

В. Я. Гутлянский, д-р физ.-мат. наук,
В. И. Рязанов, канд. физ.-мат. наук
 (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О решениях с особенностями одного уравнения математической физики

Получена теорема представления решений с особенностями логарифмического типа одного уравнения математической физики через квазиконформные отображения.

Одержана теорема зображення розв'язків з особливостями логарифмічного типу одного рівняння математичної фізики через квазіконформні відображення.

Развитие вариационного исчисления в теории квазиконформных отображений преследует, по крайней мере, две цели. Одна из них — это нахождение экстремума конкретного функционала в заданном семействе отображений и определение экстремальных функций. Другая — доказательство теорем существования решений некоторых уравнений в частных производных и систем с заданными свойствами и их представление через квазиконформные гомеоморфизмы за счет выбора подходящего функционала в надлежащем компактном классе отображений. Первое направление достаточно развито (см., например, [1—4] и цитируемую там литературу). Что касается второго направления, то здесь следует отметить две оригинальные работы Шиффера и Шобера [5, 6] и некоторые результаты авторов [7, 8].

Подход, изложенный в работах [5, 6], сопряжен с жесткостью в выборе ассоциированного функционала и дополнительными ограничениями на поведение коэффициентов уравнений в окрестности особых точек. Цель данной работы состоит в развитии нового вариационного подхода к исследованию проблем существования и представления, свободного, в определенной мере, от упомянутых выше ограничений. Не умаляя общности рассуждений, ограничимся исследованием известного уравнения математической физики

$$\operatorname{div}(Q \operatorname{grad} U) = 0 \quad (1)$$

с коэффициентом $Q(z): \bar{\mathbb{C}} \rightarrow [1, \infty)$ класса L^∞ .

1. Переходя к комплексной записи уравнения (1), под решением с особенностями в точках $z_0 \in \mathbb{C}$ и ∞ будем понимать функцию $U \in W_{2, \text{loc}}^1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$, обладающую сопряженной функцией $V \in W_{2, \text{loc}}^1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ такой, что пара (U, V) удовлетворяет почти всюду (п. в.) обобщенной системе Коши — Римана

$$\begin{aligned} V_x &= Q(z) U_y, \\ V_y &= -Q(z) U_x, \end{aligned} \quad (2)$$

где $z = x + iy$. В терминах комплекснозначной функции $F(z) = U + iV$ система (2) имеет вид

$$F_{\bar{z}} = -k(z) \overline{F_z}, \quad (3)$$

где $k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$.

Гомеоморфизм f области $D \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ класса $W_{2, \text{loc}}^1(D)$ называется $Q(z)$ -квазиконформным ($Q(z)$ -к. к.), если он удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\bar{f}_{\bar{z}} = \mu(z) f_z \quad \text{п. в.} \quad (4)$$

с некоторой комплексной дилатацией $\mu \in L^\infty(D)$, модуль которой $|\mu(z)| \leq k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$ [4, с. 136; 9, с. 194].

Теорема 1. Пусть $Q(z): \bar{\mathbb{C}} \rightarrow [1, \infty)$ — функция класса L^∞ . Тогда существует $Q(z)$ -к. к. гомеоморфизм $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$

такой, что функция

$$U(z) + iV(z) = \ln [f(z) - f(z_0)] \quad (5)$$

является решением системы (2) с особенностями логарифмического типа в точках z_0 и ∞ .

Теорема 2. Если, дополнительно, $Q(z)$ удовлетворяет в точке z_0 условию Тейхмюллера

$$\iint_{|z-z_0| \leq \delta} \frac{|Q(z) - Q(z_0)|}{|z - z_0|^2} dx dy < \infty, \quad (6)$$

а $Q(1/z)$ — аналогичному условию в нуле, то существуют конечные пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ U(z, z_0) - \frac{1}{Q(z_0)} \ln |z - z_0| \right\}, \quad (7)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ U(z, z_0) - \frac{1}{Q(\infty)} \ln |z| \right\}. \quad (8)$$

2. Условимся говорить, что измеримая функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию Дини в точке z_0 , если ее существенный модуль непрерывности

$$\omega(r) = \omega(r, z_0, \varphi) = \text{ess sup}_{|z-z_0| \leq r} |\varphi(z) - \varphi(z_0)|$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^\delta \frac{\omega(r)}{r} dr < \infty \quad (9)$$

для некоторого $\delta > 0$ [5, 6].

Отметим, что теорема 1 о существовании и представлении решения системы (2) с логарифмическими особенностями носит законченный характер, в то время как аналогичный результат в [5] доказан при предположении, что коэффициент $Q(z)$ существенно непрерывен в точке z_0 , т. е. $\omega(z) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Более того, в [5] предполагалось, что $Q(z)$ удовлетворяет условию Дини. Мы получаем этот результат на основе вариационной процедуры в специальном классе $Q(z)$ -к. к. отображений расширенной комплексной плоскости (см. п. 5). Далее, заключения теоремы 2 установлены в [5] также при выполнении условия Дини.

Предложение 1. Из условий Дини следует условие Тейхмюллера.

Доказательство этого предложения будет проведено в п. 4.

Следующий простой пример показывает, что из условия Тейхмюллера не следует, вообще говоря, ни условие Дини, ни существенная непрерывность $Q(z)$ в точке z_0 .

Пример 1. Пусть $Q(0) = 1$ и $Q(z) = 1 + \alpha(|z|)$ при $z \neq 0$, где $\alpha(r) = 1$ при $r \in [1/n, 1/n + 1/n^3]$, $n = 1, 2, \dots$ и $\alpha(r) = 0$ для остальных $r > 0$. Для такого $Q(z)$ модуль непрерывности $\omega(r) \equiv 1$ и, следовательно, не выполняется ни условие Дини, ни существенная непрерывность $Q(z)$ в точке z_0 . В то же время условие Тейхмюллера выполнено, так как

$$\iint_{|z| \leq \delta} \frac{|Q(z) - Q(0)|}{|z|^2} dx dy = 2\pi \int_0^\delta \frac{\alpha(r)}{r} dr \leq 2\pi \sum_{n=N-1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

где N — целая часть числа $1/\delta$.

3. Сделаем также несколько замечаний по поводу аппроксимативной непрерывности, вытекающей из условия Тейхмюллера. Заметим прежде всего, что условие Тейхмюллера (6) равносильно условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{|z-z_0| \leq r} \frac{|Q(z) - Q(z_0)|}{|z - z_0|^2} dx dy = 0. \quad (10)$$

Отсюда получаем более слабое, чем (6), условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \iint_{|z-z_0| \leq r} |Q(z) - Q(z_0)| dx dy = 0. \quad (11)$$

При выполнении условия (11) говорят, что z_0 является точкой Лебега для $Q(z)$. Как известно, при $Q(z) \in L^\infty$ это равносильно тому, что z_0 является точкой аппроксимативной непрерывности функции $Q(z)$.

Напомним, что точка z_0 называется точкой аппроксимативной непрерывности функции $Q(z)$, если существует такое измеримое множество E , на котором $Q(z) \rightarrow Q(z_0)$ при $z \rightarrow z_0$, и z_0 является точкой плотности для E , т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{mes } E \cap K(z_0, \varepsilon) / \text{mes } K(z_0, \varepsilon) = 1,$$

где $K(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ [10, с. 199].

Покажем, что при непрерывности $Q(z)$ в точке z_0 конечный предел в (7) может не существовать. Приводимый ниже пример также показывает, что из непрерывности $Q(z)$ не следует условие Тейхмюллера.

Пример 2. Рассмотрим функцию $Q(z) = 1 - \ln^{-1} |z|$ при $0 < |z| < 2/e$, доопределенную в нуле и вне круга $|z| < 2/e$ единицей. Как легко видеть, $Q(z)$ непрерывна в нуле, а условие Тейхмюллера (6) не выполнено.

Функция $F = U + iV : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ вида $F(0) = \infty$, $F(z) = \ln z + \ln(1 - \ln|z|)$ при $0 < |z| < 2/e$ и $F(z) = \ln z + \ln(2 - \ln 2)$ при $|z| \geq 2/e$ является решением уравнения (3) с указанным $Q(z)$ и с особенностями в точках $z_0 = 0$ и ∞ . Это решение представимо в виде $F = \ln f$, где $f - Q(z)$ -к. к. гомеоморфизм $\bar{\mathbb{C}}$ вида $f(0) = 0$, $f(z) = z(1 - \ln|z|)$ при $0 < |z| \leq 2/e$ и $f(z) = z(2 - \ln 2)$ при $|z| \geq 2/e$. При этом $U = \ln|f| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$.

Таким образом, в выделенной шкале, условие Тейхмюллера является точным для существования конечного предела в (7). Как показано в статье В. И. Рязанова, публикуемой в этом же номере, при условии аппроксимативной непрерывности существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{U(z, z_0)}{\ln|z - z_0|} = \frac{1}{Q(z_0)}. \quad (12)$$

4. Доказательство предложения 1. Прежде всего заметим, что из счетной аддитивности меры и монотонности существенного модуля непрерывности $\omega(r)$ следует его непрерывность слева.

Покажем, что $\alpha(z) = |Q(z) - Q(z_0)| \leq \omega(|z - z_0|)$ для почти всех z из круга $K : |z - z_0| \leq \delta$. Действительно, допустим, что множество E из этого круга тех точек z , где $\alpha(z) > \omega(|z - z_0|)$, имеет положительную меру. Тогда в силу счетной аддитивности меры найдется множество $E_n \subseteq E$ положительной меры, где $\alpha(z) \geq \omega(|z - z_0|) + 1/n$ для некоторого $n = 1, 2, \dots$. Пусть χ (функция) — характеристическая функция этого множества. Тогда для измеримой функции $\beta(z) = \alpha(z)\chi(z)$ найдется хотя бы одна точка аппроксимативной непрерывности ζ из E_n [10, с. 199].

Таким образом, существует измеримое множество $\mathcal{E} \subseteq K$, на котором $\beta(z) \rightarrow \beta(\zeta)$ при $z \rightarrow \zeta$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{mes } \mathcal{E} \cap K(\zeta; \varepsilon) / \text{mes } K(\zeta; \varepsilon) = 1, \quad (13)$$

где $K(\zeta; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| \leq \varepsilon\}$. Поскольку $\beta(z) \geq 1/n$ при $z \in E_n$ и $\beta(z) = 0$ при $z \notin E_n$, то для достаточно малых $\varepsilon : \mathcal{E} \cap K(\zeta; \varepsilon) \subseteq E_n$, т. е. без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{E} \subseteq E_n$.

Пусть K_0 — круг $|z - z_0| \leq r_0$, где $r_0 = |\zeta - z_0|$. В силу (13) для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{E}_0 = K_0 \cap \mathcal{E} \cap K(\zeta; \varepsilon)$ имеет положительную меру. Следовательно, найдется последовательность $z_m \rightarrow \zeta$ точек из $\mathcal{E}_0 \subseteq E_n$, для которой $\omega(r_0) \geq \alpha(z_m) \geq \omega(r_m) + 1/n$, где $r_m = |z_m - \zeta| \rightarrow r_0$ и $r_m \leq r_0$. В силу непрерывности $\omega(r)$ слева получаем $\omega(r_0) \geq \omega(r_0) + 1/n$.

Полученное противоречие и доказывает, что $|Q(z) - Q(z_0)| \leq \omega(|z - z_0|)$ для почти всех $z \in K$ и потому из неравенства Дини (9) следует неравенство Тейхмюллера (6).

5. На примере системы (2) опишем вариационную процедуру, приводящую к теоремам существования решений и их представления через квазиконформные гомеоморфизмы.

Пусть $\mathfrak{F}_{r,R}$ — класс $Q(z)$ -к. к. автоморфизмов расширенной комплексной плоскости, конформных в областях $|z - z_0| < r$ и $|z| > R$, $r + |z_0| < R$, с гидродинамической нормировкой на бесконечности*. Обозначим через $\mathfrak{M}_{r,R}$ множество комплексных дилатаций $\mu \in \mathbb{C}$, равных нулю при $|z - z_0| < r$ и $|z| > R$, таких, что $|\mu(z)| \leq (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$ для остальных z . Очевидно, $\mathfrak{M}_{r,R}$ — выпуклое множество, а класс $\mathfrak{F}_{r,R}$ совпадает с множеством нормированных решений уравнения Бельтрами $\bar{f}_z = \mu(z)f_z$, когда $\mu \in \mathfrak{M}_{r,R}$. Таким образом, для любого $\nu \in \mathfrak{M}_{r,R}$ семейство функций $\mu_\varepsilon = \mu + \varepsilon(\nu - \mu) \in \mathfrak{M}_{r,R}$, соответственно, $f_\varepsilon \in \mathfrak{F}_{r,R}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, и в силу теоремы о дифференцировании квазиконформных отображений по параметру [11] имеем следующую вариационную формулу (ср. [3] и [8]).

Предложение 2. Если $f \in \mathfrak{F}_{r,R}$ и $\mu \in \mathfrak{M}_{r,R}$ — ее комплексная дилатация, то для любого $\nu \in \mathfrak{M}_{r,R}$ существует вариация f в классе $\mathfrak{F}_{r,R}$ вида

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\{\mu(\zeta) - \nu(\zeta)\}}{f(\zeta) - f(z)} f_\zeta^2 d m_\zeta + o(\varepsilon), \quad (14)$$

где $o(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ локально равномерно в \mathbb{C} .

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим на классе $\mathfrak{F}_{r,R}$ экстремальную задачу $\max |f'(z_0)|$. Функционал $|f'(z_0)|$ является непрерывным на классе $\mathfrak{F}_{r,R}$ в топологии локально равномерной сходимости, а сам класс $\mathfrak{F}_{r,R}$ — компактным в этой топологии (см., например, [12]). Отсюда следует существование экстремальной функции в указанном классе. Из условия максимума и вариационной формулы (14) следует необходимое условие экстремума

$$f_{\bar{z}} = -k(z) \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \bar{f}_z, \quad (15)$$

$k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$, в кольцевой области и $f_{\bar{z}} = 0$ для $|z - z_0| < r$ и $|z| > R$.

Отметим, что отображение $(f(z) - f(0))/(f(1) - f(0))$ также удовлетворяет уравнению (15). Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$. Обозначим через $\mathfrak{F}(Q(z))$ класс всех $Q(z)$ -к. к. отображений плоскости \mathbb{C} на себя с указанными нормировками. Этот класс секвенциально компактен [9, 12]. В силу этого можно выделить последовательности $r_n \rightarrow 0$ и $R_n \rightarrow \infty$, для которых соответствующие отображения $f_n \rightarrow f \in \mathfrak{F}(Q(z))$ локально равномерны. По теореме Боярского [13, с. 484] предельное $Q(z)$ -к. к. отображение f удовлетворяет уравнению (15) во всей комплексной плоскости. Таким образом, функция $F(z) = \ln(f(z) - f(z_0))$ является решением уравнения (3) с особенностями в точках z_0 и ∞ , т. е. теорема 1 полностью доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Для этого рассмотрим отображение $\Phi = \varphi \circ g$, где $g(z) = f(z_0 + z) - f(z_0)$, $\varphi(w) = w|w|^{Q-1}$, где $Q = Q(z_0)$. Заметим, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(\infty) = \infty$ и удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\varphi_{\bar{w}} = k \frac{w}{\varphi(w)} \varphi_w \quad (16)$$

с $k = (Q - 1)/(Q + 1)$. Отображение h , обратное g , удовлетворяет уравнению

$$h_{\bar{w}} = k(z_0 + h(w)) \frac{w}{\varphi(w)} h_w \quad (17)$$

* Разложение функции f в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ имеет вид $f = z + \frac{a_1}{z} + \dots$

с $k(z) = (Q(z) - 1)/(Q(z) + 1)$ и $h(0) = 0$, $h(\infty) = \infty$. Таким образом, $\Phi = \varphi \circ h^{-1}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = \infty$, имеет комплексную дилатацию

$$M(z) = \frac{k(z_0) - k(z_0 + z)}{1 - k(z_0)k(z_0 + z)} \frac{\bar{g}_z}{g_z} \frac{g(z)}{\bar{g}(z)}, \quad (13)$$

Поскольку $Q \ln |g| = \ln |\Phi|$, то по теореме Тейхмюллера — Виттиха — Белинского [14, 15, 1, 9] предел в (7) конечен. Аналогично доказывается, что конечен предел (8).

1. Белинский П. П. Общие свойства квазиконформных отображений. — Новосибирск: Наука, 1974. — 98 с.
2. Крушак С. Л., Кюнау Р. Квазиконформные отображения — новые методы и приложения. — Новосибирск: Наука, 1984. — 216 с.
3. Гутлянский В. Я. О методе вариаций для однолистных функций с квазиконформным продолжением // Докл. АН СССР. — 1977. — 236, № 5. — С. 1045—1048.
4. Schober J. Univalent Functions-Selected Topics. — Berlin etc.; Springer, 1975. — 199 p.
5. Schiffer M., Schober J. Representation of fundamental solutions for generalised Cauchy-Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. — 1976. — 2. — P. 501—531.
6. Schiffer M., Schober J. A variational method for general families of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. — 1978. — 34. — P. 240—264.
7. Гутлянский В. Я., Рязанов В. И. О фундаментальном решении одного уравнения математической физики // Комплексные методы в математической физике. — Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1984. — С. 134—138.
8. Гутлянский В. Я., Рязанов В. И. О квазиконформных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику М. А. Лаврентьева // Сиб. мат. журн. — 1990. — 31, № 2. — С. 21—36.
9. Lehto O., Virtanen K. Quasikonforme Abbildungen. — Berlin etc.: Springer, 1965. — 269 p.
10. Сакс С. Теория интеграла. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949. — 494 с.
11. Ahlfors L., Bers L. Riemann's mappings theorem for variable metrics // Ann. Math. — 1960. — 72, N 2. — P. 385—404.
12. Strebel K. Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen // Comment. math. helv. — 1969. — 44, N 7. — S. 469—475.
13. Боярский Б. В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. — 1957. — 43 (85), № 4. — С. 451—503.
14. Teichmüller O. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Deutsche Math. — 1938. — 3. — S. 621—678.
15. Wittich H. Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen // Math. Zeitschr. — 1948. — 51. — S. 275—288.

Получено 09.10.91

УДК 517.53

А. А. Довгошей, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О семействах функций с равностепенно абсолютно непрерывными интегралами

Исследуется задача о приближении функций из классов Харди ограниченными аналитическими функциями. Доказана теорема, характеризующая множества функций с равностепенно абсолютно непрерывными интегралами как предельные точки семейства ограниченных подмножеств пространства H^∞ .

Досліджується задача про наближення функцій із класів Харді обмеженими аналітичними функціями. Доведена теорема, що характеризує множини функцій з одностайно абсолютно неперервними інтегралами як граничні точки сім'ї обмежених підмножин простору H^∞ .

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\text{exr}_m X$ — семейство замкнутых ограниченных подмножеств пространства X , $F_i \in \text{exr}_m X$, $i = 1, 2$.