УДК 517.9

Е. А. Гребеников (ВЦ РАН, Москва, Россия)

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

We consider one mathematical problem that was discussed by the author with A. M. Samoilenko at the Third International Conference on the Theory of Nonlinear Oscillations (Trans-Carpathians, 1967).

Викладено одну математичну проблему, яка була обговорена автором та А. М. Самойленком на 3-й міжнародній конференції з теорії нелінійних коливань (1967 р., Закарпаття).

1. История проблемы. Классическая астрономия, к которой относят небесную механику и астрометрию, до конца 19-го столетия была основным заказчиком математических методов исследования динамических закономерностей, действующих в космическом пространстве.

Великим триумфом математики, механики, астрономии и всего естествознания 19-го века следует считать открытие Леверье в 1846 г., „на кончике пера”, восьмой большой планеты Солнечной системы, получившей название Нептун. Термин „на кончике пера” означает в сегодняшней терминологии математические методы обработки результатов наблюдений и выведение из них закономерностей, наилучшим образом описывающих данную совокупность измерений. Знаменитый астроном В. Гершель с помощью построенного им телескопа в 1810 г. открыл седьмую большую планету Солнечной системы, названную впоследствии Ураном. Анализ наблюдений Урана показал, что его движение вокруг Солнца противоречит законам планетных движений, т. е. законам Кеплера. Этот неожиданный парадокс можно было бы объяснить одной из двух причин:

1) законы Кеплера не являются универсальными для всех известных в то время планет;

2) в околосолнечном пространстве существует неизвестное тело, которое возмущает движение Урана.

Первая причина имела мало сторонников. Вторая же казалась безусловно предпочтительней, и за ее исследование взялись английский математик Адамс и французский астроном Леверье, которые независимо друг от друга блестяще решили эту задачу. Они вычислили в определенный момент времени координаты неизвестной до того момента времени планеты и ее массу, а берлинский астроном Галле, используя результаты вычислений Леверье, в начале 1846 г. увидел в телескопе неизвестную до того момента времени планету Солнечной системы, названную позднее Нептуном. С математической точки зрения ими была решена следующая обратная математическая задача космической динамики: используя достаточно богатый массив наблюдений планеты Уран, накопленный в различных астрономических обсерваториях в течение нескольких десятилетий (т. е. ее сферических координат, привязанных к шкале времени), построить такую траекторию его движения в околосолнечном пространстве, которая представляла бы наилучшим образом име-

© Е. А. ГРЕБЕНИКОВ, 2008

ющиеся тогда оптические наблюдения Урана. Построение наилучшей для того времени траектории Урана оказалось возможным только при допущении гипотезы о существовании неизвестной в то время планеты, возмущающей ее динамику. Математическая реализация такой гипотезы позволила Леверье и Адамсу вычислить координаты неизвестной планеты в определенный момент времени, и это привело к фактическому открытию на небосводе новой слабо светящейся точки, оказавшейся восьмой планетой Солнечной системы.

Существенное развитие в XIX столетии математического анализа, аналитической, качественной и численной теории дифференциальных уравнений, разработка Максвеллом математических основ электродинамики вместе с выдающимися астрономическими открытиями (наряду с открытием Нептуна укажем на открытие Фраунгофера, названное „спектральным анализом”), можно сказать, предопределили появление трехтомного сочинения А. Пуанкаре „Новые методы небесной механики” [1]. Оно определило развитие многих направлений математики 20-го столетия, но для нас особенно важное значение имеет теория нелинейных колебаний, трактуемая здесь как теория периодических и почти периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой академик А.М.Самойленко является общепризнанным авторитетом. Следует также упомянуть, что к 1967 г. А. Н. Колмогоров, В. И. Арнольд и Ю. Мозер сформулировали и доказали основополагающие теоремы, составляющие фундамент КАМ-теории [2 – 5]. Появившаяся тогда аббревиатура „КАМ-теория” объединяет проблемы и фундаментальные результаты А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда, Ю. Мозера, их учеников и последователей по теории условно-периодических решений гамильтоновых систем, определенных на многомерных торах, т. е. по исследованию проблемы Пуанкаре, сформулированной в начале.

Эти обстоятельства существенно стимулировали горячие дискуссии по различным проблемам на „Боголюбовских школах” по теории нелинейных колебаний, проходивших регулярно в 60 – 80-е годы 20-го столетия. Именно в Карпатах, в 1967 г. я имел возможность обсудить с А. М. Самойленко весьма интересную, на мой взгляд, проблему, относящуюся к КАМ-теории, которая не исследована до сих пор. Ее суть заключается в следующем.

Пусть заданы две функции $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$: $F_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) \in C^{(1)}(G_{2n})$ и $F_2(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) \in C^{(1)}(G_{2n})$, где G_{2n} — область $2n$-мерного евклидова пространства специальной структуры, типичной для пространств много периодических функций [4]. Говорят, что функции F_1 и F_2 находятся в инволюции в G_{2n}, если их скобка Пуассона [1, 3] в G_{2n} равна нулю, т. е.

$$(F_1, F_2) \equiv \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_k} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} - \frac{\partial F_1}{\partial y_k} \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \right) = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим автономную гамильтонову систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{2}$$

с гамильтонианом

$$H(p,q) \equiv H_0(p) + \mu H_1(p,q), \quad 0 \le \mu \ll 1,$$
$$H_1(p,q) \equiv H_1(p, q + (2\pi)), \tag{3}$$

аналитическим в $2n$-мерной области (мы используем обозначения В. И. Арнольда [3, 4])

$$G_{2n} = \left\{ p \in G_n, \ \| \operatorname{Im} q \| < p < 1, \ \| \operatorname{Im} q \| = \sum_{s=1}^{n} |\operatorname{Im} q_s| \right\}, \tag{4}$$

2π-периодическим по всем фазовым координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (n-мерное многообразие G_n состоит из n-мерных торов).

Теорема Лиувилля [1, 4]. *Если известны n независимых первых интегралов системы* (2), *удовлетворяющих инволюционному равенству* (1), *то гамильтонова система* (2) *интегрируема в квадратурах.*

Формулировка теоремы Лиувилля не содержит утверждений, связанных с преобразованиями гамильтоновой системы (2), хотя Пуанкаре, как было отмечено выше, проблему интегрируемости основных уравнений классической динамики (гамильтоновых систем вида (2)) сформулировал в терминах их преобразования к виду

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}(P)}{\partial Q}, \qquad \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(P)}{\partial P} = \tilde{\omega}(P). \tag{5}$$

Именно Пуанкаре сформулировал и фактически наметил путь к решению следующей проблемы:

Доказать существование и построить такое невырожденное каноническое преобразование [3 – 5]

$$p = \varphi(P,Q), \qquad q = \psi(P,Q), \tag{6}$$

которое преобразует систему (2) с гамильтонианом, удовлетворяющим условиям (3), (4), в систему (5), в которой новый гамильтониан $\tilde{H}(P)$ зависит только от новых „медленных” переменных (новых импульсов) P и не зависит от новых „быстрых” переменных (фазовых углов) Q [6].

Эта проблема является центральной проблемой в КАМ-теории и, помимо „строгого” подхода, который подразумевает обязательное исследование сходимости встречающихся преобразований, она была объектом исследования и в интерпретации „асимптотической” [1]. Здесь фундаментальные пионерские работы принадлежат Н. Н. Боголюбову, Ю. А. Митропольскому, А. М. Самойленко [7, 8]. Асимптотическая теория многочастотных систем, построенная на базе специальных схем усреднения, учитывающих наличие частотных резонансов, была предложена в работе [9].

Очевидно, гамильтониан (2) удовлетворяет теореме Дирихле о существовании его Фурье-разложения [10] в области G_{2n}, т. е. его можно представить n-кратным рядом Фурье, который в комплексной форме имеет вид

$$
\begin{gathered}
H(p,q) = \sum_{\|k\| \geq 0} h_k(p) e^{i(k,q)}, \\
(k,q) = \sum_{s=1}^{n} k_s q_s, \qquad \|k\| = \sum_{s=1}^{n} |k_s|, \quad k_s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad i = \sqrt{-1},
\end{gathered} \tag{7}
$$

$$
h_k(p) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} H(p,q) e^{-i(k,q)} dq_1 \ldots dq_n. \tag{8}
$$

Коэффициенты Фурье $h_k(p)$ разложения (7) являются быстро убывающими величинами с ростом нормы $\|k\|$ и удовлетворяют „экспоненциальной” оценке В. Арнольда [4]

$$
\big\| h_k(p) \big\| \leq M e^{-\|k\|\rho}, \tag{9}
$$

где M и ρ — некоторые положительные константы.

Поэтому целесообразно искать преобразование (6) в виде n-кратных тригонометрических рядов [4, 6]

$$
\begin{aligned}
p = \varphi(P,Q) = \sum_{\|k\| \geq 0}^{\infty} \varphi_k(P) e^{i(k,Q)}, \\
q = \psi(P,Q) = \sum_{\|k\| \geq 0}^{\infty} \psi_k(P) e^{i(k,Q)},
\end{aligned} \tag{10}
$$

где коэффициенты $\varphi_k(P)$, $\psi_k(P)$, в свою очередь, представляются степенными рядами вида

$$
\begin{aligned}
\varphi_k(P) &= \sum_{\|s\| \geq \|k\|} a_s P^s \equiv \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n \geq \|k\|}^{\infty} a_{s_1,s_2,\ldots,s_n} P_1^{s_1} P_2^{s_2} \ldots P_n^{s_n}, \\
\psi_k(P) &= \sum_{\|s\| \geq \|k\|} b_s P_s,
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
s_i = 0, 1, 2, \ldots, \quad k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n,
$$

с неизвестными коэффициентами a_s, b_s.

Если продифференцировать выражения (10) по t и подставить их в левые части основной гамильтоновой системы (2), а в правых частях осуществить замену (10) с коэффициентами (11), то после выполнения соответствующих операций (среди которых алгебраические операции над коэффициентами Фурье и операции дифференцирования), в принципе, можно записать *бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений* с неизвестными a_s, b_s вида

$$
\begin{aligned}
&F_r(a_0, b_0, \ldots, a_s, b_s, \ldots) = 0, \\
&r = 1, 2, 3, \ldots .
\end{aligned} \tag{12}
$$

Решение алгебраической задачи (12) *эквивалентно* задаче о построении замены переменных (10) тогда и только тогда, когда ряды (10) и (11) являются сходящимися в соответствующих гладких областях.

Фундаментальный результат Пуанкаре о расходимости рядов небесной механики [1] применительно к поиску преобразования (6) состоит в том, что ряды вида (10) являются расходящимися из-за наличия в структуре коэффициентов $\varphi_k(P)$ и $\psi_k(P)$ *малых знаменателей* типа $(k, \tilde{\omega}(P))$, которые при $\|k\| \to \infty$ могут быть сколь угодно малыми, в том числе и нулевыми величинами, причем *случайность* такого поведения величин $(k, \tilde{\omega}(P))$, как функции вектора k, является основной причиной расходимости рядов (10).

Равенство

$$(k, \tilde{\omega}(P)) = \alpha << 1 \tag{13}$$

для $\|k\| \neq 0$ называется *α-резонансом частот* $\tilde{\omega}_1(P), \tilde{\omega}_2(P), \ldots, \tilde{\omega}_n(P)$ [11]. Если $\alpha = 0$, имеем точный частотный резонанс. Очевидно, резонансы могут возникнуть только при $n \geq 2$, т. е. в одночастотных динамических системах резонансы всегда отсутствуют. Если переменные Q в гамильтоновой системе (5) трактовать как фазовые углы, то величины $\tilde{\omega}_1(P), \tilde{\omega}_2(P), \ldots, \tilde{\omega}_n(P)$ в физическом смысле — это *угловые скорости*, или, как принято называть их в теории колебаний, *частоты*. Именно появление в процессе интегрирования гамильтоновой системы (2) частотных резонансов вида (13) неизбежно приводит к расходящимся рядам.

Это побудило Пуанкаре предложить теорию *асимптотических представлений* (синонимом этого понятия является *асимптотический ряд*), на основе которой им была разработана теория асимптотической интегрируемости дифференциальных уравнений динамики.

Комментарием к этим математическим рассуждениям может служить абзац из знаменитого сочинения Пуанкаре „Новые методы небесной механики” [1]:

„Геометры и астрономы по-разному понимают слово сходимость. Геометры, всецело озабоченные достижением безукоризненной строгости и зачастую совершенно безразличные к продолжительности сложных вычислений, говорят, что некоторый ряд сходится, если сумма его членов стремится к какому-то определенному пределу, даже в том случае, когда первые члены ряда убывают чрезвычайно медленно. В противоположность этому астрономы обычно говорят, что некоторый ряд сходится, если, например, первые двадцать членов этого ряда убывают очень быстро, несмотря на то, что последующие его члены неограниченно возрастают ... Обе точки зрения законны: первая — в теоретических исследованиях, вторая — в численных приложениях. Обе господствуют безраздельно, но в различных областях, и границы этих областей необходимо четко различать”.

Последние полвека получили развитие топологическая трактовка проблемы интегрируемости [12, 13], которая состоит в *построении глобальной классификации* всевозможных траекторий динамических систем по их различным признакам, и связанное с этим разделение фазового пространства на области, состоящие из траекторий того или иного класса.

Так или иначе, исследования Пуанкаре показали, что основным препятствием к интегрированию гамильтоновых систем (2) являются малые знаменатели типа (13), которые неизбежно появляются в искомых рядах. Что касается построения бесконечной последовательности невырожденных преобразований

$$(p,q) \leftrightarrow (p^{(1)},q^{(1)}) \leftrightarrow (p^{(2)},q^{(2)}) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow (p^{(\infty)},q^{(\infty)}) \equiv (P,Q), \qquad (14)$$

которая преобразует систему (2) в интегрируемую систему (5), то такое решение может быть достигнуто лишь в рамках КАМ-теории. Фазовые многообразия, в которых существуют сходящиеся невырожденные канонические преобразования, составляют бесконечную последовательность включений

$$G_{2n} \supset G_{2n}^{(1)} \supset G_{2n}^{(2)} \supset \ldots \supset G_{2n}^{(\infty)} \equiv G_{2n}^{*},$$

причем предельное многообразие G_{2n}^{*} не является пустым ($G_{2n}^{*} \neq \oslash$) и может быть записано в виде

$$G_{2n}^{*} = \left\{P \in G_n^{*}, \quad \|\operatorname{Im} Q\| < p^{*} \leq p < 1\right\}.$$

Сходимость итерационного процесса (14) гарантируется методом ускоренной сходимости [4], в котором k-я итерация имеет порядок малости

$$(p^{(k)}, \Delta q^{(k)}) = O(\mu^{2^k}),$$

где $\Delta q^{(k)}$ — возмущение фазовой переменной $q^{(k)}$.

Если строить итерации классическим методом, для которого порядок малости k-й итерации

$$(p^{(k)}, \Delta q^{(k)}) = O(\mu^{k}),$$

то для гамильтоновых систем (2) размерности $4, 6, 8, \ldots$ итерационный процесс (14) будет расходящимся.

Именно на основе этого Пуанкаре сделал вывод, что последовательность преобразований $(p,q) \to (P,Q)$ является расходящейся в области G_{2n}. Кроме того, к сожалению, фазовые n-мерные многообразия G_n^{*} и $\bar{G}_n = G_n \setminus G_n^{*}$ всюду плотны в $G_n = G_n^{*} \cup \bar{G}_n$, откуда следует, что привычный путь „степенных" преобразований $(p,q) \to (P,Q)$ не решает нашу задачу.

Вместе с тем К. Зигель показал [13], что в G_n^{*} для малых знаменателей выполняется неравенство

$$\bigl|(k, \omega(p))\bigr| \geq \frac{K(p)}{\|k\|^{n+1}}, \qquad (15)$$

где $\omega(p) = \dfrac{\partial H_0}{\partial p}$ и лебеговы меры многообразий G_n^{*}, $\bar{G}_n$ соответственно равны

$$\operatorname{mes} \bar{G}_n = \epsilon << 1, \qquad \operatorname{mes} G_n^{*} = 1 - \epsilon.$$

Идеология методов „ускоренной сходимости", развитых в КАМ-теории для „борьбы" с малыми знаменателями вида (15), оказывается весьма эффективной [2, 4] и состоит в том, что, с учетом условия К. Зигеля (15), можно построить сходящиеся процедуры (14) и, следовательно, привести первоначальную систему дифференциальных уравнений (2) к системе (5). Проблема малых знаменателей возникает не только в гамильтоновой динамике. Она встречается, например, в задаче об отображении окружности на себя, в задаче об устойчивости особой точки типа „центр" [14 – 17].

Формулировка проблемы. Из изложенного выше следует, что определение бесконечной цепочки преобразований (14) возможно лишь на базе КАМ-теории с учетом топологической структуры n-мерных многообразий G_n^* и $\bar{G}_n = G_n \setminus G_n^*$.

С другой стороны, выглядит правдоподобной гипотеза о существовании в классе $\{F(x)\}$ всевозможных 2π-периодических аналитических функций вида $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(x_1 + 2\pi, x_2 + 2\pi, \ldots, xn + 2\pi)$, определенных на многообразии G_n, подкласса таких функций, для которого мера $\operatorname{mes} \bar{G}_n = 0$, и, соответственно, второго подкласса функций, для которого мера $\operatorname{mes} G_n^* = 1$.

Конкретные примеры таких функций существуют (например, два 2π-периодических тригонометрических полинома с конкретными постоянными частотами). Исследование в целом такой проблемы в G_n, по-видимому, позволило бы более конструктивно и эффективно изучить поведение динамических систем на многомерных „пульсирующих” торах.

В заключение мне хочется констатировать наличие в моем сознании приятнейших ощущений от многочисленных счастливых встреч и горячих научных дискуссий с таким выдающимся математиком, внимательнейшим и добрейшим коллегой, каковым является Анатолий Михайлович Самойленко.

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. – М.: Наука, 1971 – 1973. – Т. 1 – 3.
2. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. – 1954. – **98**, № 4. – С. 527 – 530.
3. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 431 с.
4. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, вып. 6. – С. 91 – 192.
5. *Мозер Ю.* Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория. – Ижевск, 1999. – 295 с.
6. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 410 с.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
9. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Новые качественные методы в небесной механике. – М.: Наука, 1971. – 442 с.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
11. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1979. – 196 с.
12. *Grebenikov E., Kozak-Skoworodkin D., Jakubiak M.* The algebraic problems of the normalization in Hamiltonian theory // Math. System in Teaching and Research. – 2000. – P. 73 – 90.
13. *Siegel C. L.* Iterations of analytic functions // Ann. Math. – 1942. – **43**, № 4. – P. 807 – 812.
14. *Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З.* Гладкие динамические системы // Совр. проблемы математики. – 1985. – Т. 1. – С. 151 – 242.
15. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. – М.: Наука, 1997. – 352 с.
16. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.: Наука, 1978. – 210 с.
17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. – М.: Физматгиз, 1961. – 356 с.

Получено 27.11.07