням теореми Карунена і формули (2), матиме вигляд

$$B(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} h(\mathcal{M},n) b_n \psi_n(\rho(x,y)). \tag{3}$$

З результатів роботи [10] випливає, що формула (3) описує всі можливі кореляційні функції ізотропних випадкових полів на $\mathcal{M}$.

Доведемо допоміжне твердження, що узагальнює тауберову теорему М. Й. Ядренка [3] (розділ II, теорема 9) для випадку компактних симетричних просторів рангу 1.

Лема 1. *Нехай* $\gamma(t)\colon [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$ — *функція, що задовольняє умови*:

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty;$$

функція $\dfrac{t^2}{\gamma(t)}$ *не спадає, починаючи з деякого* t;

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\mathcal{M},n) b_n \gamma(n) < +\infty.$$

Тоді при $\theta \downarrow 0$ *виконується співвідношення*

$$B(1) - B(\cos\theta) = O\left(\gamma^{-1}(\theta^{-1})\right).$$

Доведення. Метод доведення часткового випадку леми 1 для сфер, запропонований в [3], дослівно переноситься на загальний випадок, за винятком одного твердження. А саме: у випадку сфери виконується нерівність

$$1 - \psi_n(\theta) \le \frac{1}{2} n^2 \theta^2. \tag{4}$$

З метою доведення аналогічної нерівності в загальному випадку із заміною коефіцієнта $\frac{1}{2}$ на коефіцієнт, що залежить лише від α та β, перепишемо (4) у вигляді

$$1 - \frac{P_n^{(\beta,\beta)}(\cos\theta)}{P_n^{(\beta,\beta)}(1)} \le \frac{1}{2} n^2 \theta^2, \quad \beta = \frac{N-2}{2}. \tag{5}$$

Безпосередній підрахунок за формулами (1) показує, що для всіх компактних ріманових симетричних просторів рангу 1, крім сфер, виконується нерівність $\alpha > \beta > -1$. У роботі [2] доведено, що для таких значень параметрів α та β вірна формула

$$\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)} = \sum_{k=0}^{n} a_{kn} \frac{P_k^{(\beta,\beta)}(t)}{P_k^{(\beta,\beta)}(1)}, \tag{6}$$

при цьому коефіцієнти a_{kn} невід'ємні. При $t = 1$ одержимо $\sum_{k=0}^{n} a_{kn} = 1$. Тому маємо

$$1-\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)} = \sum_{k=0}^{n} a_{kn}\left(1-\frac{P_k^{(\beta,\beta)}(\cos\theta)}{P_k^{(\beta,\beta)}(1)}\right) \le \frac{1}{2}\theta^2\sum_{k=0}^{n} k^2 a_{kn}$$

(використано нерівність (5)). Для обчислень суми в правій частині останньої формули візьмемо похідну від обох частин (6). Використовуючи формулу (4.21.7) з роботи [11] і рівність

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)},$$

одержуємо

$$\frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{\alpha+1} = \frac{1}{\beta+1}\sum_{k=0}^{n}\left[k^2+(2\beta+1)k\right]a_{kn},$$

звідки

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 a_{kn} \le \frac{\beta+1}{\alpha+1}n(n+\alpha+\beta+1) \le \frac{(\alpha+\beta+2)(\beta+1)}{\alpha+1}n^2$$

і остаточно

$$1-\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)} \le \frac{(\alpha+\beta+2)(\beta+1)}{2\alpha+2}n^2\theta^2,$$

що й доводить лему.

Теорема 1. *Нехай виконується одна з умов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\mathcal{M},n)b_n \ln^{2\varepsilon}(n+1) < +\infty, \quad \varepsilon > 0, \tag{7a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\mathcal{M},n)b_n n^{2\delta}\ln(n+1) < +\infty, \quad 0 < \delta \le 1, \tag{7b}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\mathcal{M},n)b_n n^{2\delta} < +\infty, \quad 0 < \delta \le 1. \tag{7c}$$

Тоді існує додатна майже напевне скінченна випадкова величина $C(\omega)$, *для якої відповідно*

$$|\xi(x)-\xi(y)| \le \frac{C(\omega)}{|\ln\rho(x,y)|^{\varepsilon}}, \tag{8a}$$

$$|\xi(x)-\xi(y)| \le \frac{C(\omega)}{(\rho(x,y))^{\gamma}}, \quad \gamma < \delta, \tag{8b}$$

$$|\xi(x)-\xi(y)| \le \frac{C(\omega)}{(\rho(x,y))^{\gamma}\sqrt{|\ln\rho(x,y)|}}, \quad \gamma < \delta. \tag{8c}$$

Доведення. Імплікації (7a) $\Rightarrow$ (8a), (7b) $\Rightarrow$ (8b) та (7c) $\Rightarrow$ (8c) доводяться так само, як і в [3] (теореми 10, 11 та 12 розділу 2), із заміною посилання на теорему 9 цієї ж роботи посиланням на лему 1.

Нехай $\mathcal{P}_n$ — пряма сума просторів $\mathcal{H}_k$, $0 \le k \le n$. Позначимо через $E_n^{(2)}(f)$ похибку оптимального наближення функції $f \in L^2(\mathcal{M}, dm)$ елементами простору $\mathcal{P}_n$ в нормі простору $L^2(\mathcal{M}, dm)$:

$$E_n^{(2)}(f) = \inf_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_2.$$

Теорема 2. *Нехай* $f \in L^2(\mathcal{M}, dm)$, a_n, $n \geq 0$ — *послідовність додатних чисел, що монотонно прямує до нуля і задовольняє одну з умов*

$$a_{n-1}^2 - a_n^2 = O\left(\frac{1}{n^{2+\zeta} h(\mathcal{M}, n) \ln^{2\varepsilon}(n+1)}\right), \quad \varepsilon > 0, \tag{9a}$$

$$a_{n-1}^2 - a_n^2 = O\left(\frac{1}{n^{2+\zeta+2\delta} h(\mathcal{M}, n) \ln(n+1)}\right), \quad 0 < \delta \leq 1, \tag{9b}$$

$$a_{n-1}^2 - a_n^2 = O\left(\frac{1}{n^{2+\zeta+2\delta} h(\mathcal{M}, n)}\right), \quad 0 < \delta \leq 1. \tag{9c}$$

Якщо

$$E_n^{(2)}(f) = O(a_n), \tag{10}$$

то функція f задовольняє відповідну умову

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{C}{|\ln \rho(x, y)|^{\varepsilon}}, \tag{11a}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{C}{(\rho(x, y))^{\gamma}}, \quad \gamma < \delta, \tag{11b}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{C}{(\rho(x, y))^{\gamma} \sqrt{|\ln \rho(x, y)|}}, \quad \gamma < \delta. \tag{11c}$$

***Зауваження* 1.** В теорії наближення функцій умови виду (10) називаються *конструктивними характеристиками* функції, а умови виду (11) — *дескриптивними характеристиками.*

***Доведення теореми* 2.** Доведемо лише імплікацію (9a) $\Rightarrow$ (11a), інші імплікації доводяться аналогічно.

Нехай $\xi(x)$ — гауссове випадкове поле на $\mathcal{M}$, для якого

$$b_n = \frac{1}{n^{1+\zeta/2} h(\mathcal{M}, n) \ln^{2\varepsilon}(n+1)}.$$

Нехай **P** — гауссова міра в просторі $C(\mathcal{M})$, що відповідає випадковому полю $\xi(x)$. Згідно з теоремою 1 множина функцій, що задовольняють умову (11a), має **P**-міру 1. Це означає, що кожен елемент лінійного носія міри **P**, тобто найменшого замкнутого підпростору **P**-міри 1, також задовольняє умову (11a).

З іншого боку, згідно з [4] (розділ 9, теорема 6), лінійний носій міри **P** співпадає з замиканням її ядра $H_{\mathbf{P}}$, тобто множини функцій $f \in C(\mathcal{M})$, для яких міра

$$\mathbf{P}_f(A) = \mathbf{P}(\{g \in C(\mathcal{M}) : f + g \in A\})$$

абсолютно неперервна відносно міри **P**. Залишається довести, що кожна функція f, що задовольняє умову (10), належить до $H_{\mathbf{P}}$.

Нехай $\mathcal{A} = \{(n, l) : n \geq 0,\ 1 \leq l \leq h(\mathcal{M}, n)\}$, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра всіх підмножин множини $\mathcal{A}$, ν — міра на $\mathfrak{A}$, що визначається умовою $\nu(n, l) = b_n$. Тоді функції $m_x(n, l) = S_n^l(x)$ утворюють *модель* випадкового поля $\xi(x)$ [4], тобто виконується умова

$$E\xi(x)\overline{\xi(y)} = \int_{\mathcal{A}} m_x(n, l)\overline{m_y(n, l)}d\nu(n, l)$$

(це просто інша форма запису співвідношення (3)). Згідно з [4] (розділ 9, формула 17), образ оператора I з $L^2(\mathcal{A}, \nu)$ в $C(\mathcal{M})$, що діє за формулою

$$I(\{c_n^l\}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{l=1}^{h(\mathcal{M}, n)} c_n^l S_m^l(x),$$

співпадає з $H_{\mathbf{P}}$. Це означає, що простір $H_{\mathbf{P}}$ складається з функцій, у яких коефіцієнти Фур'є d_n^l за ортонормованим базисом $\{S_n^l\}$ задовольняють умову

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{-1} \sum_{l=1}^{h(\mathcal{M}, n)} |d_n^l|^2 < +\infty. \tag{12}$$

Похибка $E_n^{(2)}(f)$ обчислюється за формулою

$$E_n^{(2)}(f) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(\mathcal{M}, n)} |d_n^l|^2},$$

звідки одержуємо

$$\sum_{l=1}^{h(\mathcal{M}, n)} |d_n^l|^2 = O(a_{n-1}^2 - a_n^2) = O(n^{-1-\zeta/2} b_n),$$

а це і означає збіжність ряду (12).

3. Умови належності вибіркових функцій до класів Рісса та Чезаро. Для формулювання результату цього пункту необхідно навести деякі означення з [5]. Нехай Y_n – оператор ортогонального проектування з $L^2 = L^2(\mathcal{M}, dm)$ на $\mathcal{H}_n$, r, R, δ — фіксовані додатні числа. Оператор $S_R^{r,\delta}$, дія якого задається формулою

$$S_R^{r,\delta} f(x) = \sum_{n:\, \lambda_n < R} \left(1 - \left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^r\right)^{\delta} Y_n f(x),$$

називається *середнім Рісса* функції f. Якщо існує функція $g \in L^2$, яка задовольняє умову

$$Y_n g = \lambda_n^r Y_n f, \quad n \ge 0,$$

то вона називається *похідною Рісса порядку* r і позначається $g = \Lambda^r f$. Простір

$$W^{2,r} = \{f \in L^2 : \Lambda^r f \in L^2\}$$

називається *простором Рісса порядку* r. Функціонал

$$K(f, t; l^2, W^{2,r}) = \inf_{g \in W^{2,r}} \left(\|f - g\|_2 + t\|\Lambda^r g\|_2\right)$$

називається *K-функціоналом Пітрі*.

Нехай $d\mu_s$ — $(N-1)$-вимірна міра Лебега на сфері $S_\theta(x)$. Число

$$\tau_\theta(f;x) = \frac{1}{A(\theta)} \int\limits_{S_\theta(x)} f(y)d\mu_s(y)$$

називається *сферичним середнім* функції f, а число

$$\omega_r(f,\delta;L^2) = \sup_{0<\theta\le\delta} \left\|(\tau_\theta - I)^{r/2} f\right\|_2$$

— її *модулем гладкості*. Оператор C_n^δ, дія якого задається формулою

$$C_n^\delta f = \frac{1}{A_n^\delta} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\delta Y_k f, \qquad A_n^\delta = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{n!\Gamma(\delta+1)},$$

називається *середнім Чезаро* функції f.

Нехай тепер $\mathcal{K}_\gamma$ — замикання в $C(\mathcal{M})$ множини функцій, що задовольняють одну з умов

$$\left\|S_R^{r,\delta} f - f\right\|_2 = O(R^{-\gamma}), \qquad R \uparrow \infty, \tag{13a}$$

$$K(f, t; L^2, W^{2,r}) = O(t^\gamma), \qquad t \downarrow 0, \tag{13b}$$

$$\omega_r(f, \delta; L^2) = O(\delta^\gamma), \qquad \delta \downarrow 0, \tag{13c}$$

$$\left\|C_n^\delta f - f\right\|_2 = O(n^{-\gamma}), \qquad n \uparrow \infty, \tag{13d}$$

причому в перших трьох умовах r — довільне натуральне число і $0 < \gamma < r$, а в останній умові $0 < \gamma < 1$.

Теорема 3. *Нехай* $\xi(x)$ — *гауссове ізотропне випадкове поле на* $\mathcal{M}$ *і виконано умови* (7а) *та*

$$b_n = O\left(\frac{1}{(n-1)^{2\gamma}} - \frac{1}{n^{2\gamma}}\right).$$

Тоді вибіркові функції випадкового поля $\xi(x)$ *майже напевне належать до кожного з класів* $\mathcal{K}_\gamma$.

Доведення. За теоремою 1 вибіркові функції поля $\xi(x)$ неперервні, тому будь-який елемент ядра відповідної гауссової міри має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{l=1}^{h(\mathcal{M},n)} c_n^l S_n^l(x), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{l=1}^{h(\mathcal{M},n)} \left|c_n^l\right|^2 < \infty. \tag{14}$$

Згідно з [5] (теореми 3.1, 3.2, 5.1, 5.2), кожна з умов (13) рівносильна умові

$$E_n^{(2)}(f) = O(n^{-\gamma}). \tag{15}$$

Залишається довести, що кожна з функцій (14) задовольняє умову (15).

Справді, умова (15) рівносильна такій умові на коефіцієнти Фур'є функції f:

$$\sum_{l=1}^{h(\mathcal{M},n)} \left|d_n^l\right|^2 = O\left(\frac{1}{(n-1)^{2\gamma}} - \frac{1}{n^{2\gamma}}\right),$$

а для коефіцієнтів Фур'є функції (14) маємо

$$\sum_{l=1}^{h(\mathcal{M},n)} \left| d_n^l \right|^2 = b_n \sum_{l=1}^{h(\mathcal{M},n)} b_n \left| c_n^l \right|^2 = O(b_n),$$

оскільки послідовність $\sum_{l=1}^{h(\mathcal{M},n)} b_n \left| c_n^l \right|^2$ членів збіжного ряду збігається до нуля і тому обмежена.

1. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.: Наука, 1964. – 533 с.
2. *Askey R.* Orthogonal polynomials and special functions. – Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1975. – 110 p.
3. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. – Киев: Выща шк., 1980. – 203 с.
4. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. – Киев: ТВиМС, 1995. – 210 с.
5. *Li L. Riesz.* Means on compact Riemanian symmetric spaces // Math. Nachr. – 1994. – **168**. – P. 227–242.
6. *Askey R., Bingham R. H.* Gaussian processes on compact symmetric spaces // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1976. – **37**. – P. 127–143.
7. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
8. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
9. *Gangolli R.* Positive definite functions on certain homogeneous spaces, and certain stochastic processes related to Levy's Brownian motion of several parameters // Ann. Inst. H. Poincaré. B. – 1967. – **3**. – P. 121–226.
10. *Yaglom A. M.* Second-order homogeneous random fields. // Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab. – 1960. – **2**. – P. 593–622.
11. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

Одержано 17.09.96