УДК 517.948.32: 517.544

Л. Н. Колмакова, ассист. (Одес. политех. ун-т)

О ПОКАЗАТЕЛЯХ ЭЛЕМЕНТОВ НОРМАЛЬНОГО БАЗИСА ИДЕАЛА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ТРЕХЛИСТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

On a three-sheeted Riemann surface $\mathcal{R}$ of genus ρ, given by an irreducible algebraic equation, we construct normal bases in the ideal of algebraic functions which are multiples of some integral divisors. A method for constructing such normal bases is given in [1]. The formulas obtained for the exponents of the constructed elements lead to finding the number of solutions of the Riemann problem for any integral divisor [2], as well as to finding partial indices the factorization problem for matrices of permulational type [3].

На трилистій рімановій поверхні $\mathcal{R}$ роду ρ, заданій незвідним алгебраїчним рівнянням, побудовані нормальні базиси (н. б.) ідеалу алгебраїчних функцій, кратних деяким цілим дивізорам. Методика побудови таких н. б. розроблена в [1]. Одержані формули для показників елементів побудованих базисів приводять до знаходження числа розв'язків Рімана для будь-якого цілого дивізора [2] і часткових індексів у задачах факторизації матриць підстановочного типу [3].

1. Постановка задачи. Множество упорядоченных пар чисел (z, u), связанных соотношением

$$u^3 + a_1(z)u^2 + a_2(z)u + a_3(z) = 0, \tag{1}$$

где $a_i(z)$ — известные многочлены, образует трехлистную риманову поверхность, если на этом множестве задана локальная конформная структура σ: для точки ветвления (c, ξ) с порядком ветвления α полагаем $\sigma^\alpha = z - c$; для бесконечно удаленной точки (∞, ∞^i), $i = \overline{1,3}$, — $\sigma = z^{-1}$; для регулярной точки (z_0, u_0) — $\sigma = z - z_0$.

Среди регулярных точек поверхности $\mathcal{R}$ выделим точки $(z, u^{(1)})$, $(z, u^{(2)})$, $(z, u^{(3)})$, где $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ — различные корни уравнения (1) при фиксированном z. Эти точки будем называть 3-сопряженными точками поверхности $\mathcal{R}$, а любые 2 точки из этой тройки — 2-сопряженными.

Пусть на $\mathcal{R}$ задан дивизор: $O = (t_1, v_1) \ldots (t_\alpha, v_\alpha)$, $\operatorname{ord} O = \alpha$, и $I(O)$ — идеал, состоящий из целых элементов поверхности $\mathcal{R}$, кратных целому дивизору O.

Требуется построить н. б. идеала $I(O)$, т. е. функции $\{\psi\} = \{\psi_1(z, u);\ \psi_2(z, u);\ \psi_3(z, u)\}$ со свойствами: 1) $\{\psi\} \in I(O)$; 2) они независимы над $\mathbb{C}[z]$; 3) при $(z, u) \to (\infty, \infty^{(i)})$ показатели $\deg \psi_i$, $i = \overline{1,3}$, минимальны в том смысле, что никакими комбинациями вида $\sum p_i(z)\psi_i(z, u)$, где $p_i(z)$ — рациональные функции от z, их уменьшить нельзя.

Дивизор O назовем дивизором первой категории, если он не содержит сопряженных точек и точек ветвления поверхности; дивизором второй категории, если он не содержит точек ветвления поверхности; все остальные дивизоры назовем дивизорами третьей категории.

Дивизор O второй категории в общем случае представим в виде $O = O_{(3)} O_{(2)} \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — дивизор первой категории, $O_{(2)}$ содержит только 2-сопряженные точки поверхности, $O_{(3)}$ — только 3-сопряженные.

2.1. Дивизор $\mathcal{H}$ — первой категории. Построение н. б. идеала $I(\mathcal{H})$,

вычисление показателей. Пусть $\mathcal{H} = (t_1, v_1) \ldots (t_p, v_p)$, $\operatorname{ord} \mathcal{H} = p$. Построим н. б. идеала $I(\mathcal{H})$ функции $\{h\} = \{h_1(z, u);\ h_2(z, u);\ h_3(z, u)\}$.

Подчиним функцию

$$c_0 + c_1 z + c_2 \lambda_2(z, u) + c_3 \lambda_3(z, u) \tag{2}$$

с произвольными коэффициентами условию обращения в нуль в точке (t_1, v_1). Здесь $\lambda_2(z, u)$ и $\lambda_3(z, u)$ принадлежат н. б. функций на $\mathcal{R}$, а $r_2 \le r_3$ — их показатели. Из полученного уравнения найдем c_0 и подставим в (2). В результате полученная функция

$$c_0(z - t_1) + c_2(\lambda_2(z, u) - \lambda_2(t_1, v_1)) + c_3(\lambda_3(z, u) - \lambda_3(t_1, v_1)) \tag{3}$$

становится кратной (t_1, v_1). Обозначим

$$h_1^{(1)}(z) = z - t_1, \quad h_2^{(1)}(z,u) = \lambda_2(z, u) - \lambda_2(t_1, v_1),$$
$$h_3^{(1)}(z,u) = \lambda_3(z, u) - \lambda_3(t_1, v_1).$$

Функции $\{h^{(1)}\}$ по построению образуют н. б. идеала $I(t_1, v_1)$. Далее, подчиним функцию

$$(c_0 + c_1 z) h_1^{(1)}(z) + c_2 h_2^{(1)}(z,u) + c_3 h_3^{(1)}(z,u) \tag{4}$$

условию обращения в нуль в точке (t_2, v_2). Аналогично предыдущему найдем c_0 и получим функцию, кратную $(t_1, v_1)(t_2, v_2)$:

$$c_1(z - t_2) h_1^{(1)}(z) + c_2(h_2^{(1)}(z,u) - (h_2^{(1)}(t_2, v_2) / h_1^{(1)}(t_2)) h_1^{(1)}(z)) +$$
$$+ c_3(h_3^{(1)}(z, u) - (h_3^{(1)}(t_2, v_2) / h_1^{(1)}(t_2)) h_1^{(1)}(z)).$$

Обозначим

$$h_1^{(2)}(z) = (z - t_2) h_1^{(1)}(z), \quad h_2^{(2)}(z,u) = h_1^{(1)}(t_2) h_2^{(1)}(z,u) - h_2^{(1)}(t_2, v_2) h_1^{(1)}(z),$$
$$h_3^{(2)}(z,u) = h_1^{(1)}(t_2) h_3^{(1)}(z, u) - h_3^{(1)}(t_2, v_2) h_1^{(1)}(z);$$

k-й шаг алгоритма [1], $k = \overline{1, r_2}$, приводит к следующему н. б. $\{h^{(k)}\}$ идеала $I(\mathcal{H}^{(k)})$, где $\mathcal{H}^{(k)} = (t_1, v_1) \ldots (t_k, v_k)$:

$$h_1^{(k)}(z) = (z - t_k) h_1^{(k-1)}(z),$$
$$h_2^{(k)}(z, u) = h_1^{(k-1)}(t_k) h_2^{(k-1)}(z, u) - h_2^{(k-1)}(t_k, v_k) h_1^{(k-1)}(z), \tag{5}$$
$$h_3^{(k)}(z, u) = h_1^{(k-1)}(t_k) h_3^{(k-1)}(z, u) - h_3^{(k-1)}(t_k, v_k) h_1^{(k-1)}(z).$$

Здесь $h_1^{(0)}(z) = 1$, $h_2^{(0)}(z, u) = \lambda_2(z, u)$, $h_3^{(0)}(z, u) = \lambda_3(z, u)$. При этом $h_1^{(k)}(t_{k+1}) \ne 0$ и

$$\deg h_1^{(k)} \le \deg h_2^{(k)} \le \deg h_3^{(k)}. \tag{6}$$

По аналогии с изложенным выше с учетом соотношения (6) строим н. б. $\{h^{(k)}\}$ для $k = \overline{r_2 + 1, p}$, при этом $h_1^{(k)} \equiv h_1^{(k)}(z, u)$.

Данный алгоритм позволяет легко вычислить показатели элементов н. б. $\{h\}$, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $p \le r_2$. *Тогда* $\deg h_1 = p$, $\deg h_2 = r_2$, $\deg h_3 = r_3$.

Доказательство теоремы очевидно, так как функции (5) при $k = p$ образуют н. б. идеала $I(\mathcal{H})$.

Результаты следующих утверждений распространяются на случай, когда на каждом шаге алгоритма среди оставшихся точек дивизора всегда найдется такая, что элементы н. б. с наименьшими показателями отличны от нуля в данной точке. Для (5) это условие заведомо выполняется. Дивизор $\mathcal{H}$ при этом называется устойчивым дивизором.

Теорема 2. *Пусть* $r_2 < p \le 2r_3 - r_2$. *Тогда* $\deg h_1 = \deg h_2 = (p + r_2)/2$, $\deg h_3 = r_3$, *если* $p - r_2 \equiv 0 \pmod 2$;

$$\deg h_1 = (p + r_2 - 1)/2, \quad \deg h_2 = \deg h_1 + 1, \quad \deg h_3 = r_3, \tag{7}$$

если $p - r_2 \equiv 1 \pmod 2$.

Теорема 3. *Пусть* $p > 2r_3 - r_2$. *Тогда* $\deg h_i = (p + r_2 + r_3)/3$, $i = \overline{1,3}$, *если* $p - 2r_3 + r_2 \equiv 0 \pmod 3$;

$$\deg h_1 = \deg h_2 = (p + r_2 + r_3 - 1)/3, \quad \deg h_3 = \deg h_1 + 1, \tag{8}$$

если $p - 2r_3 + r_2 \equiv 1 \pmod 3$;

$$\deg h_1 = (p + r_2 + r_3 - 2)/3, \quad \deg h_2 = \deg h_3 = \deg h_1 + 1,$$

если $p - 2r_3 + r_2 \equiv 2 \pmod 3$.

Доказательство теоремы 2. На каждом шаге рассматриваемого алгоритма происходит увеличение на единицу только одного минимального показателя функций, участвующих на этом шаге. Согласно (2) – (5) рост показателя происходит только у функции $h_1^{(k)}(z)$ и на r_2-м шаге $\deg h_1^{(r_2)}(z) = \deg h_2^{(r_2)}(z, u)$. Начиная с $(r_2 + 1)$-го шага происходит поочередный рост чисел $\deg h_1^{(k)}(z, u)$ и $\deg h_2^{(k)}(z, u)$ до сравнивания с $\deg h_3^{(k)}(z, u)$. На $(r_2 + k)$-м шаге алгоритма, $k \le 2(r_3 - r_2)$: $\deg h_3 = r_3$, $\deg h_1^{(r_2+k)} = \deg h_2^{(r_2+k)} = r_2 + k/2$, если k — четное число;

$$\deg h_3 = r_3, \quad \deg h_1^{(r_2+k)} = r_2 + k/2, \quad \deg h_2^{(r_2+k)} = \deg h_1^{(r_2+k)} + 1, \tag{9}$$

если k — нечетное число. Формулы (7) следуют из (9) при $r_2 + k = p$.

Доказательство теоремы 3. На $(r_2 + 2(r_3 - r_2))$-м шаге алгоритма построения н. б. идеала $I(\mathcal{H})$ $\deg h_i^{(k)} = r_3$, $i = \overline{1,3}$. Распространим алгоритм на оставшиеся $p - 2r_3 + r_2$ точек. Представляя $p - 2r_3 + r_2 = 3m + j$, $0 \le j \le 2$, $m \ge$ ≥ 0, получаем $\deg h_i^{(k)} = r_3 + m$, если $j = 0$, $i = \overline{1,3}$;

$$\begin{gathered} \deg h_1^{(k)} = \deg h_2^{(k)} = r_3 + m, \quad \deg h_3^{(k)} = \deg h_2^{(k)} + 1, \quad \text{если } j = 1; \\ \deg h_1^{(k)} = r_3 + m, \quad \deg h_2^{(k)} = \deg h_3^{(k)} = \deg h_1^{(k)} + 1, \quad \text{если } j = 2. \end{gathered} \tag{10}$$

После преобразований (10), где $m = (p - 2r_3 + r_2)/3$, получаем формулы (8).

2.2. Дивизор $\mathcal{H}$ — первой категории, неустойчивый случай. Пусть на k_1-м шаге алгоритма построения н. б. идеала $I(\mathcal{H})$ не нашлось ни одной точки дивизора $(t_{k_1}, v_{k_1}) \dots (t_p, v_p) \subset \mathcal{H}$, в которой бы $\deg h_1^{(k_1-1)}(z, u) \ne 0$. Это значит, что функция $h_1^{(k_1-1)}(z, u)$ кратна дивизору $\mathcal{H}$ и в алгоритме в дальнейшем уже не участвует, являясь элементом искомого н. б. $\{h\}$, а дивизор $\mathcal{H}$ терпит разрыв устойчивости на k_1-м шаге алгоритма (разрыв ранга один).

Пусть далее, на каждом k-м шаге алгоритма $k_1 < k < k_2 - 1 < p$ функция $h_2^{(k-1)}(t_k, v_k) \neq 0$, а на $(k_2 - 1)$-м шаге становится кратной дивизору $\mathcal{H}$. Дивизор $\mathcal{H}$ при этом терпит второй (и последний) разрыв устойчивости, и в алгоритме в дальнейшем участвует единственная функция $h_3^{(k_2-1)}(z, u)$.

Заметим, что на $(k_1 - 1)$-м шаге наряду с функцией $h_1^{(k_1-1)}(z, u)$ элементом искомого н. б. $\{h\}$ может стать и функция $h_2^{(k_1-1)}(z, u)$. В этом случае говорят, что дивизор $\mathcal{H}$ на k_1-м шаге алгоритма терпит разрыв устойчивости ранга два.

Промежутки $[1, k_1 - 1]$, $[k_1, k_2 - 1]$, $[k_2, p]$ называются зонами устойчивости дивизора $\mathcal{H}$, а дивизор $\mathcal{H}$, имеющий хотя бы один разрыв устойчивости, называется неустойчивым.

Согласно алгоритму (2) – (5) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Дивизор первой категории $\mathcal{H}$, у которого $\operatorname{ord} \mathcal{H} \leq r_2 + 1$, всегда устойчив.*

Пусть дивизор $\mathcal{H}$ неустойчив и $[1, k-1]$, $[k, p]$ — зоны его устойчивости. Для нахождения чисел $\deg h_i$, $i = \overline{1,3}$, необходимо последовательно, известными методами решить задачу для каждой зоны устойчивости.

Теорема 5. *Пусть $r_2 + 1 < k \leq 2r_3 + r_2$ и $k - r_2 - 1 \equiv 0 \pmod 2$. Тогда:*

1) *при* $p \geq (2r_3 - r_2 - 1 + k)/2$

$$\deg h_1 = (k + r_2 - 1)/2, \quad \deg h_2 = \deg h_3 = (2p + 2r_3 + r_2 + 1 - k)/4,$$

если $(2p - 2r_3 + r_2 - k + 1)/2 \equiv 0 \pmod 2$;

$$\deg h_1 = (k + r_2 - 1)/2, \quad \deg h_2 = (2p + 2r_3 + r_2 - 1 - k)/4,$$

$$\deg h_3 = \deg h_2 + 1,$$

если $(2p - 2r_3 + r_2 - k + 1)/2 \equiv 1 \pmod 2$;

2) *при* $p < (2r_3 - r_2 - 1 + k)/2$,

$$\deg h_1 = (k + r_2 - 1)/2, \quad \deg h_2 = (2p + r_2 + 1 - k)/2, \quad \deg h_3 = r_3;$$

3) $\deg h_1 = \deg h_2 = (k + r_2 - 1)/2$, $\deg h_3 = p + r_3 + 1 - k$,

если k — разрыв ранга два;

4) – 6) *в случае $k - r_2 - 1 \equiv 1 \pmod 2$ формулируются утверждения по аналогии с 1 – 3.*

Теорема 6. *Пусть $k \geq 2r_3 - r_2 + 1$ и $k + r_2 - 2r_3 - 1 \equiv 0 \pmod 3$. Тогда:*

1) $\deg h_1 = (k + r_2 + r_3 - 1)/3$, $\deg h_2 = \deg h_3 = (3p + 2r_2 + 2r_3 + 1 - k)/6$,

если $p - k + 1 \equiv 0 \pmod 2$;

$$\deg h_1 = (k + r_2 + r_3 - 1)/3, \quad \deg h_2 = (3p + 2r_2 + 2r_3 - 2 - k)/6,$$

$$\deg h_3 = \deg h_2 + 1,$$

если $p - k + 1 \equiv 1 \pmod 2$;

2) $\deg h_1 = \deg h_2 = (k + r_2 + r_3 - 1)/3$, $\deg h_3 = (3p + r_2 + r_3 - 2k + 2)/3$, *если* k *— разрыв ранга два;*

3) – 6) *в случае* $k + r_2 - 2r_3 - 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ *и* $(k + r_2 - 2r_3 - 1) \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ *формулируются утверждения по аналогии с* 1, 2.

Доказательство теоремы 5. 1. Согласно теореме 4 полагаем $k = r_2 + 1 + j$, $j \geq 1$. Определим числа $\deg h_i^{(k-1)}(z, u)$, $i = \overline{1,3}$, используя результаты теоремы 2 при $p = r_2 + j$: $\deg h_1^{(k-1)} = \deg h_2^{(k-1)} = (2r_2 + j)/2$, $\deg h_3^{(k-1)} = r_3$ ($j \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ — по условию); $\deg h_1^{(k-1)} \equiv \deg h_1$ на k-м шаге — разрыв устойчивости ранга один.

После использования $r_2 + j$ точек в алгоритме осталось $p - (r_2 + j)$. Определим разность:

$$\deg h_3^{(k-1)} - \deg h_2^{(k-1)} = r_3 - r_2 - j/2.$$

Полагаем $p - (r_2 + j) \geq r_3 - r_2 - j/2$, откуда $p \geq r_3 + j/2$, тем самым данный порядок дивизора обеспечивает сравнивание двух оставшихся чисел в алгоритме. В зависимости от кратности $p - ((r_2 + j) + (r_3 - r_2 - j/2))$ числу 2 рассматриваются два случая: 1) $\deg h_2 = \deg h_3 = r_3 + (p - r_3 - j/2)/2$, если $p - r_3 - j/2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$; 2) $\deg h_2 = r_3 + (p - r_3 - j/2)/2$, $\deg h_3 = \deg h_2 + 1$, если $p - r_3 - j/2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$. Исключив j, $j = k - r_2 - 1$, из последних формул, получим требуемое.

2. Продолжая рассуждения предыдущего пункта, убеждаемся, что в данном случае порядок дивизора не обеспечивает сравнивание двух оставшихся в алгоритме чисел, а потому

$$\deg h_2 = \deg h_1^{(k-1)} + p - r_2 - j = (2p + r_2 + 1 - k)/2,$$

$$\deg h_3 = \deg h_3^{(k-1)} = r_3,$$

что и требовалось получить.

3. Если k — разрыв ранга два, то $\deg h_1^{(k-1)} = \deg h_1$ и $\deg h_2^{(k-1)} = \deg h_2$, а оставшиеся точки в дивизоре обеспечивают рост только $\deg h_3^{(k-1)}$:

$$\deg h_3 = \deg h_3^{(k-1)} + p - r_2 - j,$$

тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

Пусть теперь дивизор $\mathcal{H}$ терпит два разрыва устойчивости на k_1- и k_2-м шагах алгоритма $r_2 + 1 < k_1 < k_2$. Имеем три зоны устойчивости. Числа $\deg h_i^{(k_2-1)}(z, u)$, $i = \overline{1,3}$, определяются согласно теоремам 5, 6 при $p \equiv k_2 - 1$, $k \equiv k_1$. Тогда

$$\deg h_1 = \deg h_1^{(k_1-1)} = \deg h_1^{(k_2-1)}, \quad \deg h_2 = \deg h_2^{(k_2-1)},$$

$$\deg h_3 = \deg h_3^{(k_2-1)} + p - k_2 + 1.$$

Тем самым завершено рассмотрение всех случаев, касающихся вычисления показателей элементов н. б. $\{h\}$ для неустойчивого дивизора $\mathcal{H}$.

3.1. Дивизор $O_{(2)}$. Построение н. б. идеала $I(O_{(2)})$. Вычисление показателей. Пусть $O_{(2)} = (t_1, v_1^{(1)})(t_1, v_1^{(2)}) \ldots (t_s, v_s^{(1)})(t_s, v_s^{(2)})$, $\mathrm{hord}\, O_{(2)} = s$ [4].

Построим н. б. идеала $I(O_{(2)})$ функции $\{\eta\} = \{\eta_1(z,u),\ \eta_2(z,u),\ \eta_3(z,u)\}$.

Подчиним функцию (2) условию обращения в нуль в точке $(t_1, v_1^{(1)})$. После соответствующих преобразований (см. п. 2.1) функция (2) приводится к виду (3) и становится кратной $(t_1, v_1^{(1)})$.

Обозначим $\eta_1^{(1)}(z) = z - t_1$, $\eta_2^{(1)}(z,u) = \lambda_2(z,u) - \lambda_2(t_1, v_1^{(1)})$, $\eta_3^{(1)}(z,u) = \lambda_3(z,u) - \lambda_3(t_1, v_1^{(1)})$. Функции $\{\eta^{(1)}\}$ по построению образуют н. б. идеала $I(t_1, v_1^{(1)})$, функция $\eta_1^{(1)} \equiv \eta_1^{(1)}(z)$ при этом кратна 2-сопряженным точкам $(t_1, v_1^{(1)})(t_1, v_1^{(2)})$. На втором шаге алгоритма подчиним функцию

$$(c_0 + c_1 z)\,\eta_2^{(1)}(z,u) + c_2 \eta_3^{(1)}(z,u) \tag{11}$$

условию обращения в нуль в точке $(t_1, v_1^{(2)})$. Повторяя приведенную выше схему преобразований, функцию (11) приводим к виду

$$c_1(z - t_1)\,\eta_2^{(1)}(z,u) + c_2\left(\eta_3^{(1)}(z,u) - (t_1, v_1^{(2)})/\eta_2^{(1)}(t_1, v_1^{(2)})\right)\eta_2^{(1)}(z,u).$$

Обозначим

$$\eta_2^{(1)}(z) = \eta_1^{(1)}(z), \quad \eta_2^{(2)}(z,u) = (z - t_1)\,\eta_2^{(1)}(z,u),$$
$$\eta_3^{(2)}(z,u) = \eta_2^{(1)}(t_1, v_1^{(2)})\,\eta_3^{(1)}(z,u) - \eta_3^{(1)}(t_1, v_1^{(2)})\,\eta_2^{(1)}(z,u).$$

Функции $\{\eta^{(2)}\}$ по построению образуют н. б. идеала $I\big((t_1, v_1^{(2)})(t_1, v_1^{(2)})\big)$.

При реализации следующей пары 2-сопряженных точек в алгоритме участвуют функции типа (4) и (11). Строится н. б. идеала $I\big((t_1, v_1^{(1)})(t_1, v_1^{(2)})(t_2, v_2^{(1)})(t_2, v_2^{(2)})\big)$. $2k$-й $k = \overline{1, r_3 - r_2}$, шаг алгоритма приводит к следующему н. б. $\{\eta^{(2k)}\}$ идеала $I(O_{(2)}^{(k)})$, где $O_{(2)}^{(k)} = (t_1, v_1^{(1)})(t_1, v_1^{(2)}) \ldots (t_k, v_k^{(1)})(t_k, v_k^{(2)})$:

$$\eta_1^{(2k)}(z) = \eta_1^{(2k-1)}(z), \quad \eta_2^{(2k)}(z,u) = (z - t_k)\,\eta_2^{(2k-1)}(z,u),$$
$$\eta_3^{(2k)}(z,u) = \eta_2^{(2k-1)}(t_k, v_k^{(2)})\,\eta_3^{(2k-1)}(z,u) - \eta_3^{(2k-1)}(t_k, v_k^{(2)})\,\eta_2^{(2k-1)}(z,u);$$
$$\eta_1^{(2k-1)}(z) = (z - t_1)\ldots(z - t_k), \tag{12}$$
$$\eta_2^{(2k-1)}(z,u) = \eta_1^{(2k-2)}(t_k)\,\eta_2^{(2k-2)}(z,u) - \eta_2^{(2k-2)}(t_k, v_k^{(1)})\,\eta_1^{(2k-2)}(z),$$
$$\eta_3^{(2k-1)}(z,u) = \eta_1^{(2k-2)}(t_k)\,\eta_3^{(2k-2)}(z,u) - \eta_3^{(2k-2)}(t_k, v_k^{(1)})\,\eta_1^{(2k-2)}(z).$$

Здесь $\eta_1^{(0)}(z) = 1$, $\eta_2^{(0)}(z,u) = \lambda_2(z,u)$, $\eta_3^{(0)}(z,u) = \lambda_3(z,u)$. При этом $\eta_1^{(2k)}(t_{k+1}) \neq 0$ и

$$\deg \eta_1^{(2k)} < \deg \eta_2^{(2k)} \leq \deg \eta_3^{(2k)}. \tag{13}$$

Используя функции типа (4) и (11) (на нечетном шаге — (4), на четном — (11)), с учетом соотношения (13) строим н. б. $\{\eta^{(2k)}\}$ для $k = \overline{r_3 - r_2 + 1, s}$. Для $k = \overline{1, r_2 + r_3}$ $\eta_1^{(2k)} \equiv \eta_1^{(2k)}(z)$, для $k = \overline{r_2 + r_3 + 1, s}$ $\eta_1^{(2k)} \equiv \eta_1^{(2k)}(z,u)$.

Согласно алгоритму (12) на каждом $2k$-м шаге участвуют только две функции, функция $\eta_1^{(2k-1)}(z)$ при этом равна нулю в исследуемой точке и $\eta_1^{(2k-1)}(z) \notin \{\eta\}$. О дивизоре $O_{(2)}$ в этом случае говорят как о почти устойчивом, имеющем локальные разрывы устойчивости.

Следующие утверждения справедливы для почти устойчивого дивизора второй категории $O_{(2)}$:

Теорема 7. *Пусть* $s \le r_3 - r_2$. *Тогда*

$$\deg \eta_1 = s, \quad \deg \eta_2 = r_2 + s, \quad \deg \eta_3 = r_3.$$

Теорема 8. *Пусть* $r_3 - r_2 < s < r_2 + r_3$. *Тогда*

$$\deg \eta_1 = s, \quad \deg \eta_2 = \deg \eta_3 = (s + r_2 + r_3)/2,$$

если $s + r_2 - r_3 \equiv 0 \pmod 2$;

$$\deg \eta_1 = s, \quad \deg \eta_2 = (s + r_2 + r_3 - 1)/2, \quad \deg \eta_3 = \deg \eta_2 + 1,$$

если $s + r_2 - r_3 \equiv 1 \pmod 2$.

Теорема 9. *Пусть* $s > r_2 + r_3$. *Тогда*

$$\deg \eta_i = (2s + r_2 + r_3)/3, \quad i = \overline{1,3},$$

если $s - r_2 + r_3 \equiv 0 \pmod 3$;

$$\deg \eta_1 = (2s + r_2 + r_3 - 2)/3, \quad \deg \eta_2 = \deg \eta_3 = \deg \eta_1 + 1,$$

если $s - r_2 - r_3 \equiv 1 \pmod 3$,

$$\deg \eta_1 = \deg \eta_2 = (2s + r_2 + r_3 - 1)/3, \quad \deg \eta_3 = \deg \eta_2 + 1,$$

если $s - r_2 - r_3 \equiv 2 \pmod 3$.

***Доказательство теоремы* 7** следует из (12), где $2k = s$.

***Доказательство теоремы* 8.** Согласно теореме 7 на $(2(r_2 - r_3) = 2l)$-м шаге алгоритма достигается равенство $\deg \eta_2 = \deg \eta_3 = r_3$. Далее, согласно алгоритму рост показателей происходит следующим образом: на каждом нечетном шаге $\deg \eta_1$ увеличивается на единицу, на каждом четном — поочередно $\deg \eta_2$ и $\deg \eta_3$ и так до сравнивания всех трех чисел. На $(2k - 2l)$-м шаге: $\deg \eta_1 = k + l$, $\deg \eta_2 = \deg \eta_3 = r_3 + k/2$, если k — четное; $\deg \eta_1 = k + l$, $\deg \eta_2 = r_3 + [k/2]$, $\deg \eta_3 = \deg \eta_2 + 1$, если k — нечетное число. Выполнив преобразование при $k = s - l$, получим искомые формулы.

Доказательство теоремы 9 аналогично доказательству теоремы 3.

3.2. Дивизор $O_{(3)}$. Построение н. б. идеала $I(O_{(3)})$. Вычисление показателей. Пусть $O_{(3)} = (t_1, v_1^{(1)})(t_1, v_1^{(2)})(t_1, v_1^{(3)}) \ldots (t_m, v_m^{(1)})(t_m, v_m^{(2)})(t_m, v_m^{(3)})$, hord $O_{(3)} = m$ [4]. Построим н. б. идеала $I(O_{(3)})$ функции $\{\tilde{\eta}\} = \{\tilde{\eta}_1(z, u),$ $\tilde{\eta}_2(z, u),\ \tilde{\eta}_3(z, u)\}$. Первый и второй шаги алгоритма построения н. б. идеала $I(O_{(3)})$ выполним согласно п. 3.1.; получим функции $\{\tilde{\eta}^{(2)}\}$. На третьем шаге подчиним функцию

$$(c_0 + c_1 z)\tilde{\eta}_3^{(2)}(z, u) \tag{14}$$

условию обращения в нуль в точке $(t_1, v_1^{(3)})$. После известных преобразований функция (14) приводится к виду $c_1(z - t_1)\tilde{\eta}_3^{(2)}(z, u)$. Функции $\tilde{\eta}_1^{(3)}(z) = z - t_1$, $\tilde{\eta}_2^{(3)}(z, u) = (z - t_1)\tilde{\eta}_2^{(1)}(z, u)$, $\tilde{\eta}_3^{(3)}(z, u) = (z - t_1)\tilde{\eta}_3^{(2)}(z, u)$ по построению образуют н. б. идеала $I(O_{(3)}^{(k)})$, $k = 1$; $3k$-й $k = \overline{1, m}$, шаг алгоритма приводит к следующему н. б. $\{\tilde{\eta}^{(k)}\}$ идеала $I(O_{(3)}^{(k)})$, где $O_{(3)}^{(k)} = (t_1, v_1^{(1)})(t_1, v_1^{(2)})(t_1, v_1^{(3)}) \ldots$ $\ldots (t_k, v_k^{(1)})(t_k, v_k^{(2)})(t_k, v_k^{(3)})$:

$$\tilde{\eta}_1^{(k)} = (z-t_k)\tilde{\eta}_1^{(k-1)}(z), \quad \tilde{\eta}_2^{(k)}(z,u) = (z-t_k)\tilde{\eta}_2^{(k-1)}(z,u),$$
$$\tilde{\eta}_3^{(k)}(z,u) = (z-t_k)\tilde{\eta}_3^{(k-1)}(z,u), \tag{15}$$

$\left\{\tilde{\eta}_i^{(0)}\right\}$, $i=\overline{1,3}$, взят из (12). Для показателей элементов н. б. $\{\tilde{\eta}\}$ идеала $I(O_{(3)})$ справедлива следующая теорема.

Теорема 10. $\deg\tilde{\eta}_1 = m$, $\deg\tilde{\eta}_2 = r_2 + m$, $\deg\tilde{\eta}_3 = r_3 + m$.

Доказательство теоремы следует из (15), где $k = m$.

Дивизор $O_{(3)}$ является почти устойчивым дивизором, как претерпевающий локальные разрывы на каждом $(3k-1)$-, $3k$-шагах алгоритма.

Дивизор O — второй категории, содержащий устойчивый дивизор первой категории $\mathcal{H}$ и почти устойчивые дивизоры $O_{(2)}$ и $O_{(3)}$, является почти устойчивым.

3.3. Дивизор O — второй категории, почти устойчивый случай. Построение н. б. идеала $I(O)$ проводится поэтапно. Построим вначале н. б. идеала $I(O_{(3)})$ — функции $\{\tilde{\eta}\}$ — согласно алгоритму (15), далее н. б. идеала $I(O_{(2)}O_{(3)})$ — функции $\{\eta\}$ — согласно методу, изложенному в п. 3.1, где роль функций 1, $\lambda_2(z,u)$, $\lambda_3(z,u)$ играют соответственно функции $\tilde{\eta}_i(z,u)$, $i=\overline{1,3}$, наконец, н. б. идеала $I(O)$ — функции $\{\psi\}$, — согласно методу, изложенному в п. 2.1; исходными базисными функциями являются соответственно функции $\eta_i(z,u)$, $i=\overline{1,3}$.

Заметим, что этапы построения н. б. идеала $I(O)$ могут быть произвольными, ибо все н. б. идеала $I(O)$ имеют одну и ту же систему показателей [1].

Вычислим показатели искомого н. б. $\{\psi\}$.

Согласно теореме 10

$$\deg\tilde{\eta}_1 = m, \quad \deg\tilde{\eta}_2 = r_2 + m, \quad \deg\tilde{\eta}_3 = r_3 + m.$$

И пусть $s \le r_3 - r_2$. Тогда из теоремы 7

$$\deg\eta_1 = m + s, \quad \deg\eta_2 = r_2 + m + s, \quad \deg\eta_3 = r_3 + m$$

и в случае $\operatorname{ord}\mathcal{H} \le r_2$ из теоремы 1

$$\deg\psi_1 = \operatorname{hord} O, \quad \deg\psi_2 = r_2 + \operatorname{hord} O_{(3)} + \operatorname{hord} O_{(2)},$$
$$\deg\psi_3 = r_3 + \operatorname{hord} O_{(3)}.$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

3.4. Дивизор O — второй категории, неустойчивый случай. Пусть теперь на k-м шаге алгоритма построения н. б. идеала $I(O_{(2)})$ $\tilde{\eta}_1^{(k-1)}\left(t_k, v_k^{(i)}\right) = 0$, $i=\overline{1,2}$, и $\tilde{\eta}_1^{(k-1)}(z,u) \in \{\eta\}$. Это значит, что дивизор $O_{(2)}$ терпит базисный разрыв устойчивости на k-м шаге алгоритма и является неустойчивым. Дивизор $O_{(2)}$ является неустойчивым, имеет две зоны устойчивости: $[1, k-1]$, $[k, s]$, иначе при наличии двух базисных разрывов нарушается свойство н. б. $\{\eta\}$: $\sum_{i=1}^{3}\deg\eta_i = \operatorname{ord} O_{(2)} + V$, где $V = r_2 + r_3$ [1].

Согласно алгоритму (2) справедливы следующие теоремы.

Теорема 11. *Дивизор второй категории* $O_{(2)}$, *у которого* $\operatorname{hord} O_{(2)} \le r_2 + r_3 + 1$, *всегда почти устойчив.*

Теорема 12. *Пусть* $O_{(2)}$ — *неустойчивый дивизор и на* k-*м шаге происходит базисный разрыв устойчивости.*

Тогда:

$$\deg\eta_1 = (2k + r_2 + r_3 - 2)/3, \quad \deg\eta_2 = \deg\eta_3 = (3s + r_2 + r_3 + 1 - k)/3,$$

если $k - r_2 - r_3 - 1 \equiv 0 \pmod 3$;

$$\deg\eta_1 = (2k + r_2 + r_3 - 4)/3, \quad \deg\eta_2 = \deg\eta_3 = (3s + r_2 + r_3 + 2 - k)/3,$$

если $k - r_2 - r_3 - 1 \equiv 1 \pmod 3$;

$$\deg\eta_1 = (2k + r_2 + r_3 - 3)/3, \quad \deg\eta_2 = (3s + r_2 + r_3 - k)/3,$$

$$\deg\eta_3 = \deg\eta_2 + 1,$$

если $k - r_2 - r_3 - 1 \equiv 2 \pmod 3$.

Доказательство. Согласно теореме 11 $k = r_2 + r_3 + 1 + j$, $j \geq 1$. Используя результаты теоремы 9 при $k = r_2 + r_3 + j$, имеем $\deg\eta_i^{(k-1)} = (2(r_2 + r_3 + j) + r_2 + r_3)/3$, $i = \overline{1,3}$, если $j \equiv 0 \pmod 3$. Функция $\eta_1^{(k-1)} \equiv \eta_1$, $\deg\eta_1^{(k-1)} = \deg\eta_1$, $\deg\eta_2 = \deg\eta_3 = \deg\eta_1^{(k-1)} + s - r_2 - r_3 - j$. Исключая j из последних формул: $j = k - r_2 - r_3 - 1$, получаем формулы для первого случая. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

В общем случае дивизор O — второй категории — неустойчив, если неустойчив хотя бы один из дивизоров $O_{(2)}$ или $\mathcal{H}$. Дивизор O может иметь от двух до четырех зон устойчивости. Показатели н. б. $\{\psi\}$ определяются согласно теоремам 10, 12 и 5, 6.

Построение н. б. идеала $I(\Omega)$, где Ω — дивизор третьей категории, не имеет принципиальных отличий от рассмотренных случаев, что позволяет проведенное исследование считать завершенным.

1. *Круглов В. Е.* Об алгебраических функциях, кратных заданному дивизору // Докл. АН СССР. – 1991. – **321**, №1. – С. 11–13.
2. *Колмакова Л. Н.* О сингулярном интегральном уравнении с многозначным на гиперэллиптической римановой поверхности ядром // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 5. – С. 630–633.
3. *Зверович Э. И., Померанцева Л. И.* Задача Римана для n пар функций с матрицами подстановочного типа // Докл. АН СССР. – 1974. – **217**, № 1. – С. 20–23.
4. *Круглов В. Е.* О числе линейно независимых функций, кратных заданному дивизору, содержащему в себе сопряжение точки римановой поверхности алгебраической функции // Изв. вузов. – 1975. – № 2 (153). – С. 119–122.

Получено 16.09.93