

О некоторых классах расширений эрмитова оператора с лакунами

В терминах абстрактных граничных условий описываются некоторые классы расширений эрмитова оператора с лакунами. Найдена связь между асимптотическим поведением собственных значений расширения у края лакуны и асимптотикой отрицательного спектра соответствующего граничного оператора.

У термінах абстрактних граничних умов описуються деякі класи розширень ермітового оператора з лакунами. Знайдено зв'язок між асимптотичною поведінкою власних значень розширення біля країв лакуни та асимптотикою від'ємного спектра відповідного граничного оператора.

В в е д е н и е. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — замкнутый эрмитов оператор с плотной в H областью определения $D(A)$ и равными дефектными числами $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$. В настоящей работе, примаюкающей по содержанию к работам [1—7], приводится подробное изложение части результатов, анонсированных ранее в [8].

Так, в п. 1 данной статьи доказывается теорема о квадратичных формах, обобщающая известный результат Бирмана — Крейна [1—3]. В остальной части статьи в терминах абстрактных граничных условий описываются некоторые новые классы собственных (не обязательно самосопряженных)

расширений \bar{A}_B оператора A с лакунами. Например, в теореме 3 найдена связь между асимптотиками отрицательных собственных значений полуограниченного расширения $\bar{A}_B = \bar{A}_B^*$ оператора $A \geq 0$ и соответствующего граничного оператора B . В случае оператора A с конечной лакуной (α, β) получен аналогичный результат об асимптотическом поведении собственных чисел, содержащихся внутри лакуны.

Отметим также, что применяемый метод, базирующийся на формуле для резольвент и систематическом использовании функции Вейля, пригоден для изучения расширений как положительного оператора, так и оператора с конечной лакуной.

Будем придерживаться следующих обозначений: H, \mathcal{H} — гильбертовы пространства; $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ — множество ограниченных линейных операторов из \mathcal{H}_1 в \mathcal{H}_2 ; если $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, то $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] = [\mathcal{H}]$; $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ — совокупность замкнутых линейных операторов в \mathcal{H} с плотной областью определения; $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ — совокупность замкнутых линейных отношений в \mathcal{H} , причём $\mathcal{C}(\mathcal{H}) \subset \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ при отождествлении оператора с его графиком; $D(T)$ и $\mathfrak{R}(T)$ — области определения и значений оператора T соответственно; $\sigma(T)$, $\rho(T)$ и $\rho(T)$ — его спектр, резольвентное множество и поле регулярности соответственно; $T|_L$ — сужение T на множество L ; A — эрмитов оператор в H , $\mathfrak{M}_z = (A - z)D(A)$, $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{M}_z^\perp = \ker(A^* - z)$; если $A \geq 0$, то \bar{A}_r и \bar{A}_k — его наибольшее (фридрихсово) и наименьшее (крейновское) расширения во множестве всех неотрицательных расширений $\bar{A} = \bar{A}^* \geq 0$; $m(A)$ — нижняя грань полуограниченного снизу оператора A ; $E_{\bar{A}}(\lambda) = E_{\bar{A}}(\lambda - 0)$ — спектральная функция оператора $\bar{A} = \bar{A}^*$.

1. Вспомогательные предложения. Приведем некоторые определения.

Определение 1 [9]. Совокупность $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, в которой \mathcal{H} — гильбертово пространство ($\dim \mathcal{H} = n_{\pm}(A)$), а $\Gamma_1, \Gamma_2 \in [D(A^*), \mathcal{H}]$, называют пространством граничных значений (ПГЗ) оператора A^* , если:

1) $(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} \quad \forall f, g \in D(A^*)$;

2) отображение $\Gamma: f \rightarrow \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\}$ из $D(A^*)$ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно.

Отображение Γ устанавливает биективное соответствие между собственными расширениями \bar{A} ($A \subset \bar{A} = \bar{A}^{**} \subset A^*$) оператора A и замк-

путыми линейными отношениями θ в \mathcal{H} :

$$f \in D(\tilde{A}) = D(\tilde{A}_0) \Leftrightarrow \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \theta \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}. \quad (1)$$

В фиксированном ПГЗ особую роль играют два расширения $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i^*$, для которых $D(\tilde{A}_i) = \ker \Gamma_i$ ($i = 1, 2$) и которым согласно (1) соответствуют отношения $\theta_1 = \{(\psi, 0) : \psi \in \mathcal{H}\}$ и $\theta_2 = \{(0, \psi) : \psi \in \mathcal{H}\}$.

Расширения \tilde{A}' и \tilde{A}'' называют дизъюнктивными, если $D(\tilde{A}') \cap D(\tilde{A}'') = D(A)$, и трансверсальными, если, к тому же, $D(\tilde{A}') + D(\tilde{A}'') = D(A^*)$.

О п р е д е л е н и е 2 [4—7]. Функцией Вейля оператора A , соответствующей ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$, называют оператор-функцию $M(z)$, определенную $\forall z \in \rho(\tilde{A}_2)$ равенством

$$M(z) \Gamma_2 f_z = \Gamma_1 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{R}_z = \ker(A^* - z). \quad (2)$$

В работах [4—7] найдена связь формулы М. Г. Крейна для резольвент с ПГЗ и показано, что равенство

$$(\tilde{A}_0 - z)^{-1} = (\tilde{A}_2 - z)^{-1} + \gamma(z) (\theta - M(z))^{-1} \gamma^*(\bar{z}) \quad (3)$$

устанавливает биективное соответствие между собственными расширениями $\tilde{A} = \tilde{A}_0$ и линейными отношениями $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. Здесь $\gamma(z) = (\Gamma_2 | \mathfrak{R}_z)^{-1}$ и является γ -полем оператора \tilde{A}_2 , т. е.

$$\gamma(z) = (\tilde{A}_2 - z_0) (\tilde{A}_2 - z)^{-1} \gamma(z_0), \quad \gamma(z_0) \in \{\mathcal{H}, \mathfrak{R}_{z_0}\}, \quad \gamma^{-1}(z_0) \in \{\mathfrak{R}_{z_0}, \mathcal{H}\}. \quad (4)$$

Будем писать $T \in S_\beta(\varphi)$, если оператор T m -секториален с вершиной β и полууглом $\varphi \in [0, \pi/2]$, т. е. $\operatorname{Re}(Tf, f) \pm \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{Im}(Tf, f) \geq \beta \|f\|^2$ $\forall f \in D(T)$ и $\rho(T) \neq \emptyset$. Обозначим через $\operatorname{Re} T = (\operatorname{Re} T)^*$ оператор ($\in S_\beta(0)$), ассоциированный [10] с замыканием $\mathfrak{k}_{\operatorname{Re}}$ формы $\operatorname{Re}(Tf, f)$, если она замыкаема, а через $D[T]$ — замыкание $D(T)$ по T -норме ($\|f\|_T^2 = \operatorname{Re}(Tf, f) + (1 + \beta) \|f\|^2$). Замыкание $\mathfrak{k}_T[f]$ формы (Tf, f) обозначают также $T|f| = T[f, f]$. Если $T = T^* \geq \beta \geq 0$, то $D[T] = D(T^{1/2})$ и $\mathfrak{k}_T[f] = T[f, f] = \|T^{1/2}f\|^2$.

Линейное отношение θ относят классу $\tilde{S}_\beta(\varphi)$, если его операторная часть $T \in S_\beta(\varphi)$. При этом $D(\theta) = D(T)$, $D|\theta| = D|T|$ и $\theta|f| = \theta[f, f] = T|f|$.

Отметим, что при $\varphi < \pi/2$ формы (Tf, f) и $\operatorname{Re}(Tf, f)$ всегда замыкаемы [10]. При $\varphi = \pi/2$ это, вообще говоря, не выполняется. Действительно, полагая

$$H = L_2(0, \infty), \quad Ty = iy'', \quad y \in D(T) \Leftrightarrow y \in W_2^2[0, \infty), \quad y'(0) = i\beta y(0), \quad \beta > 0,$$

видим, что $\operatorname{Re}(Ty, y) = \beta |y(0)|^2 \geq 0$ и форма $\operatorname{Re}(Ty, y)$ не замыкаема.

П р е д л о ж е н и е 1 [5—7]. Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ оператора A^* , в котором $A_2 \geq 0$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда:

1) существует сильный резольвентный предел

$$M(0) \doteq S - R - \lim_{x \uparrow 0} M(x) \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}),$$

являющийся полуограниченным снизу самосопряженным отношением, и верна эквивалентность $f \in D(\bar{A}_K) \Leftrightarrow \Gamma f = \langle \Gamma_2 f, \Gamma_1 f \rangle \in M(0)$;

2) операторная часть отношения $M(0)$ ассоциирована с квадратичной формой \mathfrak{k}_0 , т. е. $\mathfrak{k}_{M(0)} = \mathfrak{k}_0$, где

$$\mathfrak{k}_0[f] = \lim_{x \uparrow 0} (M(x)f, f), \quad D(\mathfrak{k}_0) = \{f : \lim_{x \uparrow 0} (M(x)f, f) < \infty\}; \quad (5)$$

3) \tilde{A}_2 и \tilde{A}_K дизъюнктивны $\Leftrightarrow M(0) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$;

4) \tilde{A}_2 и \tilde{A}_K трансверсальны $\Leftrightarrow M(0) \in \mathcal{J}(\mathcal{H})$.

Предложение 2. Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ оператора $A \geq 0$, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$. Тогда верны эквивалентности:

1) $\tilde{A}_0 + \beta \geq 0$ ($\beta > 0$) $\Leftrightarrow \theta - M(-\beta) \geq 0$;

2) $\tilde{A}_0 \geq 0 \Leftrightarrow D(\mathbf{f}_0) = D[\theta] \subset D[M(0)] = D(\mathbf{f}_{M(0)})$, $\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_{M(0)} \geq 0$;

3) $\tilde{A}_0 \in S_{-\beta}(\varphi) \Leftrightarrow \theta - M(-\beta) \in S_0(\varphi)$ ($\forall \beta > 0$);

4) $\tilde{A}_0 \in S_0(\varphi) \Leftrightarrow D[\theta] \subset D[M(0)]$, $\mathbf{f}_{\text{Re}\theta} \pm \text{ctg } \varphi \mathbf{f}_{\text{Im}\theta} \geq \mathbf{f}_{M(0)}$.

Если $D(\theta) \subset D(M(0))$ (в частности, если $M(0) \in \mathcal{J}(\mathcal{H})$), то условия

(2) и (4) эквивалентны включению $\theta - M(0) \in \tilde{S}_0(\varphi)$.

Доказательство. Утверждение 1 — следствие формулы (3) и экстремального свойства фридрихсова (жесткого) расширения \tilde{A}_F [1];

$$\forall \tilde{A} = \tilde{A}^* \supset A, \quad \tilde{A} \geq \beta_0 \Rightarrow (\tilde{A} + \beta)^{-1} \geq (\tilde{A}_F + \beta)^{-1} \quad \forall \beta > \beta_0. \quad (6)$$

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1, предложения 1 и очевидной эквивалентности $D[\theta] \subset D[M(0)]$, $\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_{M(0)} \geq 0 \Leftrightarrow \theta - M(-\varepsilon) \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Утверждения 3 и 4 — следствия утверждений 1 и 2. Если $\tilde{A}_0 \in S_{-\beta}(\varphi)$, $\varepsilon > 0$, то, введя операторы

$$C_+ := \frac{(\tilde{A}_0 + \beta + \varepsilon)^{-1} + (\tilde{A}_0^* + \beta + \varepsilon)^{-1}}{2},$$

$$C_- := \frac{(\tilde{A}_0 + \beta + \varepsilon)^{-1} - (\tilde{A}_0^* + \beta + \varepsilon)^{-1}}{2i}, \quad (7)$$

видим, что $C_+ \pm \text{ctg } \varphi \cdot C_- > 0$ и $\ker(C_+ \pm \text{ctg } \varphi \cdot C_-) = \{0\}$. Кроме того,

$$C_+(A + \beta + \varepsilon)g = g, \quad C_-(A + \beta + \varepsilon)g = 0 \quad \forall g \in D(A). \quad (8)$$

В силу (8) неотрицательные операторы $(C_+ \pm \text{ctg } \varphi \cdot C_-)^{-1}$ являются самосопряженными расширениями оператора $A + \beta + \varepsilon$. Следовательно существуют $\theta_{\pm} = \theta_{\pm}^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ такие, что

$$\tilde{A}_{0\pm} = \tilde{A}_{0\pm}^* := (C_+ \pm \text{ctg } \varphi \cdot C_-)^{-1} - \beta - \varepsilon \supset A. \quad (9)$$

Так как в силу (6) $(\tilde{A}_{0\pm} + \beta + \varepsilon)^{-1} - (\tilde{A}_F + \beta + \varepsilon)^{-1} \geq 0$, то из (7), (9) и (3) заключаем, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\text{Re}(\theta - M(-\beta - \varepsilon))^{-1} \pm \text{ctg } \varphi \cdot \text{Im}(\theta - M(-\beta - \varepsilon))^{-1} \geq 0, \quad (10)$$

т. е. $(\theta - M(-\beta - \varepsilon))^{-1} \in S_0(\varphi)$. Но тогда $\theta - M(-\beta - \varepsilon) \in \tilde{S}_0(\varphi)$ $\forall \varepsilon > 0$ и, следовательно, $\theta - M(-\beta) \in \tilde{S}_0(\varphi)$. Итак, доказана импликация $\tilde{A}_0 \in S_{-\beta}(\varphi) \Rightarrow \theta - M(-\beta) \in \tilde{S}_0(\varphi)$. Обращая ход рассуждений, установим обратную импликацию.

Утверждение 4 доказывается аналогично, причем включение $D[\theta] \subset D[M(0)]$ вытекает из неравенства $(M(-\varepsilon)f, f) \leq C(1 + \text{tg } \varphi) \text{Re}\theta |f|^2$ и утверждения 2 предложения 1 (см. соотношения (6)).

З а м е ч а н и е 1. Утверждения 1 и 2 доказаны в [4, 5]. Утверждения 3 и 4 в менее общей форме получены в [11] (см. также [12]). Близкое по форме описание расширений класса $S_0(\varphi)$ получено также в [13].

2. К в а д р а т и ч н ы е ф о р м ы. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $C \in [H]$, $C = C^* \geq 0$, $H_1 = \overline{CH}$. Тогда равенство

$$B = C^{1/2} K C^{1/2} \quad (K = K^* \in [H_1], \|K\| \leq 1) \quad (11)$$

устанавливает биективное соответствие между операторами $B \in [H]$, для которых $|(Bf, f)| \leq (Cf, f) \forall f \in H$ и эрмитовыми сжатиями $K \in [H_1]$.

Из этого утверждения вытекает простое доказательство известной леммы Крейна — Гельфанда.

Следствие 1 [1]. Пусть $C = C^* \geq 0$, $C \in [H]$, \mathfrak{R} — подпространство в H . Тогда существует максимальный элемент $C_{\mathfrak{R}}$ во множестве операторов, не превышающих C и аннулирующих $\mathfrak{R}^\perp = H \ominus \mathfrak{R}$. Он имеет вид

$$C_{\mathfrak{R}} = C^{1/2} P_{\mathfrak{Q}} C^{1/2}, \quad (12)$$

где $P_{\mathfrak{Q}}$ — ортопроектор на подпространство \mathfrak{Q} — замыкание линейала тех $f \in H$, для которых $C^{1/2} f \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Пусть $H_1 = \overline{CH}$. Так как условиям следствия 1 удовлетворяет нулевой оператор, то $0 \leq C_{\mathfrak{R}} \leq C$ и, следовательно, оператор $C_{\mathfrak{R}}$ (если он существует) имеет вид (11): $C_{\mathfrak{R}} = C^{1/2} K_0 C^{1/2}$ ($K_0 \geq 0$, $K_0 \in [H_1]$). При $K \geq 0$ условие $\ker B \supset \mathfrak{R}^\perp$ эквивалентно $\ker K \supset C^{1/2}(\mathfrak{R}^\perp)$. Так как неравенство $B_1 = C^{1/2} K_1 C^{1/2} \leq C^{1/2} K_2 C^{1/2} = B_2$ эквивалентно неравенству $K_1 \leq K_2$ ($K_i \in [H_1]$), то формула (12) следует из того, что оператор $K_0 := P_{H_1} P_{\mathfrak{Q}} \upharpoonright_{H_1}$ максимален во множестве эрмитовых сжатий, аннулирующих линейал $C^{1/2}(\mathfrak{R}^\perp)$.

Следствие 2 [1, 14]. Образы $\mathfrak{R}(C^{1/2})$ и $\mathfrak{R}(C_{\mathfrak{R}}^{1/2})$ операторов $C^{1/2}$ и $C_{\mathfrak{R}}^{1/2}$ удовлетворяют соотношению

$$\mathfrak{R}(C_{\mathfrak{R}}^{1/2}) = \mathfrak{R}(C^{1/2}) \cap \mathfrak{R}. \quad (13)$$

Доказательство. Согласно (12) $C_{\mathfrak{R}} = T^* T$, где $T = P_{\mathfrak{Q}} C^{1/2}$, а $P_{\mathfrak{Q}}$ — ортопроектор на \mathfrak{Q} . Поэтому $\mathfrak{R}(T^*) = \mathfrak{R}(C^{1/2}) \cap \mathfrak{R}$. Равенство (13) вытекает теперь из известного [10, с. 421] соотношения

$$\mathfrak{R}(T^*) = \mathfrak{R}(|T|) = \mathfrak{R}((T^* T)^{1/2}).$$

Оператор $C_{\mathfrak{R}}$ называют укороченным (на \mathfrak{R}) оператором, а трансформатор $C \rightarrow C_{\mathfrak{R}}$ — трансформатором М. Г. Крейна.

Лемма 2. Пусть $T \in [\mathcal{H}]$, $T \geq 0$, $B \in [\mathcal{H}, \mathcal{H}_1]$, $\exists B^{-1} \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}]$. Тогда $\mathfrak{R}((B T B^*)^{1/2}) = B \mathfrak{R}(T^{1/2})$.

Доказательство элементарно.

Теорема 1. Пусть $A \geq 0$, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$, θ — линейное отношение в \mathcal{H} , $\tilde{A}_0 \in S_B(\varphi)$ ($0 \leq \varphi < \pi/2$) и $a < 0$. Тогда $\theta \in \tilde{S}_B(\varphi)$ при некотором $\beta_1 \leq 0$ (например, при $\beta_1 = -\|M(\beta)\|$) и справедливо разложение

$$D[\tilde{A}_0] = D[A] \dot{+} \gamma(a) D[\theta] = D[A] \dot{+} \gamma(a) D[\operatorname{Re} \theta], \quad (14)$$

причем заменой \tilde{A}_0 -метрики на эквивалентную прямую сумму в (14) можно сделать ортогональной. Далее, $\forall f \in D[\tilde{A}_0]$, $f = g + \gamma(a)\varphi$, где $g \in D[A]$, $\varphi \in D[\theta]$ имеют место равенства

$$\tilde{A}_0[f, f] + a \|f\|^2 = A[g, g] + a \|g\|^2 + \theta[\varphi, \varphi] - (M(a)\varphi, \varphi), \quad (15)$$

$$\operatorname{Re} \tilde{A}_0 = \tilde{A}_{\operatorname{Re} \theta} (\supset A). \quad (16)$$

Кроме того, в случае $\tilde{A}_0 \in S_\beta(\pi/2)$ форма $\text{Re } \tilde{A}_0 [f]$, замыкаема точно тогда, когда замыкаема форма $\text{Re } \theta [f]$, причем в случае замыкаемости одной из них соотношения (14) — (16) сохраняются.

Доказательство. 1. Пусть вначале $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0^* \geq -\varepsilon_0 I$. Докажем соотношение

$$D[\tilde{A}_0] = D[A] \dot{+} D[\tilde{A}_0] \cap \mathfrak{R}_{-\varepsilon}, \quad (17)$$

в котором $\varepsilon > \varepsilon_0 \geq 0$. Согласно экстремальному свойству (6) фридрихсова расширения \tilde{A}_F оператор $(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1} - (\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1}$ — наибольший среди тех, которые не превышают $(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1}$ и аннулируют подпространство $\mathfrak{M}_{-\varepsilon} = (A + \varepsilon)D(A)$. В силу следствия 1 и формулы резольвент (3)

$$\begin{aligned} \gamma(-\varepsilon)(\theta - M(-\varepsilon))^{-1}\gamma^*(-\varepsilon) &= [(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1}]_{\mathfrak{R}_{-\varepsilon}} = \\ &= (\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1/2} P(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где P — ортопроектор на замыкание линейала тех f , для которых $(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1/2} f \in \mathfrak{R}_{-\varepsilon}$. Поэтому $\forall x_n \in H$ из (3) и (18) получаем

$$((\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1} x_n, x_n) = ((\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} x_n, x_n) + \|P(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1/2} x_n\|^2. \quad (19)$$

Полагая

$$f_n \doteq (\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1} x_n, \quad g_n \doteq (\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} x_n, \quad \varphi_n = (\theta - M(-\varepsilon))^{-1} \gamma^*(-\varepsilon) x_n, \quad (20)$$

перепишем равенство (19) в виде

$$\|(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{1/2} (f_n - f_m)\|^2 = \|(\tilde{A}_F + \varepsilon)^{1/2} (g_n - g_m)\|^2 + \|P(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{1/2} (f_n - f_m)\|^2. \quad (21)$$

Пусть $f \in D[\tilde{A}_0]$ и последовательность $f_n = (\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1} x_n \in D(\tilde{A}_0)$ сходится к f по \tilde{A}_0 -метрике. Тогда, как следует из (21), последовательность $g_n = (\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} x_n$ фундаментальна по \tilde{A}_F -метрике, а значит, $\exists g \in D[A] = D[\tilde{A}_F]$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\tilde{A}_F + \varepsilon)^{1/2} (g - g_n)\| = 0.$$

Так как $f_n = g_n + \gamma(-\varepsilon)\varphi_n$, то $f = g + \gamma(-\varepsilon)\varphi$, где $g \in D[\tilde{A}_F] = D[A]$, $\gamma(-\varepsilon)\varphi \in \mathfrak{R}_{-\varepsilon}$. Разложение (17) доказано. Осталось заметить, что сумма в (17) прямая, ибо подпространства $D[A] = D[\tilde{A}_F]$ и $D[\tilde{A}_0] \cap \mathfrak{R}_{-\varepsilon}$ являются $(\tilde{A}_0 + \varepsilon)$ -ортогональными.

Покажем теперь, что

$$D[\tilde{A}_0] \cap \mathfrak{R}_{-\varepsilon} = \gamma(-\varepsilon)D[\theta]. \quad (22)$$

Из (18) и следствия 2 получаем

$$\begin{aligned} D[\tilde{A}_0] \cap \mathfrak{R}_{-\varepsilon} &= D[\tilde{A}_0 + \varepsilon] \cap \mathfrak{R}_{-\varepsilon} = D((\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{1/2}) \cap \mathfrak{R}_{-\varepsilon} = \\ &= \mathfrak{R}((\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1/2}) \cap \mathfrak{R}_{-\varepsilon} = \mathfrak{R}((\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1})_{\mathfrak{R}_{-\varepsilon}}^{1/2} = \\ &= \mathfrak{R}(\gamma(-\varepsilon)(\theta - M(-\varepsilon))^{-1}\gamma^*(-\varepsilon))^{1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

С другой стороны, в силу леммы 2

$$\Re(\gamma(-\varepsilon)(\theta - M(-\varepsilon))^{-1}\gamma^*(-\varepsilon))^{1/2} = \gamma(-\varepsilon)\Re(\theta - M(-\varepsilon))^{-1/2} = \\ = \gamma(-\varepsilon)\{D(\theta - M(-\varepsilon))^{1/2}\} = \gamma(-\varepsilon)D[\theta - M(-\varepsilon)] = \gamma(-\varepsilon)D[\theta]. \quad (24)$$

Сопоставление равенств (23) и (24) ведет к соотношению (22). Равенство (14) следует теперь из (17) и (22).

Далее из (3) и (20) вытекают равенства $f_n = g_n + \gamma(-\varepsilon)\varphi_n$ и

$$((\tilde{A}_0 + \varepsilon)f_n, f_n) = ((\tilde{A}_F + \varepsilon)g_n, g_n) + ((\theta - M(-\varepsilon))\varphi_n, \varphi_n), \quad (25)$$

причем второе из них эквивалентно каждому из равенств (19) и (21). Следовательно, сходимость при $n \rightarrow \infty$ левой части в (25) эквивалентна сходимости каждого из двух слагаемых в правой части, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\tilde{A}_0 + \varepsilon)f_n, f_n) = \tilde{A}_0 |f| + \varepsilon \|f\|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} ((\tilde{A}_F + \varepsilon)g_n, g_n) = \tilde{A}_F |g| + \varepsilon \|g\|^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} ((\theta - M(-\varepsilon))\varphi_n, \varphi_n) = \theta[\varphi] - (M(-\varepsilon)\varphi, \varphi). \end{cases}$$

Поэтому соотношение (15) получается замыканием равенства (25) по \tilde{A}_0 -метрике.

2. Рассмотрим теперь расширение $\tilde{A}_0 \in S_{-\varepsilon_0}(\varphi)$ при $\varepsilon_0 \geq 0$, $\varphi \in (0, \pi/2)$. Пусть $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_{\tilde{A}_0}$ — замыкание формы $(\tilde{A}_0 f, f)$, \mathfrak{f}_{Re} — ее реальная часть (замк-

нутая одновременно с \mathfrak{f}), $S \doteq \text{Re } \tilde{A}_0 = S^*$ — оператор, ассоциированный с формой \mathfrak{f}_{Re} согласно 1-й теореме о представлении [10, с. 404]. Так как $\forall f \in D(A) \text{ Re } (\tilde{A}_0 f, f) = (A f, f)$, то $S \supset A$, а значит, $S = \tilde{A}_{\theta_1}$, где $\theta_1 = \theta_1^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. При $\varepsilon > \varepsilon_0$ по формуле (15) имеем

$$\tilde{A}_0 |f, f| + \varepsilon \|f\|^2 = A |g, g| + \varepsilon \|g\|^2 + \theta_1 [\varphi, \varphi] - (M(-\varepsilon)\varphi, \varphi), \quad (26)$$

где $f = g + \gamma(-\varepsilon)\varphi \in D(\tilde{A}_0)$, $g \in D[A]$, $\varphi \in \mathcal{H}$. С другой стороны, из формулы (3) получаем $\forall f \in D(\tilde{A}_0)$:

$$\text{Re } (\tilde{A}_0 f, f) + \varepsilon \|f\|^2 = (\tilde{A}_F g, g) + \varepsilon \|g\|^2 + \text{Re } ((\theta - M(-\varepsilon))\varphi, \varphi). \quad (27)$$

Сопоставляя (26) и (27), получаем равенство $\theta_1 = \text{Re } \theta$, доказывающее соотношение (16).

Докажем равенства (14), (15). Так как $D[\tilde{A}_0] = D[S]$ (хотя $D(\tilde{A}_0) \neq D(S)$) и $D[\theta] = D[\theta_1]$, то соотношение (14) для оператора $\tilde{A}_0 \in S_{-\varepsilon_0}(\varphi)$ вытекает из аналогичного соотношения для оператора $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_{\theta_1}$, уже доказанного ранее, и равенства (16). Соотношение (15) вытекает из (25)–(27). Теорема доказана.

Следствие 3 [1]. Пусть $A f = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda) f$ — спектральное разложение неотрицательного расширения \tilde{A} оператора $A \geq 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ верна эквивалентность

$$\tilde{A} = \tilde{A}_F \Leftrightarrow \int_0^\infty \lambda d(E(\lambda)\varphi, \varphi) = \infty \quad \forall \varphi \in \mathfrak{N}_{-\varepsilon} \setminus \{0\}. \quad (28)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda d(E(\lambda)\varphi, \varphi) = \infty \Rightarrow \tilde{A} = \tilde{A}_F. \quad (28')$$

Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$. В этом ПГЗ $\tilde{A} = \tilde{A}_\theta$ при некотором $\theta = \theta^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. Расходимость $\forall \varphi \in \mathfrak{R}_{-e} \setminus \{0\}$ интеграла в (28) означает равенство $D[\tilde{A}_\theta] \cap \mathfrak{R}_{-e} = D(A_\theta^{1/2}) \cap \mathfrak{R}_{-e} = \{0\}$, эквивалентное, согласно (22) равенству $D[\theta] = \{0\}$. Таким образом, $\theta = \theta_2 = \{(0, \psi) : \psi \in \mathcal{H}\}$ — «чистое» отношение (см. (1)), т. е. его операторная часть нулевая. Но тогда $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$.

Обратная к (28') импликация элементарна и вытекает из равенства $D[\tilde{A}_F] = D[A]$ и ортогональности подпространств \mathfrak{R}_{-e} и \mathfrak{R}_{-g} .

Следствие 4 [1, с. 454]. Для того чтобы оператор $A \geq 0$ имел только одно неотрицательное расширение $\tilde{A} = \tilde{A}^*$, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $a > 0$

$$\sup_{f \in D(A)} \frac{|(f, \varphi)|^2}{(Af, f)} = \infty \quad \forall \varphi \in \mathfrak{R}_{-a} \setminus \{0\}. \quad (29)$$

Доказательство. Покажем вначале, что соотношение (29) выполнено при замене в нем A на \tilde{A}_F . Действительно, пусть при некотором $\varphi_1 \in \mathfrak{R}_{-a}$

$$C(\varphi_1) \doteq \sup_{f \in D(A)} \frac{|(f, \varphi_1)|^2}{(Af, f)} = \sup_{f \in D(A)} \frac{|(Af, \varphi_1)|^2}{a^2 (Af, f)} = \sup_{f \in D(\tilde{A}_F)} \frac{|(\tilde{A}_F f, \varphi_1)|^2}{a^2 (\tilde{A}_F f, f)} < \infty. \quad (30)$$

Полагая $\tilde{A}_F^{1/2} f = g$, переписываем (30) в виде

$$\sup_{g \in D(\tilde{A}_F^{1/2})} |(\tilde{A}_F^{1/2} g, \varphi_1)| \leq C(\varphi_1) \|g\|. \quad (31)$$

Из (31) в силу теоремы Риса заключаем, что $(0 \neq) \varphi_1 \in D(\tilde{A}_F^{1/2})$, что противоречит равенству $D[\tilde{A}_F] \cap \mathfrak{R}_{-a} = \{0\}$.

Обратно, если $\exists \tilde{A} = \tilde{A}^* \geq 0$, $\tilde{A} = \tilde{A}_F$, то в силу (17) $\exists \varphi_1 \in \mathfrak{R}_{-a} \cap D[\tilde{A}]$. Тогда

$$\begin{aligned} C(\varphi_1) &= \sup_{f \in D(A)} \frac{|(Af, \varphi_1)|^2}{a^2 (Af, f)} = \sup_{f \in D(A)} \frac{|(\tilde{A} f, \varphi_1)|^2}{a^2 (\tilde{A} f, f)} = \\ &= \sup_{f \in D(A)} \frac{|(\tilde{A}^{1/2} f, \tilde{A}^{1/2} \varphi_1)|^2}{a^2 \|\tilde{A}^{1/2} f\|^2} \leq \frac{\|\tilde{A}^{1/2} \varphi_1\|^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Следствие 5. Пусть $A \geq 0$ и спектр оператора \tilde{A}_F дискретен. Тогда: 1) крайновское расширение \tilde{A}_K определяется равенством $D(\tilde{A}_K) = D(\tilde{A}) + \mathfrak{R}_\varphi$, 2) $D[\tilde{A}_K] = D[A] + \mathfrak{R}_g$; 3) спектр расширения \tilde{A}_K , рассматриваемого в $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_\varphi^\perp$, дискретен.

Доказательство. Достаточно считать оператор A простым. В таком случае $\hat{\rho}(A) = \mathbb{C}$, ибо $\sigma(\tilde{A}_F)$ дискретен. Определим расширение \tilde{A}^t

равенством $D(\tilde{A}') = D(A) \dot{+} \mathfrak{R}_0$. Легко видеть, что \tilde{A}' замкнут и симметричен. Покажем, что $\mathfrak{R}(\tilde{A}' - z) = H \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Действительно, если $((\tilde{A}' - z)f, g) = 0$ при некотором $g \in H$, то $g \in \mathfrak{R}_z$ и $g \perp \mathfrak{R}_0$. Последнее, однако, невозможно, если z достаточно мало, ибо в этом случае раствор между подпространствами \mathfrak{R}_z и \mathfrak{R}_0 меньше единицы. Итак, $\mathfrak{R}(\tilde{A}' - z) = H$ и \tilde{A}' самосопряжен.

Поэтому совпадение $\tilde{A}' = \tilde{A}_K$ вытекает либо из очевидного неравенства $(\tilde{A}' + \varepsilon)^{-1} - (\tilde{A} + \varepsilon)^{-1} > 0$, выполненного для каждого расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^* \geq 0$ и $\forall \varepsilon > 0$, либо из формул (14), (15). Равенство $D[\tilde{A}_K] = D[A] \dot{+} \mathfrak{R}_0$ теперь очевидно.

Далее, воспользуемся вытекающим из (3) равенством

$$P_{\mathfrak{M}_0}(\tilde{A}_K + \varepsilon)^{-1} = P_{\mathfrak{M}_0}(\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} + P_{\mathfrak{M}_0} \gamma(-\varepsilon) (M(0) - M(-\varepsilon))^{-1} \gamma^*(-\varepsilon), \quad (32)$$

в котором $P_{\mathfrak{M}_0}$ — ортопроектор на $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{R}_0^\perp$. Полагая

$$S_F \doteq \tilde{A} \upharpoonright_{\mathfrak{M}_0}, \quad \mathfrak{M}_0 = H \ominus \ker \tilde{A}_F \supset \mathfrak{M}_0 \quad (\dim \ker \tilde{A}_F < \infty) \quad (33)$$

и переходя в (32) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, придем с учетом (33) к соотношению

$$(\tilde{A}_K \upharpoonright_{\mathfrak{M}_0})^{-1} = P_{\mathfrak{M}_0} ((S_F^{-1}) \upharpoonright_{\mathfrak{M}_0}), \quad (34)$$

которое доказывает последнее утверждение следствия.

Замечание 2. Пусть A положительно определен, т. е. $m(A) > 0$ ($\Leftrightarrow 0 \in \rho(\tilde{A}_F)$). Если ПГЗ $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ выбрано так, что $\mathcal{H} = \mathfrak{R}_0$, $\tilde{A}_\varepsilon = \tilde{A}_F$, $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_K$ ($\Leftrightarrow D(\tilde{A}_1) = D(A) \dot{+} \mathfrak{R}_0$), то $M(0) = 0$, $\gamma(0) = I_{\mathcal{H}}$, $\theta^{-1} = \tilde{A}_0^{-1} - \tilde{A}_F^{-1}$, а соотношения (14), (15) приобретают вид

$$D[\tilde{A}_0] = D[A] \dot{+} D[0], \quad \tilde{A}_0 [f, f] = A [g, g] + \theta [\varphi, \varphi]. \quad (35)$$

В случае $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0^*$ равенства (35) другим методом получены в [2], а формула (17) и равенство $\tilde{A}_0 [f] = A [g, g] + \tilde{A}_0 [\varphi, \varphi]$ — в [1].

Замечание 3. Если $M(0) \in \{\mathcal{H}\}$, то $\gamma(-\varepsilon) D[M(0)] = \gamma(-\varepsilon) \mathcal{H} = \mathfrak{R}_{-\varepsilon}$. Поэтому так же, как в случае $m(A) > 0$ [1],

$$D[\tilde{A}_K] = D[A] \dot{+} \mathfrak{R}_{-\varepsilon} \supset D[\tilde{A}_0] = D[A] \dot{+} \gamma(-\varepsilon) (\mathcal{H} \cap D[0]) \quad (36)$$

и, в частности, $D[\tilde{A}_K] \supset D(A^*)$. Если же $M(0) \in \mathcal{E}(\mathcal{H}) \setminus \{\mathcal{H}\}$ (т. е. $M(0)$ — либо неограниченный оператор, либо линейное отношение с операторной частью $M_1(0) \neq M(0)$), то для некоторых полуограниченных расширений \tilde{A}_0 включение (36) нарушается. Например, для $\tilde{A}_{-\varepsilon}$ ($D(\tilde{A}_{-\varepsilon}) = D(A) \dot{+} \mathfrak{R}_{(-\varepsilon)}$), $m(\tilde{A}_{-\varepsilon}) = -\varepsilon$, но $D[\tilde{A}_0] \not\subset D[\tilde{A}_K]$ и, следовательно, $D[\tilde{A}_K] \not\subset D(A^*)$.

Таким образом, верна эквивалентность: $D[\tilde{A}_K] \supset D(A^*) \Leftrightarrow$ расширения \tilde{A}_K и \tilde{A}_F трансверсальны.

Это обстоятельство не противоречит экстремальности расширения \tilde{A}_K : для каждого $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0^* \geq 0$ по-прежнему

$$D[\tilde{A}_0] \subset D[\tilde{A}_K] \quad (\Leftrightarrow D[0] \subset D[M(0)]) \quad \text{и} \quad A_K [f, f] \leq \tilde{A}_0 [f, f] \quad \forall f \in D[\tilde{A}_0].$$

Отметим в заключение, что некомпактность (даже при $m(A) = 0$) резольвенты оператора \hat{A}_K — следствие следующего утверждения: два трансверсальных расширения не могут одновременно иметь дискретный спектр.

3. Расширения классов $S_\beta(\varphi; \kappa)$ и $S_\beta(\varphi; \mathfrak{E})$.

Определение 3. Пусть \mathfrak{E} — идеал в $[H]$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, $\beta = \bar{\beta}$, $T \in \mathcal{E}(H)$ и квадратичные формы $\tilde{f}^\pm |f| = \operatorname{Re}(Tf, f) \pm i \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{Im}(Tf, f)$ полуограничены снизу. Будем писать: а) $T \in S_\beta(\varphi; k)$, если $\rho(T) \neq \emptyset$ и формы $\tilde{f}^\pm - \beta$ имеют точно $k \in \mathbb{Z}_+$ отрицательных квадратов; б) $T \in S_\beta(\varphi; \mathfrak{E})$, если $\rho(T) \neq \emptyset$ и $E_{T^\pm}(-\infty, \beta) T^\pm \in \mathfrak{E}$, где T^\pm — операторы, ассоциированные с замыканием \tilde{f}^\pm форм \tilde{f}^\pm (которые при $\varphi = \pi/2$ предполагаются замыкаемыми).

При $\varphi = 0$ полагаем $T = T^* \in S_\beta(0; k)$, если $\dim E_T(-\infty, \beta)H = k$, и $T \in S_\beta(0; \mathfrak{E})$, если $TE_T(-\infty, \beta) \in \mathfrak{E}$.

Отношение $\theta \in \mathcal{E}(H)$ будем относить к классу $\tilde{S}_\beta(\varphi; k) (S_\beta(\varphi; \mathfrak{E}))$, если его операторная часть $T \in S_\beta(\varphi; k) (\in S_\beta(\varphi; \mathfrak{E}))$. Поясним, что $S_\beta(\varphi; 0) = S_\beta(\varphi)$ — класс m -секториальных операторов.

Для доказательства теорем 2 и 3 нам понадобятся две элементарные леммы, в которых через $\kappa_-(\mathfrak{f})$ обозначено число отрицательных квадратов формы \mathfrak{f} , т. е. максимальная размерность отрицательных линейалов $L_-(f \in L_- \Leftrightarrow f \in D(\mathfrak{f}) \setminus \{0\}, \mathfrak{f}|f| < 0)$. Для оператора определим $\kappa_-(T)$ равенством $\kappa_-(T) = \dim E_T(0)H$. Если форма \mathfrak{f} замкнута и оператор T ассоциирован с ней, то в силу принципа мини-макса $\kappa_-(\mathfrak{f}) = \kappa_-(T)$.

Лемма 3. Пусть монотонно убывающая последовательность симметричных полуограниченных сверху форм \mathfrak{f}_n сходится к форме $\mathfrak{f} (\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{f}_n |f| = \mathfrak{f} |f| \quad \forall f \in D(\mathfrak{f}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\mathfrak{f}_n))$. Тогда $\kappa_-(\mathfrak{f}) = \kappa_-(\mathfrak{f}_n)$ при

достаточно больших n . Если формы \mathfrak{f}_n замкнуты и $T_n = T_n^*$ — ассоциированные с ними операторы, то $\kappa_-(\mathfrak{f}) = \kappa_-(T_n)$.

Доказательство. Если $\mathfrak{f}|f| < 0$, то $\exists N: \mathfrak{f}_n|f| < 0 \quad \forall n \geq N$ и, значит, $\kappa_-(\mathfrak{f}_n) \geq \kappa_-(\mathfrak{f})$. Обратное неравенство — следствие импликации: $\mathfrak{f}_n > \mathfrak{f} \Rightarrow \kappa_-(\mathfrak{f}_n) \leq \kappa_-(\mathfrak{f})$.

Лемма 4. Пусть $T = T^* (\in [H])$ — оператор, имеющий блочно-матричное представление

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad T_{21} = T_{12}^*$$

относительно ортогонального разложения $H = H_1 \oplus H_2$ пространства H , $T_{ij} \in [H_j, H_i]$ ($i, j = 1, 2$). Если $T \geq 0$, то: 1) $\mathfrak{f}(T_{11}^{1/2}) \supset \mathfrak{f}(T_{12})$ и оператор $S \doteq T_{11}^{-1/2} T_{12}$ определен корректно и ограничен; 2) если T не является положительным, то $\kappa_-(T) = \kappa_-(T_{22} - S^*S)$.

Доказательство. Утверждение 1 известно. Второе утверждение докажем вначале при дополнительном условии $0 \in \rho(T_{11})$. В этом случае доказательство аналогично доказательству критерия Сильвестра и вытекает из тождества

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -T_{21}T_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -T_{11}^{-1}T_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} - T_{21}T_{11}^{-1}T_{12} \end{pmatrix}.$$

Переходя к общему случаю, рассмотрим оператор $T + \varepsilon I$. Если $\kappa_-(T) < < \infty$, то $\kappa_-(T) = \kappa_-(T + \varepsilon I)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Так как $0 \in \rho(T + \varepsilon I)$, то $\kappa_-(T + \varepsilon I) = \kappa_-(T_{22} + \varepsilon - T_{21}(T_{11} + \varepsilon)^{-1}T_{12})$. Осталось заметить, что $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T_{21}(T_{11} + \varepsilon)^{-1}T_{12} = S^*S$ и

$$\kappa_-(T_{22} - S^*S) = \kappa_-(T_{22} + \varepsilon - T_{21}(T_{11} + \varepsilon)^{-1}T_{12}), \quad (37)$$

причем равенство (37) — следствие монотонного убывания семейства $T_{22} + \varepsilon - T_{21}(T_{11} + \varepsilon)^{-1}T_{12}$ и леммы 3.

Теорема 2. Пусть $A \geq 0$, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля, $\theta \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ и $\theta \in \tilde{S}_\alpha(\varphi)$ при некоторых $\alpha < 0$ и $\varphi \in [0, \pi/2]$. Тогда

1) если $(-\varepsilon_0, 0) \in \rho(\tilde{A}_0)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $D[\theta] \subset D[M(0)]$, то верна эквивалентность

$$\tilde{A}_0 \in S_0(\varphi; k) \Leftrightarrow \kappa_-(\mathfrak{f}^\pm - \mathfrak{f}_{M(0)}) = k; \quad (38)$$

2) если, к тому же, форма $\mathfrak{f}_0 - \mathfrak{f}_{M(0)}$ замыкаема и $T(0)$ — ассоциированный с ней m -секториальный оператор, то существует

$$s - R - \lim_{\varepsilon \uparrow 0} (\theta - M(\varepsilon)) = T(0) \quad (39)$$

и верна эквивалентность

$$\tilde{A}_0 \in S_0(\varphi; k) \Leftrightarrow T(0) \in \tilde{S}_0(\varphi; k), \quad (40)$$

в которой $T(0) = \theta - M(0)$, если $M(0) \in \mathcal{H}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Введем операторы

$$\tilde{A}_{\theta_\pm} = \left(\frac{(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1} + (\tilde{A}_0^* + \varepsilon)^{-1}}{2} \pm \operatorname{ctg} \varphi \frac{(\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1} - (\tilde{A}_0^* + \varepsilon)^{-1}}{2i} \right)^{-1} - \varepsilon I \supset A \quad (41)$$

(ср. формулы (7) — (9)), также, как и при доказательстве предложения 1, сведем доказательство к случаю самосопряженных операторов \tilde{A}_{θ_\pm} . Покажем, что $\forall \theta_1 = \theta_1^* \in \mathcal{E}(H) (\Leftrightarrow \tilde{A}_{\theta_1} = \tilde{A}_{\theta_1}^* \supset A)$

$$\kappa_((\tilde{A}_{\theta_1} + \varepsilon)^{-1}) = \kappa_((\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1}) - (\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1}. \quad (42)$$

Операторы $(\tilde{A}_{\theta_1} + \varepsilon)^{-1}$ и $(\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1}$, являясь самосопряженными расширениями ограниченного неотрицательного оператора $(A + \varepsilon)^{-1} \in \mathcal{M}_{-\varepsilon}(H)$, имеют относительно разложения $H = \mathcal{M}_{-\varepsilon} \oplus \mathcal{N}_{-\varepsilon}$ следующие блочно-матричные представления

$$(\tilde{A}_{\theta_1} + \varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & S^*S \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Здесь в (43) $S = T_{11}^{-1/2}T_{12}$, а выражение для $(\tilde{A}_F + \varepsilon)^{-1}$ следует из критерия Сильвестра и экстремального свойства (6) расширения \tilde{A}_F (ср. [14]). Равенство (42) вытекает теперь из (43) и леммы 4.

Далее, из формул (3) и (41) получаем эквивалентности

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 \in S_0(\varphi; k) &\Leftrightarrow (\tilde{A}_0 + \varepsilon)^{-1} \in S_0(\varphi; k) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \Leftrightarrow \kappa_- [\operatorname{Re}(\theta - M(-\varepsilon))^{-1} \pm \\ &\pm \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{Im}(\theta - M(-\varepsilon))^{-1}] = k \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \Leftrightarrow (\theta - M(-\varepsilon))^{-1} \in S_0(\varphi; k) \\ &\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \Leftrightarrow \theta - M(-\varepsilon) \in S_0(\varphi; k) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \end{aligned} \quad (44)$$

В силу условия $D[\theta] \subset D[M(0)]$ и леммы 4

$$\theta - M(-\varepsilon) \in S_0(\varphi; k) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \Leftrightarrow \kappa_-(\mathfrak{f}_{\operatorname{Re} \theta} \pm \operatorname{ctg} \varphi \cdot \mathfrak{f}_{\operatorname{Im} \theta} - \mathfrak{f}_{M(0)}) = k \quad (45)$$

Искомую эквивалентность (38) получаем теперь из (44) и (45).

Для доказательства второго утверждения положим $\mathfrak{f}_\varepsilon[f] = \theta[f] - (M(-\varepsilon)f, f)$, $\mathfrak{f}[f] = \theta[f] - M(0)[f]$, $\mathfrak{f}'_\varepsilon = \mathfrak{f}_\varepsilon - \mathfrak{f}$ и замтим, что:

$$1) D(\tilde{f}_\varepsilon) = D[\theta - M(-\varepsilon)] = D[\theta] \subset D[M(0)] = D(\tilde{f});$$

$$2) 0 = |\operatorname{Im} \tilde{f}'_\varepsilon[f]| \leq \delta \operatorname{Re} \tilde{f}'_\varepsilon[f] = \delta (M(0)|f| - (M(-\varepsilon)f, f)) \quad \forall \delta > 0, \\ \forall f \in D(\tilde{f}), \text{ т. е. формы } \tilde{f}'_\varepsilon \text{ равномерно секториальны со сколь угодно малым углом};$$

$$3) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{f}'_\varepsilon[f] = \tilde{f}'[f] \quad \forall f \in D(\tilde{f}) = D[M(0)].$$

Поэтому в силу теоремы о сходимости секториальных форм «сверху» [10, с. 563] выполнено (39). Теперь соотношение (40) следует из (38). Теорема доказана.

Следствие 6. Если в условиях теоремы 2 $(-\varepsilon_0, \beta) \in \rho(\tilde{A}_0)$ при некоторых $-\varepsilon_0 < \beta < 0$, то верна эквивалентность

$$\tilde{A}_0 \in S_\beta(\varphi; k) \Leftrightarrow 0 - M(\beta) \in \tilde{S}_0(\varphi; k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \quad (40')$$

Доказательство вытекает из теоремы 2, если заметить, что совокупность $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ образует ПГЗ также и для оператора $A' \doteq A - \beta$, а функции Вейля $M(z)$ и $M'(z)$, соответствующие операторам A и A' , связаны равенством $M'(z) = M(z - \beta)$.

Замечание 4. В самосопряженном случае ($\varphi = 0$) теорема 2 и следствие 6 доказаны в [4—7] более сложным методом. При $M(0) = 0$ эквивалентности (38), (40) принимают вид $\tilde{A}_0 \in S_0(\varphi; k) \Leftrightarrow \theta \in \tilde{S}_0(\varphi; k)$. Так, например, будет, если $m(A) > 0$, а ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ таково, что $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$, $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_K$. В последнем случае при $\varphi = 0$ эквивалентность $\tilde{A}_0 \in S_0(0; k) \Leftrightarrow \theta \in \tilde{S}_0(0; k)$ другим методом установлена в [2] (см. также [15]).

Обозначим через $\nu(r; T)$ ($0 \leq r < \infty$) функцию распределения s -чисел $s_n(T)$ оператора $T \in \mathfrak{S}_\infty$, т. е.

$$\nu(r; T) = \operatorname{card} \left\{ n; \frac{1}{s_n(T)} \leq r \right\}.$$

Теорема 3. Пусть $A \geq 0$, $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — ПГЗ, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля, $\theta = \theta^* \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H})$. Пусть, кроме того,

$$\tilde{A}_0(\beta) \doteq (\tilde{A} - \beta) E_{\tilde{A}_0}(-\infty, \beta), \quad \theta(\beta) \doteq (\theta - M(\beta)) E_{\theta - M(\beta)}(-\infty, 0). \quad (46)$$

Тогда при $\beta < 0$ верны эквивалентности:

$$1) \theta - M(\beta) \in \tilde{S}_0(0; \mathfrak{S}_p) \Leftrightarrow \theta(\beta) \in \mathfrak{S}_p \Leftrightarrow \tilde{A}_0 \in S_\beta(0; \mathfrak{S}_p) \Leftrightarrow \tilde{A}_0(\beta) \in \mathfrak{S}_p;$$

2) $s_n(\theta(\beta)) \sim a_1 n^{-p} \Leftrightarrow s_n(\tilde{A}_0(\beta)) \sim a_2 n^{-p}$ ($0 < p < \infty$), причем либо $a_1 a_2 \neq 0$, либо $a_1 = a_2 = 0$. Если, к тому же, $M(0) \in [\mathcal{H}]$, то верны импликация

$$3) \theta - M(0) \in \tilde{S}_0(0; \mathfrak{S}_p) \Rightarrow \tilde{A}_0 \in S_0(0; \mathfrak{S}_p) \Leftrightarrow \tilde{A}_0(0) \in \mathfrak{S}_p;$$

$$4) s_n(\theta(0)) \sim a_1 n^{-p} \Rightarrow s_n(\tilde{A}_0(0)) \sim a_2 n^{-p} \quad (0 < p < \infty).$$

Доказательство 1. Если $\tilde{A}_0 \in S_\beta(0; \mathfrak{S}_p)$ или $\theta - M(\beta) \in \tilde{S}_0(0; \mathfrak{S}_p)$, то, как видно из (3), оператор \tilde{A}_0 полуограничен снизу: $m(\tilde{A}_0) = \alpha > -\infty$. Воспользуемся известным [4—7] тождеством для функции Вейля

$$M(\beta) - M(\beta - \varepsilon) = \varepsilon \gamma^*(\beta) \gamma(\beta - \varepsilon) = \varepsilon \gamma^*(\beta) [I - \varepsilon(\tilde{A}_2 - \beta + \varepsilon)^{-1}] \gamma(\beta). \quad (47)$$

Из (47) вытекают $\forall \varepsilon \in (0, -\alpha)$ неравенства

$$M(\beta - \varepsilon) + C_1 \varepsilon I_{\mathcal{H}} \leq M(\beta) \leq M(\beta - \varepsilon) + C_2 \varepsilon I_{\mathcal{H}}, \quad (48)$$

в которых $C_1 = \|\gamma(\beta)\|^2$, $C_2 = \left| \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right| \cdot \|\gamma(\beta)\|^2$. Заметим, что правое неравенство в (48) имеет место $\forall \varepsilon \in (0, \infty)$. Далее, так как $\theta - M(\beta) < \theta - M(\beta - \varepsilon) - C_1\varepsilon$, то отрицательные собственные числа операторов $\theta - M(\beta)$ и $\theta - M(\beta - \varepsilon)$, упорядоченные по возрастанию, удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_j(\theta - M(\beta)) \leq \lambda_j(\theta - M(\beta - \varepsilon)) - C_1\varepsilon \quad \forall j \geq 1.$$

Отсюда с учетом следствия 6 (при $\varphi = 0$) получаем

$$\begin{aligned} \dim E_{\theta - M(\beta)}(-\infty, -C_1\varepsilon) &\geq \dim E_{\theta - M(\beta - \varepsilon)}(-\infty, 0) = \\ &= \dim E_{A_\theta}(-\infty, \beta - \varepsilon). \end{aligned} \quad (49)$$

Так как

$$\begin{aligned} \dim E_{\theta - M(\beta)}(-\infty, -C_1\varepsilon) &= \text{card} \{k; s_k(\theta(\beta)) \geq C_1\varepsilon\} = \nu\left(\frac{1}{C_1\varepsilon}; \theta(\beta)\right), \\ \dim E_{A_\theta}(-\infty, \beta - \varepsilon) &= \text{card} \{k; s_k(\tilde{A}_\theta(\beta)) \geq \varepsilon\} = \nu\left(\frac{1}{\varepsilon}; \tilde{A}_\theta(\beta)\right), \end{aligned} \quad (50)$$

то неравенство (49) эквивалентно следующему:

$$\nu\left(\frac{r}{C_1}; \theta(\beta)\right) \geq \nu(r; \tilde{A}_\theta(\beta)). \quad (51)$$

Отправляясь от второго из неравенств (48), придем к импликации

$$\theta - M(\beta - \varepsilon) - C_2\varepsilon \leq \theta - M(\beta) \Rightarrow \lambda_j(\theta - M(\beta - \varepsilon)) - C_2\varepsilon \leq \lambda_j(\theta - M(\beta))$$

и, далее, к неравенству

$$\begin{aligned} \dim E_{A_\theta}(-\infty, \beta - \varepsilon) &= \dim E_{\theta - M(\beta - \varepsilon)}(-\infty, 0) \geq \\ &\geq \dim E_{\theta - M(\beta)}(-\infty, -C_2\varepsilon), \end{aligned} \quad (52)$$

которое с учетом равенств (50) перепишем так:

$$\nu(r; \tilde{A}_\theta(\beta)) \geq \nu\left(\frac{r}{C_2}; \theta(\beta)\right). \quad (53)$$

Объединим неравенства (49) — (53) с учетом обозначения $N(\lambda; T) = \nu\left(\frac{1}{\lambda}; T\right)$:

$$N(C_2\lambda; \theta(\beta)) \leq N(\lambda; \tilde{A}_\theta(\beta)) \leq N(C_1\lambda; \theta(\beta)). \quad (54)$$

Из (54) и очевидного равенства

$$\|T\|_{\mathcal{E}_p}^p = - \int_0^\infty \lambda^p dN(\lambda; T) = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} N(\lambda; T) d\lambda$$

вытекает оценка

$$C_2^{-1} \|\theta(\beta)\|_{\mathcal{E}_p} \leq \|\tilde{A}_\theta(\beta)\|_{\mathcal{E}_p} \leq C_1^{-1} \|\theta(\beta)\|_{\mathcal{E}_p}, \quad (55)$$

а с нею — первое утверждение теоремы.

Далее, из (54), очевидно вытекает, что пределы (верхние)

$$a_1 \doteq \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{1/p} N(\lambda; \theta(\beta)), \quad a_2 \doteq \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{1/p} N(\lambda; \tilde{A}_\theta(\beta)) \quad (56)$$

связаны неравенствами $a_1 C_2^{-1/p} \leq a_2 \leq a_1 C_1^{-1/p}$ и, значит, конечны (и отличны от нуля) лишь одновременно.

Так как

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^p \lambda_n(\theta(\beta)) = a_1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^p \lambda_n(\tilde{A}_0(\beta)) = a_2, \quad (57)$$

то второе утверждение теоремы вытекает из (56), (57).

2. Для доказательства остальных утверждений воспользуемся интегральным представлением оператор-функции $M(z) \in (R)\mathcal{A}$:

$$M(z) = C_0 + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma(t), \quad \int_0^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{1+t^2} \in [\mathcal{H}], \quad (58)$$

в котором $C_0 = C_0^*$, $\Sigma(t) = \Sigma(t-0)$ — неубывающая оператор-функция и $\text{supp } \Sigma(t) \subset (0, \infty)$, ибо $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_F \geq 0$. Из эквивалентности

$$M(0) \in [\mathcal{H}] \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t} \in [\mathcal{H}] \quad (59)$$

вытекают соотношения

$$\begin{aligned} M(0) &= \int_0^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t(1+t^2)}, \quad M(0) - M(-\varepsilon) = \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t(t+\varepsilon)} \geq \\ &\geq \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{(t+\alpha)^2} = \varepsilon C_1 I_{\mathcal{A}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Таким образом, $M(0) \geq M(-\varepsilon) + C_1 \varepsilon I_{\mathcal{A}}$, т. е. левое из неравенств (48) получено и при $\beta = 0$. Теперь импликация 3 и 4 доказываются так же, как соответствующие импликации при $\beta < 0$. Теорема доказана.

Замечание 5. При дополнительном (более сильном, чем (59)) условии $\int_0^{\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t^2} \in [\mathcal{H}]$ справедливо неравенство $M(0) \leq M(-\varepsilon) + C_2 \varepsilon$. Таким

образом, в этом случае двустороннее неравенство (48) выполнено при $\beta = 0$, а следовательно, эквивалентности 1 и 2 сохраняют силу также и при $\beta = 0$. По-видимому, последнее утверждение верно лишь при условии (59) (ср. с теоремой 2 из [16]).

Замечание 6. В утверждениях 1 и 3 теоремы 3 идеалы \mathfrak{S}_p можно заменить некоторыми другими симметрично нормированными идеалами, например, идеалами \mathfrak{S}_{Π}^0 , \mathfrak{S}_{Π} , \mathfrak{S}_{Π} (их определение см. в [17], гл. 3). Здесь $\Pi = \{\pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная бинормирующая последовательность. Для идеала \mathfrak{S}_{Π} это вытекает из неравенств (54) и равенства [17, с. 165]

$$\|T\|_{\mathfrak{S}_{\Pi}} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k s_k(T) = \int_0^{\infty} \sigma(v(r; T)) \frac{dr}{r^2},$$

в котором $\sigma(t) = \sum_{j=1}^k \pi_j$, ($k \leq t \leq k+1$).

Теорема 3 легко распространяется на классы $S_{\beta}(\varphi; k)$ при $\varphi \neq 0$ [8].

4. Расширения оператора с лакунами.

Определение 4. Говорят, что эрмитов оператор A имеет лакуну (спектральный люк) (α, β) ($-\infty < \alpha < \beta < \infty$), если

$$\left\| \left(A - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) f \right\| \geq \frac{\beta - \alpha}{2} \|f\| \quad \forall f \in D(A) \quad (\overline{D(A)} = H). \quad (61)$$

Обозначим через $L_A(\alpha, \beta)$ совокупность расширений $\tilde{A} = \tilde{A}^*$, сохраняющих лауну. Для $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ условие (61) эквивалентно условию $E_{\tilde{A}}(\alpha, \beta) \cap H = \{0\}$. Известно [1], что $L_A(\alpha, \beta) \neq \emptyset$. Следуя [18], определяем расширения

$$A_\alpha \doteq s - R - \lim_{x \downarrow \alpha} \tilde{A}_x, \quad \tilde{A}_\beta \doteq s - R - \lim_{x \uparrow \beta} \tilde{A}_x, \quad (62)$$

где, как обычно, $\tilde{A}_x = \tilde{A}_x^*$, $D(\tilde{A}_x) = D(A) + \mathfrak{N}_x$. В [6, 7] показано, что расширения $\tilde{A}_\alpha, \tilde{A}_\beta (\in L_A(\alpha, \beta))$ обладают следующим экстремальным свойством:

$$(\tilde{A}_\alpha - x)^{-1} \leq (\tilde{A} - x)^{-1} \leq (\tilde{A}_\beta - x)^{-1} \quad \forall \tilde{A} \in L_A(\alpha, \beta), \quad \forall x \in (\alpha, \beta). \quad (63)$$

Предложение 2 [5—7]. Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, в котором $\tilde{A}_2 \in L_A(\alpha, \beta)$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля. Тогда:

1) существует сильный резольвентный предел

$$M(\beta) \doteq s - R - \lim_{x \downarrow \alpha} M(x) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H}) \quad (M(\alpha) \doteq s - R - \lim_{x \uparrow \beta} M(x) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H})),$$

являющийся полуограниченным снизу (сверху) отношением и $\tilde{A}_\beta = \tilde{A}_{M(\beta)}$ ($A_\alpha = A_{M(\alpha)}$);

2) операторная часть отношения $M(\beta)$ ($M(\alpha)$) ассоциирована с замкнутой квадратичной формой

$$\mathfrak{f}_\beta |f| \doteq \lim_{x \uparrow \beta} (M(x)f, f), \quad D(\mathfrak{f}_\beta) = \{f: \lim_{x \uparrow \beta} (M(x)f, f) < \infty\}, \quad (64)$$

$$\mathfrak{f}_\alpha |f| \doteq \lim_{x \downarrow \alpha} (M(x)f, f), \quad D(\mathfrak{f}_\alpha) = \{f: \lim_{x \downarrow \alpha} (M(x)f, f) > -\infty\};$$

3) расширения \tilde{A}_2 и \tilde{A}_β (\tilde{A}_2 и \tilde{A}_α) дизъюнкты $\Leftrightarrow M(\beta) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H})$ ($M(\alpha) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H})$);

4) \tilde{A}_2 и \tilde{A}_β (\tilde{A}_2 и \tilde{A}_α) трансверсальны $\Leftrightarrow M(\beta) \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ ($M(\alpha) \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$).

Определение 5. Пусть $\varphi \in [0, \pi/2]$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Будем писать $T \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$, если $T \in \tilde{\mathcal{E}}(H)$, $\rho(T) \neq \emptyset$ и $\kappa_-(T^\pm) = k$, где

$$\mathfrak{f}^\pm |f| = \|Tf\|^2 - (\alpha + \beta) \operatorname{Re}(Tf, f) + \alpha\beta \|f\|^2 \pm (\beta - \alpha) \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{Im}(Tf, f). \quad (65)$$

Отношение $\theta \in \tilde{\mathcal{E}}(H)$ отнесем классу $\tilde{S}_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$, если его операторная часть $T \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$.

Это определение мотивировано следующими обстоятельствами. Во-первых, при $\alpha \rightarrow -\infty$ классы $S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$ переходят в классы $S_{(-\infty, \beta)}(\varphi; k) = S_\beta(\varphi; k)$ из определения 3. Во-вторых, если $\frac{\alpha + \beta}{2} \in \rho(T)$, то $2^{-1}(\beta - \alpha) \times \times \left(T - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{-1} \in C(\varphi; k)$ [16]. И, наконец, $T = T^* \in S_{(\alpha, \beta)}(0; k)$, если T имеет в лакуне (α, β) точно k собственных значений (с учетом кратности).

Теорема 4. Пусть A имеет лауну (α, β) , $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_\alpha$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля $\theta \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H})$ и $(\beta_0, \beta) \in \rho(\tilde{A}_0)$ при некотором $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$. Тогда:

1) $\tilde{A}_0 \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; 0) \Leftrightarrow D|\theta| \subset D|M(\beta)|$, $\mathfrak{f}_\beta - \mathfrak{f}_{M(\beta)} \geq 0$;

2) если $\theta \in S_a(\varphi_0)$ при некоторых $a = \bar{a}$, $\varphi_0 \in [0, \pi/2]$ и $D|\theta| \subset D|M(\beta)|$,

то $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ верна эквивалентность

$$\tilde{A}_\theta \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow \kappa_-(\mathfrak{f}_{\text{Re}\theta} \pm \text{ctg } \varphi \cdot \mathfrak{f}_{\text{Im}\theta} - \mathfrak{f}_{M(\beta)}) = k;$$

3) если, к тому же, форма \mathfrak{f}_θ замыкаема и T — оператор, ассоциированный с ее замыканием, то существует

$$s - R - \lim_{x \uparrow \beta} (\theta - M(x)) = T \quad (66)$$

и верна эквивалентность $\tilde{A}_\theta \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow T \in \tilde{S}_\theta(\varphi; k)$, причем $T = \theta - M(\beta)$, если $M(\beta) \in [\mathcal{H}]$.

Доказательство. Полагая $g = (\tilde{A} - \lambda)f$, получаем $\forall \lambda \in \rho(\tilde{A}) \cap \rho(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} \text{Re}((\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}g, g) \pm \text{ctg } \varphi \cdot \text{Im}((\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}g, g) = \\ = \|\tilde{A}_\theta f\|^2 - (\alpha + \lambda) \text{Re}(\tilde{A}_\theta f, f) + \alpha \lambda \|f\|^2 \mp (\lambda - \alpha) \text{Im}(\tilde{A}_\theta f, f). \end{aligned} \quad (67)$$

Поэтому при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ верна эквивалентность

$$\tilde{A}_\theta \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow (\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} \in S_\theta(\varphi; k) \quad \forall \lambda \in (\beta_0, \beta), \quad (68)$$

позволяющая, в частности, свести доказательство к самосопряженному случаю. Эквивалентность (68) при $k = \varphi = 0$ принимает вид

$$\tilde{A}_\theta \in L_A(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} \geq 0. \quad (68')$$

В силу экстремального свойства расширения $\tilde{A}_\alpha = \tilde{A}_{M(\alpha)}$ (см. (63)) оператор $(\tilde{A}_\alpha - \alpha)(\tilde{A}_\alpha - \lambda)^{-1}$ будет минимальным во множестве всех неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательного оператора $(A - \alpha)(A - \lambda)^{-1} \in [\mathfrak{M}_\lambda, H]$. Следовательно, операторы $(\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}$ и $(\tilde{A}_\alpha - \alpha)(\tilde{A}_\alpha - \lambda)^{-1}$, где $\tilde{A}_\theta = \tilde{A}_\theta^* \supset A$ имеют относительно разложения $H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}_\lambda$ блочно-матричные представления вида (43). Поэтому для самосопряженного расширения $\tilde{A}_\theta \in S_{(\alpha, \beta)}(0; k)$ из леммы 4 и эквивалентности (68) (при $\varphi = 0$) получим $\forall \lambda \in (\beta_0, \beta)$:

$$\begin{aligned} k = \dim E_{\lambda_0}(\alpha, \beta) H = \kappa_-((\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1}) = \kappa_-((\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} - \\ - (\tilde{A}_\alpha - \alpha)(\tilde{A}_\alpha - \lambda)^{-1}) = \kappa_-((\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} - (\tilde{A}_\alpha - \lambda)^{-1}). \end{aligned} \quad (69)$$

Из формулы резольвент (3), в которой $\tilde{A}_\alpha = \tilde{A}_\alpha$, и равенства (69) заключаем, что $\kappa_-(\theta - M(\lambda)) = k \quad \forall \lambda \in (\beta_0, \beta)$. Из включения $D[0] \subset D[M(\beta)]$, монотонности $M(\lambda)$ и леммы 3 вытекает эквивалентность

$$\kappa_-(\theta - M(\lambda)) = k (\forall \lambda \in (\beta_0, \beta)) \Leftrightarrow \kappa_-(\mathfrak{f}_\theta - \mathfrak{f}_{M(\beta)}) = k. \quad (70)$$

Соотношения (69), (70) доказывают импликацию $\tilde{A}_\theta \in S_{(\alpha, \beta)}(0; k) \Rightarrow \kappa_-(\mathfrak{f}_\theta - \mathfrak{f}_{M(\beta)}) = k$. Обращая рассуждения, установим обратную импликацию, а с ней — и второе утверждение теоремы при $\varphi = 0$. Общий случай ($\varphi \neq 0$) легко (ср. с доказательством теоремы 2) сводится к рассмотренному. Действительно, если $\tilde{A}_\theta \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k)$, то в силу (67) $(\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} \in S_\theta(\varphi; k)$. Поэтому, определяя расширения $\tilde{A}_{\theta \pm} = \tilde{A}_{\theta \pm}^*$ равенствами (41), в которых $\varepsilon = -\lambda$, и замечая, что

$$\begin{aligned} I + (\lambda - \alpha)(\tilde{A}_{\theta \pm} - \lambda)^{-1} = \text{Re} [I + (\lambda - \alpha)(\tilde{A}_\theta + \lambda)^{-1}] \pm \text{ctg } \varphi \times \\ \times \text{Im} [I + (\lambda - \alpha)(\tilde{A}_\theta + \lambda)^{-1}], \end{aligned} \quad (71)$$

приходим к включению $(\tilde{A}_0 \pm \alpha)(\tilde{A}_0 \pm \lambda)^{-1} \in S_0(0; k)$. Отсюда и из (67) (при $\varphi = 0$) заключаем $\tilde{A}_0 \pm \in S_{(\alpha, \beta)}(0; k)$. В силу доказанного выше верна эквивалентность

$$\tilde{A}_0 \pm \in S_{(\alpha, \beta)}(0; k) \Leftrightarrow \theta - M(\lambda) \in \tilde{S}_0(\varphi; k) \quad \forall \lambda \in (\beta_0, \beta) \Leftrightarrow \kappa_{-}(\mathfrak{f}_{\text{Re}\theta} \pm \text{ctg } \varphi \times \\ \times \mathfrak{f}_{\text{Im}\theta} - \mathfrak{f}_{M(\lambda)}) = k \quad \forall \lambda \in (\beta_0, \beta). \quad (72)$$

Соотношение (72) и лемма 3 позволяют получить утверждение 2 в полном объеме.

Далее, если $\tilde{A}_0 \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; 0)$, то в силу (72) (при $k = 0$)

$$(M(\lambda) f, f) \leq \mathfrak{f}_{\text{Re}\theta} |f| \pm \text{ctg } \varphi \cdot \mathfrak{f}_{\text{Im}\theta} |f| \quad \forall f \in D \setminus \{0\}. \quad (73)$$

Теперь включение $D \setminus \{0\} \subset D \setminus \{M(\beta)\}$, доказывающее утверждение 1, вытекает из (73) и предложения 2 (см. (64)). Утверждение 3 доказывается так же, как соответствующее утверждение в теореме 2. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 7. В самосопряженном случае ($\varphi = 0$) теорема 4 более сложным методом доказана в [4—7].

Теорема 5. Пусть A — эрмитов оператор с лакуной (α, β) , $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_\alpha$, $M(z)$ — соответствующая функция Вейля, $\theta = \theta^* \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H})$ и \mathfrak{E} — один из идеалов $\mathfrak{E}_p, \mathfrak{E}_\pi, \mathfrak{E}_\Pi^0, \mathfrak{E}_\Pi$. Тогда верны эквивалентности

$$1) \quad \theta(x_0) \doteq (\theta - M(x_0)) E_{\theta - M(x_0)}(-\infty, 0) \in \mathfrak{E} \Leftrightarrow \tilde{A}_0(x_0) \doteq (\tilde{A}_0 - x_0) \times \\ \times E_{\tilde{A}_0}(\alpha, x_0) \in \mathfrak{E};$$

$$2) \quad s_n(\theta(x_0)) \sim a_1 n^{-p} \Leftrightarrow s_n(\tilde{A}_0(x_0)) \sim a_2 n^{-p} \quad (0 < p < \infty),$$

причем либо $a_1 a_2 \neq 0$, либо $a_1 = a_2 = 0$. Если, к тому же, $M(\beta) \in \{\mathcal{H}\}$, то верны импликаци

$$3) \quad \theta(\beta) \doteq (\theta - M(\beta)) E_{\theta - M(\beta)}(-\infty, 0) \in \mathfrak{E} \Rightarrow \tilde{A}_0(\beta) \doteq (\tilde{A}_0 \beta -) \times \\ \times E_{\tilde{A}_0}(\alpha, \beta) \in \mathfrak{E};$$

$$4) \quad s_n(\theta(\beta)) \sim a_1 n^{-p} \Rightarrow s_n(\tilde{A}_0(\beta)) \sim a_2 n^{-p} \quad (0 < p < \infty).$$

Эта теорема доказывается с использованием теоремы 4 так же, как теорема 3 с использованием теоремы 2, если учесть вытекающие из (48), (69) и (70) соотношения

$$\dim E_{\theta - M(x_0)}(-\infty, -C_{1\varepsilon}) \mathcal{H} \geq \dim E_{\theta - M(x_0 - \varepsilon)}(-\infty, 0) \mathcal{H} = \\ = \dim E_{\tilde{A}_0}(\alpha, x_0 - \varepsilon) H.$$

Следующие две теоремы аналогичны теоремам 4, 5 и позволяют изу-
чить величину $\dim E_{\tilde{A}_0}(x_0, \beta) H \quad \forall x_0 \in (\alpha, \beta)$ и асимптотику собственных

значений оператора \tilde{A}_0 у левого края лакуны. Как и прежде, $\kappa_{+}(\mathfrak{f}) = -\kappa_{-}(-\mathfrak{f})$ — число положительных квадратов формы \mathfrak{f} .

Теорема 6. Пусть $A (\subset A^*)$ имеет лакуну (α, β) , $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\theta \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H})$, $\varphi \in [0, \pi/2]$ — соответствующая функция Вейля, $\theta \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{H})$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Если $(\alpha, \alpha_0) \in \rho(\tilde{A}_0)$ при некотором $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, то

$$1) \quad \tilde{A}_0 \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; 0) \Leftrightarrow D \setminus \{0\} \subset D \setminus \{M(\alpha)\}, \quad \mathfrak{f}_0 - \mathfrak{f}_{M(\alpha)} \leq 0;$$

2) если $\rho(\theta) \neq \emptyset$ и $D \setminus \{0\} \subset D \setminus \{M(\alpha)\}$, то $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ верна эквивалентность

$$\tilde{A}_0 \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow \kappa_{+}(\mathfrak{f}_{\text{Re}\theta} \pm \text{ctg } \varphi \mathfrak{f}_{\text{Im}\theta} - \mathfrak{f}_{M(\alpha)}) = k;$$

3) если, к тому же, форма t_0 замыкаема и T — оператор, ассоциированный с ее замыканием, то $\exists s - R - \lim_{x \downarrow \alpha} (\theta - M(x)) = T$ и верна эквивалентность

$$\tilde{A}_\theta \in S_{(\alpha, \beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow T \in \tilde{S}_\theta(\varphi; k),$$

причем $T = \theta - M(\alpha)$, если $D(\theta) \subset D(M(\alpha))$ (например, если $M(\alpha) \in [\mathcal{H}]$);

4) если $x_0 \in (\alpha, \beta)$ и $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset \rho(\tilde{A}_\theta)$, то

$$\tilde{A}_\theta \in S_{(x_0, \beta)}(\varphi; k) \Leftrightarrow -(\theta - M(x_0)) \in \tilde{S}_\theta(\varphi; k).$$

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 4 и базируется на формуле резольвент (3) (при $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_\beta$) и равенстве

$$\begin{aligned} \dim E_{\tilde{A}_\theta}^{\sim}(x_0, \beta) H &= \kappa_+(\tilde{A}_\theta - \alpha)(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} = \kappa_+(\tilde{A}_\theta - \lambda)^{-1} - \\ &- (\tilde{A}_\beta - \lambda)^{-1} = \kappa_+(\theta - M(\lambda)), \end{aligned} \quad (74)$$

справедливом $\forall \lambda \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap \rho(\tilde{A}_\theta)$ при $\theta = \theta^*$ ($\Leftrightarrow \tilde{A}_\theta = \tilde{A}_\theta^*$).

Теорема 7. Пусть A — эрмитов оператор с лакуной (α, β) , $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_\beta$, $M(z)$ — функция Вейля, $\theta = \theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ и \mathfrak{S} — один из идеалов $\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{S}_\Pi^0, \mathfrak{S}_\Pi$. Тогда $\forall x_0 \in (\alpha, \beta)$ верны эквивалентности

$$1) \theta^+(x_0) \doteq (\theta - M(x_0)) E_{\theta - M(x_0)}(0, \infty) \in \mathfrak{S} \Leftrightarrow \tilde{A}_\theta^+(x_0) \doteq (\tilde{A}_\theta - x_0) \times \times E_{\tilde{A}_\theta}^{\sim}(x_0, \beta) \in \mathfrak{S};$$

$$2) s_n(\theta^+(x_0)) \sim a_1 n^{-p} \Leftrightarrow s_n(\tilde{A}_\theta(x_0)) \sim a_2 n^{-p} \quad (0 < p < \infty),$$

причем либо $a_1 a_2 \neq 0$, либо $a_1 = a_2 = 0$. Если, к тому же, $M(\alpha) \in [\mathcal{H}]$, то верны импликации

$$3) \theta^+(\alpha) \doteq (\theta - M(\alpha)) E_{\theta - M(\alpha)}(0, \infty) \in \mathfrak{S} \Rightarrow \tilde{A}_\theta^+(\alpha) \doteq (\tilde{A}_\theta - \alpha) E_{\tilde{A}_\theta}^{\sim}(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S};$$

$$4) s_n(\theta^+(\alpha)) \sim a_1 n^{-p} \Rightarrow s_n(\tilde{A}_\theta^+(\alpha)) \sim a_2 n^{-p} \quad (0 < p < \infty).$$

Теорема 7 может быть выведена из теоремы 5 (а теорема 6 — из теоремы 4) с помощью преобразования $A \rightarrow A' = (\alpha + \beta) I_H - A$, переводящего \tilde{A}_α в $\tilde{A}'_\alpha = \tilde{A}_\beta$, либо доказана аналогично с помощью вытекающих из (48) и (74) соотношений

$$\begin{aligned} \dim E_{\theta - M(x_0)}(C_1 \varepsilon, +\infty) \mathcal{H} &\geq \dim E_{\theta - M(x_0 + \varepsilon)}(0, +\infty) \mathcal{H} = \\ &= \dim E_{\tilde{A}_\theta}^{\sim}(x_0 + \varepsilon, \beta) H, \end{aligned}$$

$$\dim E_{\tilde{A}_\theta}^{\sim}(x_0 + \varepsilon, \beta) H = \dim E_{\theta - M(x_0 + \varepsilon)}(0, +\infty) \mathcal{H} \geq \dim E_{\theta - M(x_0)}(C_2 \varepsilon, +\infty) \mathcal{H}.$$

Пример. Пусть $A \geq 0$ — минимальный оператор, порожденный в $L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ выражением Лапласа $-\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$, \tilde{A}_ω — его собственное расширение, задаваемое условием

$$\left[\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \omega(x) y(t, x) \right] \Big|_{t=0}^{\uparrow} = 0, \quad \omega(x) \in L_\infty(\mathbb{R}),$$

в котором $\omega(x)$ комплекснозначна. ПГЗ оператора A^* может быть выбрано в виде [9]

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}), \quad \Gamma_1 y = L^{1/4}(y'(0) + L^{-1/2}y(0)), \quad \Gamma_2 y = L^{-1/4}y(0), \quad (75)$$

где $L = -\frac{d^2}{dx^2} + I$. Функция Вейля имеет [5—8] вид $M(z) = L^{1/2}(L^{1/2} - (L - I - z)^{1/2})$. Фридрихово расширение \tilde{A}_F соответствует задаче Дирихле: $y(x, 0) = 0$, а крайновское \tilde{A}_K — задается условием

$$\left[\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} + \Lambda y(t, x) \right] \Big|_{t=0} = 0, \quad (76)$$

в котором Λ — оператор Кальдерона — псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|$. Поясним, что условие (76) — это трансформированное с учетом (75) равенство $D(\tilde{A}_K) = \ker(\Gamma_1 - M(0)\Gamma_2)$, в котором $M(0) = L^{1/2}(L^{1/2} + (L - I)^{1/2})^{-1} \in [\mathcal{H}]$.

Из теорем 2 и 3 вытекают следующие утверждения:

а) $\tilde{A}_\omega \in S_\beta(\varphi; k) \Leftrightarrow C_\beta \in S_0(\varphi; k) \quad \forall \beta \leq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+;$

б) $\tilde{A}_\omega \in S_\beta(\varphi; \mathfrak{S}) \Leftrightarrow L^{1/4} C_\beta L^{1/4} \in S_0(\varphi; \mathfrak{S}) \quad \forall \beta \leq 0,$

в которых $C_\beta \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $C_\beta f = \omega(x)f + (L - I - \beta)^{1/2}f$, а \mathfrak{S} — один из идеалов $\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{S}_\Pi^0, \mathfrak{S}_\Pi$.

Аналогично соответствующему результату из [6, 7] доказывается теорема 6 из [8] о расширениях рассматриваемых классов эрмитова оператора A с лагунами (α_j, β_j) ($1 \leq j \leq m \leq \infty$).

Для формулировки ее напомним, следуя [6, 7], что расширение $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ называют регулярным в концах лагун (α_j, β_j) , если $\exists \varepsilon_j > 0$ такие что $\Omega \subset \rho(\tilde{A})$, где

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^m (\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon_j) \cup (\beta_j - \varepsilon_j, \beta_j) \quad (1 \leq m \leq \infty).$$

Условие $\Omega \subset \rho(\tilde{A})$ эквивалентно регулярности в Ω функции Вейля $M(z)$, соответствующей расширению \tilde{A} , и позволяет определить ее предельные значения $M(\alpha_j)$, $M(\beta_j)$ ($1 \leq j \leq m$) в концах лагун.

Теорема 8. Пусть A — эрмитов оператор с лагунами (α_j, β_j) ($1 \leq j \leq m \leq \infty$) такой, что расширения $\tilde{A}_{\alpha_j}, \tilde{A}_{\beta_j} \in L_A(\alpha_j, \beta_j)$, определяемые равенствами (62), трансверсальны. Пусть, далее, $\{\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ — ПГЗ, для которого $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2^*$ регулярно в концах лагун (α_j, β_j) и трансверсально расширениям \tilde{A}_{β_j} ($1 \leq j \leq m$), $M(z)$ — соответствующая функция Вейля, $\theta \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{H})$, $\varphi_j \in [0, \pi/2]$. Тогда верны эквивалентности 1) $\tilde{A}_\theta \in \mathcal{S}_{(\alpha_j, \beta_j)}(\varphi_j; k_j) \Leftrightarrow \theta_j \in S_0(\varphi_j; k_j)$ ($1 \leq j \leq m$), где

$$\theta_j = [M(\beta_j) - M(\alpha_j)]^{-1} - [M(\beta_j) - \theta]^{-1} \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{H}),$$

$$[M(\beta_j) - M(\alpha_j)]^{-1} \doteq \lim_{x \downarrow \alpha_j} [M(\beta_j) - M(x)]^{-1} \in [\mathcal{H}];$$

2) если $\theta = \theta^*$, $x_j \in [\alpha_j, \beta_j)$, а \mathfrak{S} — один из идеалов $\mathfrak{S}_p, \mathfrak{S}_\pi$, то $\forall j$ ($1 \leq j \leq m$)

$$\theta_j(x_j) \doteq \Phi_j(x_j) E_{\omega_j}(0, +\infty) \in \mathfrak{S} \Rightarrow \tilde{A}_\theta(x_j) \doteq (\tilde{A}_\theta - x_j) E_{A_\theta}(x_j, \beta_j) \in \mathfrak{S}, \quad (77)$$

где

$$\Phi_j(x_j) \doteq [M(\beta_j) - \theta]^{-1} - [M(\beta_j) - M(x_j)]^{-1} \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{H}).$$

При $x_j \neq \alpha_j$ импликация в (77) заменяется эквивалентностью.

1. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов // *Мат. сб.* — 1947. — 20, № 3. — С. 431—495.
2. Бирман М. Ш. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // *Мат. сб.* — 1956. — 38, № 4. — С. 431—450.
3. Alonso A., Simon B. The Birman-Krein-Vishok Theory of self-adjoint extensions of semibounded operators // *Oper. Theory.* — 1980. — 4. — P. 251—270.
4. Деркач В. А., Маламуд М. М. О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами // Докл. АН СССР. — 1987. — 293, № 5. — С. 1041—1046.
5. Деркач В. А., Маламуд М. М. Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. — Донецк, 1985. — 52 с. — (Препринт / АН УССР. ДонФТИ; 85—9 (104)).
6. Деркач В. А., Маламуд М. М. Обобщенные резольвенты и граничные задачи для эрмитовых операторов с лакунами. — Киев, 1988. — 64 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 88.59).
7. Derkach V. A., Malamud M. M. Generalized Resolvents and Boundary Value Problems for Hermitian Operators with Gaps // *J. Funct. Anal.* — 1991. — 95, N 1. — P. 1—95.
8. Маламуд М. М. Граничные задачи для эрмитовых операторов с лакунами // Докл. АН СССР. — 1990. — 313, № 6. — С. 1335—1340.
9. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1984. — 283 с.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
11. Деркач В. А., Маламуд М. М., Цекановский Э. Р. Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция // *Укр. мат. журн.* — 1989. — 41, № 2. — С. 151—158.
12. Колманович В. Ю., Маламуд М. М. Расширения секториальных операторов и дуальных пар сжатий. — Донецк, 1985. — 56 с. — Деп. в ВИНИТИ, № 4428—85.
13. Сторож О. Г. Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи // *Укр. мат. журн.* — 1990. — 42, № 6. — С. 857—860.
14. Крейн М. Г., Овчаренко И. Е. О Q-функциях и SC-расширениях неплотно заданных эрмитовых сжатий // *Сиб. мат. журн.* — 1977. — 18, № 5. — С. 1032—1056.
15. Михайлец В. А. Спектры операторов и граничные задачи // *Спектральный анализ дифференциальных операторов.* — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. — С. 106—131.
16. Маламуд М. М. О расширениях эрмитовых, секториальных операторов и дуальных пар сжатий // Докл. АН СССР. — 1989. — 305, № 1. — С. 35—41.
17. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967. — 508 с.
18. Ando T., Nishio K. Positive Selfadjoint extensions of positive symmetric operators // *Tohoku Math. J.* — 1970. — 2, ser. 22. — P. 65—75.

Получено 09.10.91

УДК 517.947

А. И. Марковский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Замечания об $L_p - L_q$ оценках решений уравнения Клейна — Гордона

Устраняются пробелы в доказательствах ряда оценок, установленных ранее в статье Маршалла, Штрауса и Вайнгера, посвященной $L_p - L_q$ оценкам решений уравнения Клейна — Гордона.

Усуваються недоліки в доведеннях ряду оцінок, установлених раніше в статті Маршалла, Штрауса і Вайнгера, присвяченій $L_p - L_q$ оцінкам розв'язків рівняння Клейна — Гордона.

В работе [1] рассматривается задача Коши для уравнения Клейна — Гордона

$$u_{tt} = \Delta u - u, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x), \quad x \in R^n. \quad (2)$$

Оператор $T_t : f \Rightarrow u(\cdot, t)$ преобразует начальную скорость в положение $u(\cdot, t)$ в момент t . Основные вопросы, рассматриваемые в статье, следующие.