УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

О МНОЖЕСТВЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА

We establish the sets of all extremal functions in some Kolmogorov-type inequalities and also in the Bohr – Favard-type inequalities.

Знайдено множини всіх екстремальних функцій в деяких нерівностях типу Колмогорова, а також в нерівностях типу Бора – Фавара.

1. Введение. В качестве G будем рассматривать одно из множеств: вещественную ось $\mathbf{R}$, единичную окружность $\mathbf{T}$, реализованную в виде промежутка $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами, или отрезок $[a, b]$. Символом $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, будем обозначать пространства всех измеримых функций $x\colon G \to \mathbf{R}$ с конечной нормой $\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)}$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \left\{ \int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \le p < \infty,$$

и

$$\|x\|_{L_\infty(G)} := \sup_{t \in G} \operatorname{vrai} |x(t)|.$$

Для $r \in \mathbf{N}$ через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство функций $x \in L_\infty(G)$, у которых производная $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Пусть далее

$$W^r_\infty(G) := \left\{ x \in L^r_\infty(G) \colon \left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le 1 \right\}.$$

Символом $\varphi_r(t)$, $t \in \mathbf{R}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл со средним значением на периоде, равным нулю, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, и для $\lambda > 0$ положим

$$\varphi_{\lambda, r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t).$$

А. Н. Колмогоров [1] для функций $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$, $r \in \mathbf{N}$, $r \ge 2$, доказал точное неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le C_{r,k} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r} \tag{1}$$

для всех $k \in \mathbf{N}$, $k < r$. Неравенства такого вида с точной константой $C_{r,k}$ впервые появились в работах Ландау [2] и Адамара [3] в случае $r = 2$, $k = 1$. Затем Г. Е. Шилов [4] доказал (1) для $r \le 4$, $k < r$ и $r = 5$, $k = 2$. Он также выдвинул гипотезу о виде экстремальной функции в неравенстве (1), но не смог ее доказать. Эту гипотезу в общем виде доказал А. Н. Колмогоров [1]. Он показал, что функции вида

$$x(t) = a \varphi_{\lambda, r}(t + b), \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

являются экстремальными в неравенстве (1) и

$$C_{r,k} = \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}}.$$

Неисследованным остается вопрос о том, исчерпывается ли функциями вида (2) совокупность экстремальных функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ в неравенстве (1).

Через $K_\infty^r(\mathbf{R})$ обозначим множество функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$ таких, что для некоторого $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ норма j-й производной $\| x^{(j)} \|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_j \in \mathbf{R}$.

В настоящей работе доказано (см. теорему 1), что среди функций $x \in K_\infty^r(\mathbf{R})$ только функции вида (2) являются экстремальными в неравенстве Колмогорова при $r \geq 3$. В замечании к теореме 1 приведен пример, показывающий, что при $r = 2$ теорема 1 не верна.

Как следствие теоремы 1 доказано (см. теорему 2), что в неравенстве Лигуна [5]

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \leq \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r}, \qquad k, r \in \mathbf{N}, \qquad k < r,$$

для 2π-периодических функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$ знак равенства в случае $r \geq 3$, $k \geq 2$ реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_{n,r}(t+b)$, где $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Аналогичный вопрос исследован и для некоторых других неравенств типа Колмогорова (см. теоремы 5 – 7). В работе [6] для 2π-периодических функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$, $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$, и для любого $p \in [1, \infty)$ доказано точное неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \leq \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha} \tag{3}$$

для всех $k \in \mathbf{N}$, $k < r$, где

$$\alpha = \frac{r-k}{r+1/p}.$$

В работе [7] для функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$ доказано также неравенство

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{\| \varphi_r \|_\infty}{\| \varphi_r \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{4}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{r}{r+1/p},$$

а

$$E_0(x)_\infty := \inf \{ \| x - c \|_\infty : c \in \mathbf{R} \}$$

— наилучшее равномерное приближение функции x константами. Очевидно, что экстремальными в (3) и (4) являются функции вида

$$x(t) = a\varphi_r(t+b), \qquad a, b \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

В теоремах 5 и 6 настоящей работы доказано, что при любом $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$, функциями вида (5) исчерпывается множество экстремальных функций в неравенствах (3) и (4).

Метод, использованный при доказательстве теоремы 1, дал возможность исследовать вопрос о совокупности всех экстремальных функций в неравенстве Бора – Фавара. Для $r, n \in \mathbf{N}$ символом $L^r H_\infty^n$ обозначим множество функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} x(t)T_n(t)\,dt = 0$$

для любого тригонометрического полинома $T_n(t)$ порядка не выше n. Для функций $x \in L^r H_\infty^n$ хорошо известно неравенство Бора – Фавара

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_{n,r}\|_\infty \|x^{(r)}\|_\infty. \tag{6}$$

При $r = 1$ это неравенство доказано в работе Бора [8], а для произвольных r — в работе Фавара [9]. Л. В. Тайков [10] получил обобщение неравенства Бора – Фавара

$$\|x\|_p \le \|\varphi_{n,r}\|_p \|x^{(r)}\|_\infty \tag{7}$$

для функций $x \in L^r H_\infty^n$. Очевидно, что функции вида

$$x(t) = a\varphi_{n,r}(t+b), \quad a, b \in \mathbf{R},$$

являются экстремальными в неравенствах (6) и (7). В теоремах 3 и 4 настоящей работы доказано, что ими исчерпывается множество экстремальных функций в неравенствах (6) и (7).

Доказательства результатов данной работы основаны на теореме сравнения А. Н. Колмогорова [1], поэтому приведем ее формулировку.

Теорема. *Пусть $r \in \mathbf{N}$. Если для функции $x \in W_\infty^r(\mathbf{R})$ число λ выбрано из условия $\|x\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$, а ξ и η таковы, что $x(\xi) = \varphi_{\lambda,r}(\eta)$, то*

$$\|x'(\xi)\|_\infty \le \left|\varphi'_{\lambda,r}(\eta)\right|$$

(при $r = 1$ в предположении, что производные существуют).

2. О множестве экстремальных функций в неравенствах Колмогорова и Лигуна.

Лемма 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $r \ge 3$. Если для функции $x \in W_\infty^r(\mathbf{R})$ выполнены равенства*

$$\|x\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \tag{8}$$

и

$$\|x''\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,r-2}\|_\infty \tag{9}$$

с некоторым $\lambda > 0$, причем норма $\|x''\|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_2 \in \mathbf{R}$, то существует $s \in \mathbf{R}$ такое, что

$$x(t+s) = \varphi_{\lambda,r}(t) \tag{10}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что из условия (8) и неравенства Колмогорова

$$\|x'\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-1/r}} \|x\|_\infty^{1-1/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{1/r}$$

ввиду очевидного тождества

$$\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = \lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty$$

следует неравенство

$$\|x'\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-1}\|_\infty. \tag{11}$$

Пусть a — произвольная точка локального максимума $|\varphi_{\lambda, r-2}(t)|$. Из (9) ввиду предположения о том, что норма $\|x''\|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_2 \in \mathbf{R}$, следует существование такого $s \in \mathbf{R}$, что

$$|x''(s+a)| = |\varphi_{\lambda, r-2}(a)| = \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty. \tag{12}$$

Покажем, что в условиях леммы из (12) следуют два утверждения:

1) для любого $t \in (\alpha - \pi/\lambda, \alpha + \pi/\lambda)$ имеет место равенство

$$x''(s+t) = \varepsilon\varphi_{\lambda, r-2}(t), \quad \varepsilon = \pm 1; \tag{13}$$

2) для любого $k \in \mathbf{Z}$

$$\left| x''\left(s + a + k\frac{\pi}{\lambda}\right) \right| = \left| \varphi_{\lambda, r-2}\left(a + k\frac{\pi}{\lambda}\right) \right|. \tag{14}$$

Из утверждений 1 и 2 будет следовать утверждение леммы. Действительно, использовав (14), заменим в (12) точку a точкой $a + k\pi/\lambda$. Тогда согласно утверждению 1 равенство (13) выполняется для всех

$$t \in \left(a + \frac{(k-1)\pi}{\lambda}, a + \frac{(k+1)\pi}{\lambda}\right).$$

Отсюда ввиду произвольности $k \in \mathbf{Z}$ следует справедливость (13) для всех $t \in \mathbf{R}$. Заменив s (в случае $\varepsilon = -1$) на $s_1 = s + \pi/\lambda$ и сохранив за ним обозначение s, получим равенство

$$x''(s+t) = \varphi_{\lambda, r-2}(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Отсюда имеем

$$x'(s+t) = \varphi_{\lambda, r-1}(t) + c, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{15}$$

где c — некоторая постоянная. При этом $c = 0$, ибо иначе было бы $\|x'\|_\infty > \|\varphi_{r-1}\|_\infty$, что противоречит (11). Аналогично, из (15) и (8) получаем (10) для всех $t \in \mathbf{R}$.

Итак, для доказательства леммы достаточно установить справедливость утверждений 1 и 2.

Докажем сначала, что равенство (13) выполнено для $t \in (a - \pi/2\lambda, a + \pi/2\lambda)$. Не ограничивая общности будем считать, что $x''(s+a) > 0$ и $\varphi_{\lambda, r-2}(a) > 0$. Тогда согласно (12)

$$x''(s+a) = \varphi_{\lambda, r-2}(a) = \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty.$$

Поэтому, применяя теорему сравнения Колмогорова к функции x'' (ее условия выполнены ввиду (9)), имеем

$$x''(s+t) \geq \varphi_{\lambda, r-2}(t), \quad t \in \left(a - \frac{\pi}{2\lambda}, a + \frac{\pi}{2\lambda}\right). \tag{16}$$

Покажем, что для всех $t \in (a - \pi/2\lambda, a + \pi/2\lambda)$ (16) превращается в равенство. Действительно, в противном случае ввиду непрерывности функций x'' и $\varphi_{\lambda, r-2}$ было бы

$$2\|x'\|_\infty \geq \int_{a-\pi/2\lambda}^{a+\pi/2\lambda} x''(t+s)\,dt > \int_{a-\pi/2\lambda}^{a+\pi/2\lambda} \varphi_{\lambda, r-2}(t)\,dt =$$

$$= \varphi_{\lambda, r-1}\left(a + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - \varphi_{\lambda, r-1}\left(a - \frac{\pi}{2\lambda}\right) = 2\|\varphi_{\lambda, r-1}\|_\infty,$$

что невозможно ввиду (11). Тем самым равенство (13) (с $\varepsilon = 1$) доказано для $t \in (a - \pi/2\lambda,\ a + \pi/2\lambda)$. Следовательно, учитывая (11), получаем

$$x'(s+t) = \varphi_{\lambda,\,r-1}(t) \tag{17}$$

для $t \in (a - \pi/2\lambda,\ a + \pi/2\lambda)$.

Покажем теперь, что (17) выполнено для всех $t \in (\alpha - \pi/\lambda,\ \alpha + \pi/\lambda)$. Действительно, ввиду (11) для функции x' выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова. Согласно (17) (напомним, мы предположили для определенности, что $\varphi_{\lambda,\,r-2}(a) > 0$) имеем

$$x'\left(s + a + \frac{\pi}{2\lambda}\right) = -x'\left(s + a - \frac{\pi}{2\lambda}\right) = \left\|\varphi_{\lambda,\,r-1}\right\|_\infty.$$

Поэтому с помощью теоремы сравнения Колмогорова заключаем, что

$$x'(s+t) \geq \varphi_{\lambda,\,r-1}(t), \qquad t \in (a,\ a + \pi/\lambda), \tag{18}$$

причем $\varphi_{\lambda,\,r-1}(t) > 0$ для $t \in (a,\ a + \pi/\lambda)$, и

$$x'(s+t) \leq \varphi_{\lambda,\,r-1}(t), \qquad t \in (a - \pi/\lambda,\ a), \tag{19}$$

причем $\varphi_{\lambda,\,r-1}(t) < 0$ для $t \in (a - \pi/\lambda,\ a)$. Применяя к функции x' рассуждения, с помощью которых было установлено равенство (13) для $t \in (a - \pi/2\lambda,\ a + \pi/2\lambda)$, заключаем, что в (18) для всех $t \in (a,\ a + \pi/\lambda)$ и в (19) для всех $t \in (a - \pi/\lambda,\ a)$ выполнено равенство, ибо иначе было бы $\|x\|_\infty > \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_\infty$, что невозможно ввиду (8). Итак, (17) выполнено для всех $t \in (a - \pi/\lambda,\ a + \pi/\lambda)$. Следовательно,

$$x''(s+t) = \varphi_{\lambda,\,r-2}(t), \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{\lambda},\ a + \frac{\pi}{\lambda}\right). \tag{20}$$

Тем самым утверждение 1 доказано.

Докажем теперь утверждение 2. Прежде всего убедимся в его справедливости для $k = \pm 1$. Действительно, так как

$$\left|\varphi_{\lambda,\,r-2}\left(a - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| = \left|\varphi_{\lambda,\,r-2}\left(a + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| = \left\|\varphi_{\lambda,\,r-2}\right\|_\infty,$$

то равенство (14) для $k = \pm 1$ следует из (20). Теперь, повторив приведенные выше рассуждения с заменой точки a точкой $a - \pi/\lambda$ и затем точкой $a + {}+ \pi/\lambda$, докажем справедливость утверждения 2 для $k = -2$ и $k = +2$ и т. д. Для произвольного k утверждение 2 легко доказывается методом математической индукции.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$. *Если для функции* $x \in W^r_\infty(\mathbf{R})$ *выполнены равенства*

$$\|x\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_\infty \tag{21}$$

и

$$\|x'\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,\,r-1}\|_\infty \tag{22}$$

с некоторым $\lambda > 0$, *причем норма* $\|x'\|_\infty$ *достигается в некоторой точке* $t_1 \in \mathbf{R}$, *то существует* $s \in \mathbf{R}$ *такое, что*

$$x(t+s) = \varphi_{\lambda, r}(t) \tag{23}$$

для $t \in (a, a+\pi/\lambda)$, *где* a — *некоторый нуль функции* $\varphi_{\lambda, r-1}$.

В случае $r \geq 3$ *равенство* (23) *выполнено для всех* $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку b максимума функции $\varphi_{\lambda, r-1}$. Из (22) ввиду предположения о том, что норма $\|x'\|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_1 \in \mathbf{R}$, следует существование такого $s \in \mathbf{R}$, что

$$|x'(s+b)| = \|x'\|_\infty.$$

Не ограничивая общности можно считать, что $x'(s+b) > 0$. Тогда согласно (22)

$$x'(s+b) = \varphi_{\lambda, r-1}(b) = \|\varphi_{\lambda, r-1}\|_\infty.$$

Применяя к функции x' теорему сравнения Колмогорова (ее условия выполнены ввиду (22)), получаем

$$x'(s+t) \geq \varphi_{\lambda, r-1}(t), \qquad t \in \left(b - \frac{\pi}{2\lambda}, b + \frac{\pi}{2\lambda}\right). \tag{24}$$

При этом так же, как и при доказательстве леммы 1, устанавливаем, что для всех $t \in (b - \pi/2\lambda,\ b + \pi/2\lambda)$ в (24) выполнено равенство, ибо иначе было бы $\|x\|_\infty > \|\varphi_{\lambda, r}\|_\infty$, что противоречит (21). Таким образом, $x'(s+t) = \varphi_{\lambda, r-1}(t)$, $t \in (a, a+\pi/\lambda)$, где $a = b - \pi/2\lambda$ — нуль функции $\varphi_{\lambda, r-1}$. Следовательно, существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что

$$x(s+t) = \varphi_{\lambda, r}(t) + c, \qquad t \in \left(a, a + \frac{\pi}{\lambda}\right).$$

При этом $c = 0$, так как в противном случае было бы $\|x\|_\infty > \|\varphi_{\lambda, r}\|_\infty$, что невозможно ввиду (21). Тем самым (23) доказано.

Пусть теперь $r \geq 3$. Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что из (21) и неравенства Колмогорова

$$\|x''\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-2}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-2/r}} \|x\|_\infty^{1-2/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{2/r}$$

ввиду тождества $\|\varphi_{\lambda, r}\|_\infty = \lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty$ следует неравенство $\|x''\|_\infty \leq$ $\leq \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty$. С другой стороны, из (23) получаем $x''(s+t) = \varphi_{\lambda, r-2}(t)$ для $t \in (a, a+\pi/\lambda)$, причем

$$|\varphi_{\lambda, r-2}(a)| = \left|\varphi_{\lambda, r-2}\left(a + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| = \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty.$$

Следовательно, $\|x''\|_\infty \geq \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty$. Таким образом, $\|x''\|_\infty = \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty$ и ввиду (23) $\|x''\|_\infty$ достигается в некоторой точке. Значит, выполнены условия леммы 1, из которой и следует второе утверждение леммы 2.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $r \geq 3$, $k < r$. *Тогда во множестве* $K_\infty^r(\mathbf{R})$ *знак равенства в неравенстве Колмогорова*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r} \tag{25}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(\lambda t + b)$, *где* $a, b \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$.

Доказательство. Пусть функция $x \in K^r_\infty(\mathbf{R})$ реализует знак равенства в (25). Ввиду однородности (25) можно считать, что

$$\| x^{(r)} \|_\infty = 1. \tag{26}$$

Тогда $x \in W^r_\infty(\mathbf{R})$. Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$\| x \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r} \|_\infty. \tag{27}$$

Поскольку для x в (25) выполнено равенство, ввиду тождества $\| \varphi_{\lambda, r} \|_\infty = \lambda^{-r} \| \varphi_r \|_\infty$ из (27) следует

$$\| x^{(k)} \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r-k} \|_\infty. \tag{28}$$

Докажем, что тогда

$$\| x^{(i)} \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r-i} \|_\infty \tag{29}$$

для всех $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Ясно, что (29) достаточно доказать для $i = k-1$ (если $k > 1$) и для $i = k+1$ (если $k < r-1$).

Пусть $k > 1$. Для доказательства (29) при $i = k-1$ применим неравенство Колмогорова

$$\left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty \le \frac{\| \varphi_{r-k+1} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-(k-1)/r}} \| x \|_\infty^{1-(k-1)/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k-1)/r}.$$

Из этого неравенства и (27) получаем

$$\| x^{(k-1)} \|_\infty \le \| \varphi_{\lambda, r-k+1} \|_\infty.$$

С другой стороны, из (28) и неравенства Колмогорова

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_{r-k+1} \|_\infty^{1-1/(r-k+1)}} \left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty^{1-1/(r-k+1)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1/(r-k+1)}$$

следует

$$\| x^{(k-1)} \|_\infty \ge \| \varphi_{\lambda, r-k+1} \|_\infty.$$

Таким образом,

$$\| x^{(k-1)} \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r-k+1} \|_\infty,$$

т. е. равенство (29) для $i = k-1$ доказано.

Аналогично доказывается равенство (29) при $i = k+1$ в случае $k < r-1$.

Поскольку $x \in K^r_\infty(\mathbf{R})$, то существует $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ такое, что норма $\| x^{(j)} \|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_j \in \mathbf{R}$. Если $j = 1$ или $j = 2$, то утверждение теоремы следует ввиду (27) и (29) (при $i = j$) из леммы 2 или леммы 1 соответственно.

Пусть теперь $j > 2$. Положим $\bar{x} := x^{(j-2)}$. Тогда ввиду (29) $\| \bar{x} \|_\infty = \| \varphi_{r, r-j+2} \|_\infty$ и $\| \bar{x}'' \|_\infty = \left\| \varphi_{r, r-j} \right\|_\infty$, причем $\| \bar{x}'' \|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_j \in \mathbf{R}$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 1.

***Замечание* 1.** Теорема 1 не верна для $r = 2$. Построим пример не равной тождественно нулю функции $x_0 \in K_\infty^2(\mathbf{R})$, отличной от функций вида $x(t) = a\varphi_2(\lambda t + b)$, которая реализует знак равенства в неравенстве

$$\| x' \|_\infty \le \frac{\| \varphi_1 \|_\infty}{\| \varphi_2 \|_\infty^{1/2}} \| x \|_\infty^{1/2} \| x'' \|_\infty^{1/2}. \tag{30}$$

Зафиксируем произвольное $\lambda > 0$ и выберем ω так, чтобы

$$2\| \varphi_{\omega,2} \|_\infty = \| \varphi_{\lambda,2} \|_\infty, \tag{31}$$

т. е. положим $\omega = \lambda\sqrt{2}$. Определим функцию $x_0(t)$ на промежутке $[-\pi/\omega, \pi/\omega + \pi/\lambda]$ следующим образом:

$$x_0(t) = \begin{cases} -\varphi_{\omega,2}\left(-t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right) - \| \varphi_{\omega,2} \|_\infty, & \text{если} \quad t \in \left[-\dfrac{\pi}{\omega}, 0\right]; \\ \varphi_{\omega,2}\left(t + \dfrac{\pi}{2\omega}\right) + \| \varphi_{\omega,2} \|_\infty, & \text{если} \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{\omega}\right]; \\ \varphi_{\lambda,2}\left(t - \dfrac{\pi}{2\lambda} - \dfrac{\pi}{\omega}\right), & \text{если} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{\omega}, \dfrac{\pi}{\lambda} + \dfrac{\pi}{\omega}\right], \end{cases}$$

и продолжим ее на всю ось $(\pi/\lambda + 2\pi/\omega)$-периодически. Ввиду (31) $x_0(t)$ непрерывна на всей оси. Поскольку в точках „склейки" $\pm\pi/\omega$, $\pi/\lambda + \pi/\omega$ и 0 выполнены равенства

$$x_0'(0) = x_0'\left(\pm\frac{\pi}{\omega}\right) = x_0'\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\omega}\right) = 0,$$

то $x_0 \in K_\infty^2(\mathbf{R})$. При этом нетрудно видеть, что

$$\| x_0 \|_\infty = \| \varphi_{\lambda,2} \|_\infty, \quad \| x_0' \|_\infty = \| \varphi_{\lambda,1} \|_\infty \quad \text{и} \quad \| x_0'' \|_\infty = 1.$$

Поэтому x_0 реализует знак равенства в (30), но, очевидно, не является функцией вида $a\varphi_{\lambda,2}(t + b)$.

Теорема 2. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $r \ge 3$, $2 \le k < r$. Тогда во множестве $L_\infty^r(\mathbf{T})$ знак равенства в неравенстве*

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r} \tag{32}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(nt + b)$, где $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $x(t)$ не является функцией вида $x(t) = a\varphi_r(nt + b)$, то для нее в (32) выполнено строгое неравенство. Зафиксируем функцию $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$, которая не является функцией такого вида. Поскольку $x(t)$ имеет период 2π, не существует $\lambda > 0$ такого, что $x(t) = a\varphi_r(\lambda t + b)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Тогда в силу теоремы 1 выполнено строгое неравенство

$$\| x' \|_\infty < \frac{\| \varphi_{r-1} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-1/r}} \| x \|_\infty^{1-1/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1/r}. \tag{33}$$

Ввиду однородности (33) можно считать, что

$$\| x^{(r)} \|_\infty = 1. \tag{34}$$

Тогда $x \in W^r_\infty(\mathbf{T})$. Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$\| x \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r} \|_\infty. \tag{35}$$

Из (33) – (35) непосредственно следует неравенство $\| x' \|_\infty < \| \varphi_{\lambda, r-1} \|_\infty$. Поэтому существует $\omega > \lambda$ такое, что

$$\| x' \|_\infty = \| \varphi_{\omega, r-1} \|_\infty. \tag{36}$$

Применяя неравенство (32) к функции x', получаем

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_{r-1} \|_\infty^{1-(k-1)/(r-1)}} \| x' \|_\infty^{1-(k-1)/(r-1)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k-1)/(r-1)}. \tag{37}$$

Из (36), (37) и (34) следует, что

$$\| x^{(k)} \|_q \le \omega^{-(r-k)} \| \varphi_{r-k} \|_q < \lambda^{-(r-k)} \| \varphi_{r-k} \|_q. \tag{38}$$

Комбинируя (35) и (38), получаем

$$\frac{\left\| x^{(k)} \right\|_q}{\left\| x^{(k)} \right\|_\infty^{1-k/r}} < \frac{\lambda^{-(r-k)} \| \varphi_{r-k} \|_q}{\left(\lambda^{-r} \| \varphi_r \|_\infty\right)^{1-k/r}} = \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}}.$$

Отсюда ввиду (34) следует, что в (32) выполнено строгое неравенство.

Теорема доказана.

3. О множестве экстремальных функций в неравенствах типа Бора – Фавара.

Теорема 3. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$. *Во множестве* $L^r H^n_\infty$ *знак равенства в неравенстве Бора – Фавара*

$$\| x \|_\infty \le \| \varphi_{n, r} \|_\infty \| x^{(r)} \|_\infty \tag{39}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_{\lambda, r}(nt + b)$, *где* $a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть функция $x \in L^r H^n_\infty$ реализует знак равенства в (39). Ввиду однородности (39) можно считать, что

$$\| x^{(r)} \|_\infty = 1. \tag{40}$$

Тогда

$$\| x \|_\infty = \| \varphi_{n, r} \|_\infty. \tag{41}$$

Поскольку $\int_0^{2\pi} x(t)\, dt = 0$, то для $k \in \mathbf{N}$ определен k-й периодический интеграл от функции x. Через x_k обозначим k-й периодический интеграл от функции x, который в среднем равен нулю на периоде. Ясно, что $x_k \in L^{r+k} H^n_\infty$. Поэтому в силу неравенства Бора – Фавара и ввиду (40)

$$\| x_k \|_\infty \le \| \varphi_{n, r+k} \|_\infty, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{42}$$

Покажем, что в силу (41) неравенство (42) превращается в равенство. Пусть a — произвольная точка максимума функции $\varphi_{n, r}$. Выберем $s \in \mathbf{R}$ так, чтобы $|x(s + a)| = \| x \|_\infty$. Не ограничивая общности можем считать, что $x(s + a) > 0$. Тогда согласно (41)

$$x(s+a) = \varphi_{n,r}(a) = \|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

Применяя к функции x теорему сравнения Колмогорова (ее условия выполнены ввиду (40) и (41)), получаем

$$x(s+t) \geq \varphi_{n,r}(t), \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{2n}, a + \frac{\pi}{2n}\right). \tag{43}$$

При этом так же, как и при доказательстве леммы 1, убеждаемся в том, что для всех $t \in (a - \pi/2n,\ a + \pi/2n)$ (43) превращается в равенство, так как в противном случае было бы $\|x_1\|_\infty > \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$, что невозможно ввиду (42). Следовательно, существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что

$$x_1(s+t) = \varphi_{n,r+1}(t) + c, \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{2n}, a + \frac{\pi}{2n}\right). \tag{44}$$

При этом $c = 0$, ибо иначе снова получим неравенство $\|x_1\|_\infty > \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$, которое невозможно ввиду (42). Из (44) аналогично выводим равенства

$$x_k(s+t) = \varphi_{n,r+k}(t), \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{2n}, a + \frac{\pi}{2n}\right),$$

из которых непосредственно следует соотношение $\|x_k\|_\infty \geq \|\varphi_{n,r+k}\|_\infty$. Последнее неравенство вместе с (42) дает равенство

$$\|x_k\|_\infty = \|\varphi_{n,r+k}\|_\infty, \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{45}$$

В частности, из (45) при $k = 2$, (41) и (40) следует, что для функции $x_2 \in W_\infty^{r+2}(\mathbf{R})$ выполнены условия леммы 1, в силу которой $x_2(s+t) = \varphi_{n,r+2}(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $n, r \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty)$. *Во множестве* $L^r H_\infty^n$ *знак равенства в неравенстве*

$$\|x\|_p \leq \|\varphi_{n,r}\|_p \|x^{(r)}\|_\infty \tag{46}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(nt+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть функция $x \in L^r H_\infty^n$ реализует знак равенства в (46), т. е.

$$\|x\|_p = \|\varphi_{n,r}\|_p \|x^{(r)}\|_\infty. \tag{47}$$

Если x_1 — первообразная от функции x, в среднем равная нулю на периоде, то $x_1 \in L^{r+1} H_\infty^n$. Согласно неравенству Лигуна (32)

$$\|x\|_p \leq \frac{\|\varphi_r\|_p}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty^{1-1/(r+1)}} \|x_1\|_\infty^{1-1/(r+1)} \|x^{(r)}\|_\infty^{1/(r+1)}.$$

Отсюда и из (47) получаем

$$\|x_1\|_\infty \geq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty \|x^{(r)}\|_\infty.$$

Ввиду неравенства Бора – Фавара в последнем неравенстве имеет место знак равенства. Поэтому в силу теоремы 3 существуют $a, b \in \mathbf{R}$ такие, что $x_1(t) = a\varphi_{r+1}(nt+b)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

4. О множестве экстремальных функций в некоторых других неравенствах типа Колмогорова. Для дальнейшего изложения нам необходима лемма, доказательство которой является небольшим видоизменением рассуждений, с помощью которых в работах [6, 7] доказаны неравенства (3) и (4) соответственно.

Лемма 3. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty)$. *Если для функции* $x \in W_\infty^r(\mathbf{T})$ *выполнены равенства*

$$E_0(x)_\infty = \|\varphi_{\lambda, r}\|_\infty \tag{48}$$

и

$$\|x\|_{L_p(\mathbf{T})} = \|\varphi_{\lambda, r}\|_{L_p[0, 2\pi/\lambda]} \tag{49}$$

с некоторым $\lambda > 0$, *то* $\lambda = 1$ *и существует* $s \in \mathbf{R}$ *такое, что*

$$x(t+s) = \varphi_r(t) \tag{50}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Выберем $s \in \mathbf{R}$ так, чтобы точка M максимума функции $x(t+s)$ на $[0, 2\pi)$ совпала с какой-либо точкой максимума $\varphi_{\lambda, r}$ и через m обозначим ближайшую слева от M точку минимума функции x. Символом $c_\infty(x)$ обозначим константу наилучшего равномерного приближения функции x на периоде, т. е. такую константу, что $\|x - c_\infty(x)\|_\infty = E_0(x)_\infty$.

Рассмотрим случай, когда функция x имеет нули (в противном случае рассуждения, приводимые ниже, упрощаются и приводят к противоречию с тем, что (48) и (49) выполнены одновременно). В силу данного предположения $x(M) > 0$ и $x(m) < 0$.

Определим 2π-периодическую функцию ψ_r следующим образом. Пусть a и a_1 — ближайшие слева и справа от точки M нули $\varphi_{\lambda, r}(\cdot) + c_\infty(x)$. Выберем τ_1 и τ_2 так, чтобы минимумы функций $\varphi_{\lambda, r}(t+\tau_1) + c_\infty(x)$ и $\varphi_{\lambda, r}(t+\tau_2) + c_\infty(x)$ достигались в точках m и $m + 2\pi$ соответственно. Через b обозначим ближайший справа от m нуль $\varphi_{\lambda, r}(t+\tau_1) + c_\infty(x)$, а через b_1 — ближайший слева от $m + 2\pi$ нуль $\varphi_{\lambda, r}(t+\tau_2) + c_\infty(x)$. Согласно теореме сравнения Колмогорова (ее условия выполнены ввиду (48)), имеют место неравенства

$$x(s+t) \geq \varphi_{\lambda, r}(t) + c_\infty(x) > 0, \quad t \in (a, a_1), \tag{51}$$

$$x(s+t) \leq \varphi_{\lambda, r}(t+\tau_1) + c_\infty(x) < 0, \quad t \in (m, b), \tag{52}$$

$$x(s+t) \leq \varphi_{\lambda, r}(t+\tau_2) + c_\infty(x) < 0, \quad t \in (b_1, m+2\pi). \tag{53}$$

Из (51) – (53) непосредственно следует, что $b \leq a$ и $a_1 \leq b_1$. Определим ψ_r на $[m, m+2\pi]$ равенствами

$$\psi_r(t) := \begin{cases} \varphi_{\lambda, r}(t) + c_\infty(x), & \text{если} \quad t \in (a, a_1); \\ \varphi_{\lambda, r}(t+\tau_1) + c_\infty(x), & \text{если} \quad t \in (m, b); \\ \varphi_{\lambda, r}(t+\tau_2) + c_\infty(x), & \text{если} \quad t \in (b_1, m+2\pi); \\ 0, & \text{если} \quad t \in [b, a] \cup [a_1, b_1], \end{cases}$$

и далее продолжим ее 2π-периодически на всю ось.

Ясно, что

$$\|\psi_r\|_{L_p(\mathbf{T})} = \|\varphi_{\lambda, r} + c_\infty(x)\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} \geq \|\varphi_{\lambda, r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}.$$

Пусть a — произвольная точка локального максимума $|\varphi_{\lambda, r-2}(t)|$. Из (9) ввиду предположения о том, что норма $\|x''\|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_2 \in \mathbf{R}$, следует существование такого $s \in \mathbf{R}$, что

$$|x''(s+a)| = |\varphi_{\lambda, r-2}(a)| = \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty. \tag{12}$$

Покажем, что в условиях леммы из (12) следуют два утверждения:

1) для любого $t \in (\alpha - \pi/\lambda, \alpha + \pi/\lambda)$ имеет место равенство

$$x''(s+t) = \varepsilon\varphi_{\lambda, r-2}(t), \qquad \varepsilon = \pm 1; \tag{13}$$

2) для любого $k \in \mathbf{Z}$

$$\left| x''\left(s + a + k\frac{\pi}{\lambda}\right) \right| = \left| \varphi_{\lambda, r-2}\left(a + k\frac{\pi}{\lambda}\right) \right|. \tag{14}$$

Из утверждений 1 и 2 будет следовать утверждение леммы. Действительно, использовав (14), заменим в (12) точку a точкой $a + k\pi/\lambda$. Тогда согласно утверждению 1 равенство (13) выполняется для всех

$$t \in \left(a + \frac{(k-1)\pi}{\lambda}, a + \frac{(k+1)\pi}{\lambda} \right).$$

Отсюда ввиду произвольности $k \in \mathbf{Z}$ следует справедливость (13) для всех $t \in \mathbf{R}$. Заменив s (в случае $\varepsilon = -1$) на $s_1 = s + \pi/\lambda$ и сохранив за ним обозначение s, получим равенство

$$x''(s+t) = \varphi_{\lambda, r-2}(t), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Отсюда имеем

$$x'(s+t) = \varphi_{\lambda, r-1}(t) + c, \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{15}$$

где c — некоторая постоянная. При этом $c = 0$, ибо иначе было бы $\|x'\|_\infty > \|\varphi_{r-1}\|_\infty$, что противоречит (11). Аналогично, из (15) и (8) получаем (10) для всех $t \in \mathbf{R}$.

Итак, для доказательства леммы достаточно установить справедливость утверждений 1 и 2.

Докажем сначала, что равенство (13) выполнено для $t \in (a - \pi/2\lambda, a + \pi/2\lambda)$. Не ограничивая общности будем считать, что $x''(s+a) > 0$ и $\varphi_{\lambda, r-2}(a) > 0$. Тогда согласно (12)

$$x''(s+a) = \varphi_{\lambda, r-2}(a) = \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty.$$

Поэтому, применяя теорему сравнения Колмогорова к функции x'' (ее условия выполнены ввиду (9)), имеем

$$x''(s+t) \geq \varphi_{\lambda, r-2}(t), \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{2\lambda}, a + \frac{\pi}{2\lambda} \right). \tag{16}$$

Покажем, что для всех $t \in (a - \pi/2\lambda, a + \pi/2\lambda)$ (16) превращается в равенство. Действительно, в противном случае ввиду непрерывности функций x'' и $\varphi_{\lambda, r-2}$ было бы

$$2\|x'\|_\infty \geq \int_{a-\pi/2\lambda}^{a+\pi/2\lambda} x''(t+s)\,dt > \int_{a-\pi/2\lambda}^{a+\pi/2\lambda} \varphi_{\lambda, r-2}(t)\,dt =$$

$$= \varphi_{\lambda, r-1}\left(a + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - \varphi_{\lambda, r-1}\left(a - \frac{\pi}{2\lambda}\right) = 2\|\varphi_{\lambda, r-1}\|_\infty,$$

что невозможно ввиду (11). Тем самым равенство (13) (с $\varepsilon = 1$) доказано для $t \in (a - \pi/2\lambda,\ a + \pi/2\lambda)$. Следовательно, учитывая (11), получаем

$$x'(s+t) = \varphi_{\lambda,\,r-1}(t) \tag{17}$$

для $t \in (a - \pi/2\lambda,\ a + \pi/2\lambda)$.

Покажем теперь, что (17) выполнено для всех $t \in (\alpha - \pi/\lambda,\ \alpha + \pi/\lambda)$. Действительно, ввиду (11) для функции x' выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова. Согласно (17) (напомним, мы предположили для определенности, что $\varphi_{\lambda,\,r-2}(a) > 0$) имеем

$$x'\left(s + a + \frac{\pi}{2\lambda}\right) = -x'\left(s + a - \frac{\pi}{2\lambda}\right) = \left\|\varphi_{\lambda,\,r-1}\right\|_\infty.$$

Поэтому с помощью теоремы сравнения Колмогорова заключаем, что

$$x'(s+t) \geq \varphi_{\lambda,\,r-1}(t), \qquad t \in (a, a + \pi/\lambda), \tag{18}$$

причем $\varphi_{\lambda,\,r-1}(t) > 0$ для $t \in (a, a + \pi/\lambda)$, и

$$x'(s+t) \leq \varphi_{\lambda,\,r-1}(t), \qquad t \in (a - \pi/\lambda, a), \tag{19}$$

причем $\varphi_{\lambda,\,r-1}(t) < 0$ для $t \in (a - \pi/\lambda, a)$. Применяя к функции x' рассуждения, с помощью которых было установлено равенство (13) для $t \in (a - \pi/2\lambda,$ $a + \pi/2\lambda)$, заключаем, что в (18) для всех $t \in (a, a + \pi/\lambda)$ и в (19) для всех $t \in (a - \pi/\lambda, a)$ выполнено равенство, ибо иначе было бы $\|x\|_\infty > \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_\infty$, что невозможно ввиду (8). Итак, (17) выполнено для всех $t \in (a - \pi/\lambda,\ a + \pi/\lambda)$. Следовательно,

$$x''(s+t) = \varphi_{\lambda,\,r-2}(t), \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{\lambda}, a + \frac{\pi}{\lambda}\right). \tag{20}$$

Тем самым утверждение 1 доказано.

Докажем теперь утверждение 2. Прежде всего убедимся в его справедливости для $k = \pm 1$. Действительно, так как

$$\left|\varphi_{\lambda,\,r-2}\left(a - \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| = \left|\varphi_{\lambda,\,r-2}\left(a + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| = \left\|\varphi_{\lambda,\,r-2}\right\|_\infty,$$

то равенство (14) для $k = \pm 1$ следует из (20). Теперь, повторив приведенные выше рассуждения с заменой точки a точкой $a - \pi/\lambda$ и затем точкой $a + \pi/\lambda$, докажем справедливость утверждения 2 для $k = -2$ и $k = +2$ и т. д. Для произвольного k утверждение 2 легко доказывается методом математической индукции.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$. *Если для функции* $x \in W^r_\infty(\mathbf{R})$ *выполнены равенства*

$$\|x\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,\,r}\|_\infty \tag{21}$$

и

$$\|x'\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,\,r-1}\|_\infty \tag{22}$$

с некоторым $\lambda > 0$, *причем норма* $\|x'\|_\infty$ *достигается в некоторой точке* $t_1 \in \mathbf{R}$, *то существует* $s \in \mathbf{R}$ *такое, что*

$$x(t+s) = \varphi_{\lambda, r}(t) \tag{23}$$

для $t \in (a, a+\pi/\lambda)$, *где* a — *некоторый нуль функции* $\varphi_{\lambda, r-1}$.

В случае $r \geq 3$ *равенство* (23) *выполнено для всех* $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку b максимума функции $\varphi_{\lambda, r-1}$. Из (22) ввиду предположения о том, что норма $\|x'\|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_1 \in \mathbf{R}$, следует существование такого $s \in \mathbf{R}$, что

$$|x'(s+b)| = \|x'\|_\infty.$$

Не ограничивая общности можно считать, что $x'(s+b) > 0$. Тогда согласно (22)

$$x'(s+b) = \varphi_{\lambda, r-1}(b) = \|\varphi_{\lambda, r-1}\|_\infty.$$

Применяя к функции x' теорему сравнения Колмогорова (ее условия выполнены ввиду (22)), получаем

$$x'(s+t) \geq \varphi_{\lambda, r-1}(t), \qquad t \in \left(b - \frac{\pi}{2\lambda}, b + \frac{\pi}{2\lambda}\right). \tag{24}$$

При этом так же, как и при доказательстве леммы 1, устанавливаем, что для всех $t \in (b - \pi/2\lambda,\ b + \pi/2\lambda)$ в (24) выполнено равенство, ибо иначе было бы $\|x\|_\infty > \|\varphi_{\lambda, r}\|_\infty$, что противоречит (21). Таким образом, $x'(s+t) = \varphi_{\lambda, r-1}(t)$, $t \in (a, a+\pi/\lambda)$, где $a = b - \pi/2\lambda$ — нуль функции $\varphi_{\lambda, r-1}$. Следовательно, существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что

$$x(s+t) = \varphi_{\lambda, r}(t) + c, \qquad t \in \left(a, a + \frac{\pi}{\lambda}\right).$$

При этом $c = 0$, так как в противном случае было бы $\|x\|_\infty > \|\varphi_{\lambda, r}\|_\infty$, что невозможно ввиду (21). Тем самым (23) доказано.

Пусть теперь $r \geq 3$. Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что из (21) и неравенства Колмогорова

$$\|x''\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-2}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-2/r}} \|x\|_\infty^{1-2/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{2/r}$$

ввиду тождества $\|\varphi_{\lambda, r}\|_\infty = \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_\infty$ следует неравенство $\|x''\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty$. С другой стороны, из (23) получаем $x''(s+t) = \varphi_{\lambda, r-2}(t)$ для $t \in (a, a+\pi/\lambda)$, причем

$$|\varphi_{\lambda, r-2}(a)| = \left|\varphi_{\lambda, r-2}\left(a + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right| = \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty.$$

Следовательно, $\|x''\|_\infty \geq \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty$. Таким образом, $\|x''\|_\infty = \|\varphi_{\lambda, r-2}\|_\infty$ и ввиду (23) $\|x''\|_\infty$ достигается в некоторой точке. Значит, выполнены условия леммы 1, из которой и следует второе утверждение леммы 2.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $r \geq 3$, $k < r$. *Тогда во множестве* $K_\infty^r(\mathbf{R})$ *знак равенства в неравенстве Колмогорова*

$$\|x^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r} \tag{25}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(\lambda t + b)$, *где* $a, b \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$.

Доказательство. Пусть функция $x \in K_\infty^r(\mathbf{R})$ реализует знак равенства в (25). Ввиду однородности (25) можно считать, что

$$\| x^{(r)} \|_\infty = 1. \tag{26}$$

Тогда $x \in W_\infty^r(\mathbf{R})$. Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$\| x \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r} \|_\infty. \tag{27}$$

Поскольку для x в (25) выполнено равенство, ввиду тождества $\| \varphi_{\lambda, r} \|_\infty = \lambda^{-r} \| \varphi_r \|_\infty$ из (27) следует

$$\| x^{(k)} \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r-k} \|_\infty. \tag{28}$$

Докажем, что тогда

$$\| x^{(i)} \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r-i} \|_\infty \tag{29}$$

для всех $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Ясно, что (29) достаточно доказать для $i = k-1$ (если $k > 1$) и для $i = k+1$ (если $k < r-1$).

Пусть $k > 1$. Для доказательства (29) при $i = k-1$ применим неравенство Колмогорова

$$\left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty \le \frac{\| \varphi_{r-k+1} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-(k-1)/r}} \| x \|_\infty^{1-(k-1)/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k-1)/r}.$$

Из этого неравенства и (27) получаем

$$\| x^{(k-1)} \|_\infty \le \| \varphi_{\lambda, r-k+1} \|_\infty.$$

С другой стороны, из (28) и неравенства Колмогорова

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_{r-k+1} \|_\infty^{1-1/(r-k+1)}} \left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty^{1-1/(r-k+1)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1/(r-k+1)}$$

следует

$$\| x^{(k-1)} \|_\infty \ge \| \varphi_{\lambda, r-k+1} \|_\infty.$$

Таким образом,

$$\| x^{(k-1)} \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r-k+1} \|_\infty,$$

т. е. равенство (29) для $i = k-1$ доказано.

Аналогично доказывается равенство (29) при $i = k+1$ в случае $k < r-1$.

Поскольку $x \in K_\infty^r(\mathbf{R})$, то существует $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ такое, что норма $\| x^{(j)} \|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_j \in \mathbf{R}$. Если $j = 1$ или $j = 2$, то утверждение теоремы следует ввиду (27) и (29) (при $i = j$) из леммы 2 или леммы 1 соответственно.

Пусть теперь $j > 2$. Положим $\bar{x} := x^{(j-2)}$. Тогда ввиду (29) $\| \bar{x} \|_\infty = \| \varphi_{r, r-j+2} \|_\infty$ и $\| \bar{x}'' \|_\infty = \left\| \varphi_{r, r-j} \right\|_\infty$, причем $\| \bar{x}'' \|_\infty$ достигается в некоторой точке $t_j \in \mathbf{R}$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 1.

***Замечание* 1.** Теорема 1 не верна для $r = 2$. Построим пример не равной тождественно нулю функции $x_0 \in K_\infty^2(\mathbf{R})$, отличной от функций вида $x(t) = a\varphi_2(\lambda t + b)$, которая реализует знак равенства в неравенстве

$$\|x'\|_\infty \le \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{\|\varphi_2\|_\infty^{1/2}} \|x\|_\infty^{1/2} \|x''\|_\infty^{1/2}. \tag{30}$$

Зафиксируем произвольное $\lambda > 0$ и выберем ω так, чтобы

$$2\|\varphi_{\omega,2}\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,2}\|_\infty, \tag{31}$$

т. е. положим $\omega = \lambda\sqrt{2}$. Определим функцию $x_0(t)$ на промежутке $[-\pi/\omega, \pi/\omega + \pi/\lambda]$ следующим образом:

$$x_0(t) = \begin{cases} -\varphi_{\omega,2}\left(-t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right) - \|\varphi_{\omega,2}\|_\infty, & \text{если} \quad t \in \left[-\dfrac{\pi}{\omega}, 0\right]; \\ \varphi_{\omega,2}\left(t + \dfrac{\pi}{2\omega}\right) + \|\varphi_{\omega,2}\|_\infty, & \text{если} \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{\omega}\right]; \\ \varphi_{\lambda,2}\left(t - \dfrac{\pi}{2\lambda} - \dfrac{\pi}{\omega}\right), & \text{если} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{\omega}, \dfrac{\pi}{\lambda} + \dfrac{\pi}{\omega}\right], \end{cases}$$

и продолжим ее на всю ось $(\pi/\lambda + 2\pi/\omega)$-периодически. Ввиду (31) $x_0(t)$ непрерывна на всей оси. Поскольку в точках „склейки" $\pm\pi/\omega$, $\pi/\lambda + \pi/\omega$ и 0 выполнены равенства

$$x_0'(0) = x_0'\left(\pm\frac{\pi}{\omega}\right) = x_0'\left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\omega}\right) = 0,$$

то $x_0 \in K_\infty^2(\mathbf{R})$. При этом нетрудно видеть, что

$$\|x_0\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,2}\|_\infty, \quad \|x_0'\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,1}\|_\infty \quad \text{и} \quad \|x_0''\|_\infty = 1.$$

Поэтому x_0 реализует знак равенства в (30), но, очевидно, не является функцией вида $a\varphi_{\lambda,2}(t + b)$.

Теорема 2. *Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $r \ge 3$, $2 \le k < r$. Тогда во множестве $L_\infty^r(\mathbf{T})$ знак равенства в неравенстве*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r} \tag{32}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(nt + b)$, где $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $x(t)$ не является функцией вида $x(t) = a\varphi_r(nt + b)$, то для нее в (32) выполнено строгое неравенство. Зафиксируем функцию $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$, которая не является функцией такого вида. Поскольку $x(t)$ имеет период 2π, не существует $\lambda > 0$ такого, что $x(t) = a\varphi_r(\lambda t + b)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Тогда в силу теоремы 1 выполнено строгое неравенство

$$\|x'\|_\infty < \frac{\|\varphi_{r-1}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-1/r}} \|x\|_\infty^{1-1/r} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1/r}. \tag{33}$$

Ввиду однородности (33) можно считать, что

$$\| x^{(r)} \|_\infty = 1. \tag{34}$$

Тогда $x \in W_\infty^r(\mathbf{T})$. Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$\| x \|_\infty = \| \varphi_{\lambda, r} \|_\infty. \tag{35}$$

Из (33) – (35) непосредственно следует неравенство $\| x' \|_\infty < \| \varphi_{\lambda, r-1} \|_\infty$. Поэтому существует $\omega > \lambda$ такое, что

$$\| x' \|_\infty = \| \varphi_{\omega, r-1} \|_\infty. \tag{36}$$

Применяя неравенство (32) к функции x', получаем

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_{r-1} \|_\infty^{1-(k-1)/(r-1)}} \| x' \|_\infty^{1-(k-1)/(r-1)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k-1)/(r-1)}. \tag{37}$$

Из (36), (37) и (34) следует, что

$$\| x^{(k)} \|_q \le \omega^{-(r-k)} \| \varphi_{r-k} \|_q < \lambda^{-(r-k)} \| \varphi_{r-k} \|_q. \tag{38}$$

Комбинируя (35) и (38), получаем

$$\frac{\left\| x^{(k)} \right\|_q}{\left\| x^{(k)} \right\|_\infty^{1-k/r}} < \frac{\lambda^{-(r-k)} \| \varphi_{r-k} \|_q}{\left(\lambda^{-r} \| \varphi_r \|_\infty \right)^{1-k/r}} = \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}}.$$

Отсюда ввиду (34) следует, что в (32) выполнено строгое неравенство.

Теорема доказана.

3. О множестве экстремальных функций в неравенствах типа Бора – Фавара.

Теорема 3. *Пусть $n, r \in \mathbf{N}$. Во множестве $L^r H_\infty^n$ знак равенства в неравенстве Бора – Фавара*

$$\| x \|_\infty \le \| \varphi_{n, r} \|_\infty \| x^{(r)} \|_\infty \tag{39}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_{\lambda, r}(nt + b)$, где $a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть функция $x \in L^r H_\infty^n$ реализует знак равенства в (39). Ввиду однородности (39) можно считать, что

$$\| x^{(r)} \|_\infty = 1. \tag{40}$$

Тогда

$$\| x \|_\infty = \| \varphi_{n, r} \|_\infty. \tag{41}$$

Поскольку $\int_0^{2\pi} x(t)\, dt = 0$, то для $k \in \mathbf{N}$ определен k-й периодический интеграл от функции x. Через x_k обозначим k-й периодический интеграл от функции x, который в среднем равен нулю на периоде. Ясно, что $x_k \in L^{r+k} H_\infty^n$. Поэтому в силу неравенства Бора – Фавара и ввиду (40)

$$\| x_k \|_\infty \le \| \varphi_{n, r+k} \|_\infty, \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{42}$$

Покажем, что в силу (41) неравенство (42) превращается в равенство. Пусть a — произвольная точка максимума функции $\varphi_{n, r}$. Выберем $s \in \mathbf{R}$ так, чтобы $| x(s + a) | = \| x \|_\infty$. Не ограничивая общности можем считать, что $x(s + a) > 0$. Тогда согласно (41)

$$x(s+a) = \varphi_{n,r}(a) = \|\varphi_{n,r}\|_\infty.$$

Применяя к функции x теорему сравнения Колмогорова (ее условия выполнены ввиду (40) и (41)), получаем

$$x(s+t) \geq \varphi_{n,r}(t), \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{2n}, a + \frac{\pi}{2n}\right). \tag{43}$$

При этом так же, как и при доказательстве леммы 1, убеждаемся в том, что для всех $t \in (a - \pi/2n,\ a + \pi/2n)$ (43) превращается в равенство, так как в противном случае было бы $\|x_1\|_\infty > \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$, что невозможно ввиду (42). Следовательно, существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что

$$x_1(s+t) = \varphi_{n,r+1}(t) + c, \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{2n}, a + \frac{\pi}{2n}\right). \tag{44}$$

При этом $c = 0$, ибо иначе снова получим неравенство $\|x_1\|_\infty > \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$, которое невозможно ввиду (42). Из (44) аналогично выводим равенства

$$x_k(s+t) = \varphi_{n,r+k}(t), \qquad t \in \left(a - \frac{\pi}{2n}, a + \frac{\pi}{2n}\right),$$

из которых непосредственно следует соотношение $\|x_k\|_\infty \geq \|\varphi_{n,r+k}\|_\infty$. Последнее неравенство вместе с (42) дает равенство

$$\|x_k\|_\infty = \|\varphi_{n,r+k}\|_\infty, \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{45}$$

В частности, из (45) при $k = 2$, (41) и (40) следует, что для функции $x_2 \in W_\infty^{r+2}(\mathbf{R})$ выполнены условия леммы 1, в силу которой $x_2(s+t) = \varphi_{n,r+2}(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть $n, r \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty)$. Во множестве $L^r H_\infty^n$ знак равенства в неравенстве*

$$\|x\|_p \leq \|\varphi_{n,r}\|_p \|x^{(r)}\|_\infty \tag{46}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(nt+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть функция $x \in L^r H_\infty^n$ реализует знак равенства в (46), т. е.

$$\|x\|_p = \|\varphi_{n,r}\|_p \|x^{(r)}\|_\infty. \tag{47}$$

Если x_1 — первообразная от функции x, в среднем равная нулю на периоде, то $x_1 \in L^{r+1} H_\infty^n$. Согласно неравенству Лигуна (32)

$$\|x\|_p \leq \frac{\|\varphi_r\|_p}{\|\varphi_{r+1}\|_\infty^{1-1/(r+1)}} \|x_1\|_\infty^{1-1/(r+1)} \|x^{(r)}\|_\infty^{1/(r+1)}.$$

Отсюда и из (47) получаем

$$\|x_1\|_\infty \geq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty \|x^{(r)}\|_\infty.$$

Ввиду неравенства Бора – Фавара в последнем неравенстве имеет место знак равенства. Поэтому в силу теоремы 3 существуют $a, b \in \mathbf{R}$ такие, что $x_1(t) = a\varphi_{r+1}(nt+b)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

4. О множестве экстремальных функций в некоторых других неравенствах типа Колмогорова. Для дальнейшего изложения нам необходима лемма, доказательство которой является небольшим видоизменением рассуждений, с помощью которых в работах [6, 7] доказаны неравенства (3) и (4) соответственно.

Лемма 3. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty)$. *Если для функции* $x \in W^r_\infty(\mathbf{T})$ *выполнены равенства*

$$E_0(x)_\infty = \|\varphi_{\lambda, r}\|_\infty \tag{48}$$

и

$$\|x\|_{L_p(\mathbf{T})} = \|\varphi_{\lambda, r}\|_{L_p[0, 2\pi/\lambda]} \tag{49}$$

с некоторым $\lambda > 0$, *то* $\lambda = 1$ *и существует* $s \in \mathbf{R}$ *такое, что*

$$x(t+s) = \varphi_r(t) \tag{50}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Выберем $s \in \mathbf{R}$ так, чтобы точка M максимума функции $x(t+s)$ на $[0, 2\pi)$ совпала с какой-либо точкой максимума $\varphi_{\lambda, r}$ и через m обозначим ближайшую слева от M точку минимума функции x. Символом $c_\infty(x)$ обозначим константу наилучшего равномерного приближения функции x на периоде, т. е. такую константу, что $\|x - c_\infty(x)\|_\infty = E_0(x)_\infty$.

Рассмотрим случай, когда функция x имеет нули (в противном случае рассуждения, приводимые ниже, упрощаются и приводят к противоречию с тем, что (48) и (49) выполнены одновременно). В силу данного предположения $x(M) > 0$ и $x(m) < 0$.

Определим 2π-периодическую функцию ψ_r следующим образом. Пусть a и a_1 — ближайшие слева и справа от точки M нули $\varphi_{\lambda, r}(\cdot) + c_\infty(x)$. Выберем τ_1 и τ_2 так, чтобы минимумы функций $\varphi_{\lambda, r}(t+\tau_1) + c_\infty(x)$ и $\varphi_{\lambda, r}(t+\tau_2) + c_\infty(x)$ достигались в точках m и $m + 2\pi$ соответственно. Через b обозначим ближайший справа от m нуль $\varphi_{\lambda, r}(t+\tau_1) + c_\infty(x)$, а через b_1 — ближайший слева от $m + 2\pi$ нуль $\varphi_{\lambda, r}(t+\tau_2) + c_\infty(x)$. Согласно теореме сравнения Колмогорова (ее условия выполнены ввиду (48)), имеют место неравенства

$$x(s+t) \geq \varphi_{\lambda, r}(t) + c_\infty(x) > 0, \quad t \in (a, a_1), \tag{51}$$

$$x(s+t) \leq \varphi_{\lambda, r}(t+\tau_1) + c_\infty(x) < 0, \quad t \in (m, b), \tag{52}$$

$$x(s+t) \leq \varphi_{\lambda, r}(t+\tau_2) + c_\infty(x) < 0, \quad t \in (b_1, m+2\pi). \tag{53}$$

Из (51) – (53) непосредственно следует, что $b \leq a$ и $a_1 \leq b_1$. Определим ψ_r на $[m, m+2\pi]$ равенствами

$$\psi_r(t) := \begin{cases} \varphi_{\lambda, r}(t) + c_\infty(x), & \text{если} \quad t \in (a, a_1); \\ \varphi_{\lambda, r}(t+\tau_1) + c_\infty(x), & \text{если} \quad t \in (m, b); \\ \varphi_{\lambda, r}(t+\tau_2) + c_\infty(x), & \text{если} \quad t \in (b_1, m+2\pi); \\ 0, & \text{если} \quad t \in [b, a] \cup [a_1, b_1], \end{cases}$$

и далее продолжим ее 2π-периодически на всю ось.

Ясно, что

$$\|\psi_r\|_{L_p(\mathbf{T})} = \|\varphi_{\lambda, r} + c_\infty(x)\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} \geq \|\varphi_{\lambda, r}\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}.$$

Поэтому в силу (51) – (53) имеет место цепочка соотношений

$$\|x\|_{L_p(\mathbf{T})} \geq \|\psi_r\|_{L_p(\mathbf{T})} = \left\|\varphi_{\lambda,r} + c_\infty(x)\right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} \geq \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}.$$

При этом согласно (49) в обоих неравенствах этой цепочки выполнено равенство. Из равенства

$$\left\|\varphi_{\lambda,r} + c_\infty(x)\right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}$$

следует, что $c_\infty(x) = 0$. Равенство

$$\|x\|_{L_p(\mathbf{T})} = \|\psi_r\|_{L_p(\mathbf{T})}$$

ввиду непрерывности функций x и ψ_r возможно лишь в том случае, когда неравенства (51) – (53) во всех точках соответствующих интервалов (a, a_1), (m, b) и $(b_1, m+2\pi)$ превращаются в равенства и, кроме того, $x(s+t) = 0$ на $[a, b] \cup [a_1, b_1]$, т. е. когда

$$x(s+t) = \psi_r(t) \quad \text{для} \quad t \in [m, m+2\pi].$$

Поскольку $x \in W_\infty^r(\mathbf{T})$, то и $\psi_r \in W_\infty^r(\mathbf{T})$. Ясно, что это включение возможно только при $b = a$ и $a_1 = b_1$. Но тогда

$$x(s+t) = \psi_r(t) = \varphi_{\lambda,r}(t) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbf{R},$$

причем $\lambda = 1$.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p \in [1, \infty)$. *Тогда во множестве* $L_\infty^r(\mathbf{T})$ *знак равенства в неравенстве*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{54}$$

где

$$\alpha = \frac{r-k}{r+1/p},$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(t+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть функция $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$ реализует знак равенства в (54). Ввиду однородности (54) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{55}$$

Тогда $x \in W_\infty^r(\mathbf{T})$. Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$\|x\|_p = \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}. \tag{56}$$

Легко видеть, что

$$\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \lambda^{-r-1/p}\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_p[0,2\pi/\lambda]}. \tag{57}$$

С помощью (56), (57) и предположения, что для функции x в (54) выполнено равенство, получаем

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty = \left\| \varphi_{\lambda,\, r-k} \right\|_\infty. \tag{58}$$

Применяя неравенство Колмогорова, записанное в виде

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} E_0(x)_\infty^{1-k/r} \| \varphi^{(r)} \|_\infty^{k/r},$$

и учитывая (55), приходим к неравенству $E_0(x)_\infty \ge \| \varphi_{\lambda,\, r} \|_\infty$. С другой стороны, применяя неравенство (4), из (56) выводим $E_0(x)_\infty \le \| \varphi_{\lambda,\, r} \|_\infty$. Таким образом, $E_0(x)_\infty = \| \varphi_{\lambda,\, r} \|_\infty$. Из последнего равенства и соотношения (56) в силу леммы 3 следует утверждение теоремы.

Из леммы 3 легко следует также следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty)$. *Тогда во множестве* $L_\infty^r(\mathbf{T})$ *знак равенства в неравенстве*

$$E_0(x)_\infty \le \frac{\| \varphi_r \|_\infty}{\| \varphi_r \|_p^{\alpha_1}} \| x \|_p^{\alpha_1} \| x^{(r)} \|_\infty^{1-\alpha_1},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{r}{r + 1/p},$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(t+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

В работе [11] для функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$ получено следующее усиление неравенства Колмогорова:

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} \| x \|_\infty^{1-k/r} \| x^{(r)} \|_\infty^{k/r}, \tag{59}$$

где

$$\| x \|_\infty := \sup_{a,\, b \in \mathbf{R}} \left\{ E_0(x)_{L_\infty[a,\, b]} \colon x'(t) \ne 0 \quad \forall t \in (a, b) \right\}.$$

Используя (59) вместо неравенства Колмогорова и повторяя рассуждения, применявшиеся при доказательстве лемм 1 и 2, можно установить справедливость следующих утверждений.

Лемма 4. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r \ge 3$. *Если для функции* $x \in W_\infty^r(\mathbf{R})$ *выполнены равенства*

$$\| x \|_\infty = \left\| \varphi_{\lambda,\, r} \right\|_\infty \quad \text{и} \quad \| x'' \|_\infty = \left\| \varphi_{\lambda,\, r-2} \right\|_\infty$$

с некоторым $\lambda > 0$, *причем норма* $\| x'' \|_\infty$ *достигается в некоторой точке* $t_2 \in \mathbf{R}$, *то существуют* $s, c \in \mathbf{R}$ *такие, что* $x(t+s) = \varphi_{\lambda,\, r}(t) + c$ *для всех* $t \in \mathbf{R}$.

Лемма 5. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r \ge 2$. *Если для функции* $x \in W_\infty^r(\mathbf{R})$ *выполнены равенства*

$$\| x \|_\infty = \left\| \varphi_{\lambda,\, r} \right\|_\infty \quad \text{и} \quad \| x' \|_\infty = \left\| \varphi_{\lambda,\, r-1} \right\|_\infty$$

с некоторым $\lambda > 0$, *причем норма* $\| x' \|_\infty$ *достигается в некоторой точке* $t_1 \in \mathbf{R}$, *то существуют* $s, c \in \mathbf{R}$ *такие, что* $x(t+s) = \varphi_{\lambda,\, r}(t) + c$ *для* $t \in (a, a + \pi/\lambda)$, *где* a — *некоторый нуль функции* $\varphi_{\lambda,\, r-1}$.

При этом в случае $r \geq 3$ *равенство* $x(s+t) = \varphi_{\lambda, r}(t) + c$ *выполнено для всех* $t \in \mathbf{R}$.

Повторяя рассуждения, применявшиеся при доказательстве теоремы 1, но используя леммы 4 и 5 вместо лемм 1 и 2 соответственно и применяя (59) вместо неравенства Колмогорова, можно доказать следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $r \geq 3$, $k < r$. *Тогда во множестве функций* $K^r_\infty(\mathbf{R})$ *знак равенства в неравенстве*

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r}$$

реализуют только функции вида $x(t) = a\varphi_r(\lambda t + b) + c$, *где* $a, b, c \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$.

Замечание 2. Пример, приведенный в замечании 1, показывает, что теорема 7 не верна при $r = 2$.

1. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
2. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43 – 49.
3. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivees // C. r. Soc. Math. France. – 1914. – **41**. – P. 68 – 72.
4. *Шилов Г. Е.* О неравенствах между производными // Сборник работ студенческих научных кружков МГУ. – 1937. – С. 17 – 27.
5. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bouns of functionals // Anal. math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
6. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // E. J. Approxim. – 1977. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
7. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. II, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
8. *Bohr H.* Un theorem generale sur l'integration d'un polynome trigonometrique // C. R. – 1935. – **200**. – P. 1276 – 1277.
9. *Favard J.* Application de la formule sommatoire d'Euler a la demonstration de quelques proprietes extremales des integrales des fonctions periodiques // Math. Tidskrift. – 1936. – **4**. – P. 81 – 84.
10. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем классов периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 61 – 70.
11. *Кофанов В. А.* Усиление теоремы сравнения и неравенства Колмогорова и их приложения // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 10. – С. 1348 – 1355.

Получено 20.05.2003