УДК 519.21

І. К. Мацак, канд. фіз.-мат. наук (Технол. ін-т лег. пром-сті, Київ)

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ МАКСИМУМУ ГАУССІВСЬКИХ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН У ПРОСТОРІ C

The well known asymptotic equality for the maximum of real Gaussian random variables is generalized to the case of random variables with the values taken in the space C.

Узагальнюється відома асимптотична рівність для максимуму дійсних гауссівських випадкових величин на випадкові величини зі значеннями у просторі C.

Дослідженню асимптотичних властивостей максимуму незалежних випадкових величин (н. в. в.) на дійсній прямій присвячена значна кількість робіт (див. [1, 2] і бібліографію).

Нехай $(\xi_n)_1^\infty$ — послідовність стандартних гауссівських н. в. в. в R^1, $\mathbf{M}\xi_n = 0$, $\mathbf{M}\xi_n^2 = 1$. Тоді [1, с. 203] справедлива рівність

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n \Rightarrow \infty} (2\ln(n))^{-1/2} \max_{1 \le k \le n} \xi_k = 1 \right) = 1. \tag{1}$$

Подібні задачі можна ставити і в деяких нескінченновимірних просторах. У даній роботі узагальнюється рівність (1) на н. в. в. зі значеннями в просторі C.

Позначимо через $(X_n = X_n(t))_1^\infty$ послідовність гауссівських н. в. в. зі значеннями у просторі $C = C_{[0,1]}$ неперервних функцій на $[0,1]$, $\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ — норма в C, і для всіх $n \ge 1$ $\mathbf{M}X_n(t) = 0$, $\mathbf{M}X_n(t)X_n(s) = R(t,s)$, $\sigma^2(t) = R(t,t)$. Тобто $X_n(t)$, $t \in [0,1]$, — це однаково розподілені гауссівські випадкові процеси з кореляційною функцією $R(t,s)$. Звичайно в наших умовах $\sigma = \sigma(t) \in C$.

Покладемо

$$Z_n = Z_n(t) = \max_{1\le k\le n} X_k(t),$$

$$U_n = U_n(t) = (2\ln(n))^{-1/2} Z_n(t), \quad n \ge 2,$$

$$\omega(x,\delta) = \sup_{|t-s|\le\delta} |x(t) - x(s)|,$$

де $\omega(x,\delta)$ — це модуль неперервності функції $x(t)$ у просторі C.

Теорема. *Справедлива рівність*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\Rightarrow\infty} \|U_n(t) - \sigma(t)\| = 0 \right) = 1. \tag{2}$$

У доведені теореми будуть використані наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо* $X = X(t)$ *— гауссівська в. в. у просторі* C,

$$d(X,\delta) = \sup_{|t-s|\le\delta} (\mathbf{M}|X(t) - X(s)|^2)^{1/2}$$

та r *— число таке, що* $\mathbf{P}(\omega(X,\delta) > r) \le 1/2$, *то для будь-якого* $C > 0$

$$\mathbf{P}(\omega(X,\delta) > C) \le 1 - \Phi\left(\frac{C-r}{d(X,\delta)}\right),$$

де

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-y^2/2\right) dy.$$

Лему 1 одержуємо застосуванням відомого результату Судакова і Цірельсона [3, 4] до простору $\boldsymbol{C}(T_\delta)$, $T_\delta = \{(t,s) \in [0,1] \times [0,1] : |t-s| \le \delta\}$.

Лема 2. *Нехай* $(a_k)_1^n$, $(b_k)_1^n$ *— дві послідовності дійсних чисел. Тоді виконується нерівність*

$$\left| \max_{1 \le k \le n} a_k - \max_{1 \le k \le n} b_k \right| \le \max_{1 \le k \le n} |a_k - b_k|.$$

Лема 2 має элементарний характер і її доведення не наводиться.

***Доведення** теореми.* Зафіксуємо деяке число $\varepsilon > 0$. Далі розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ на m рівних відрізків точками $t_0, t_1, \ldots, t_m$, $t_k - t_{k-1} = 1/m$ і позначимо

$$V_n = \max_{0 \le k \le m} |U_n(t_k) - \sigma(t_k)|.$$

Тоді одержуємо

$$\| U_n(t) - \sigma(t) \| \le V_n + \omega(\sigma, 1/m) + \omega(U_n, 1/m). \tag{3}$$

Оскільки функція $\sigma(t)$ неперервна, то існує число $m_1(\varepsilon)$ таке, що для $m \ge m_1(\varepsilon)$

$$\omega(\sigma, 1/m) \le \varepsilon. \tag{4}$$

З рівності (1) для будь-якого фіксованого m маємо

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n \Rightarrow \infty} V_n = 0 \right) = 1. \tag{5}$$

Щоб оцінити останній доданок у правій частині нерівності (3), скористаємося лемою 2 :

$$\omega(U_n, \delta) = (2\ln(n))^{-1/2} \sup_{|t-s| \le \delta} \left| \max_{1 \le k \le n} X_k(t) - \max_{1 \le k \le n} X_k(s) \right| \le$$

$$\le (2\ln(n))^{-1/2} \sup_{|t-s| \le \delta} \max_{1 \le k \le n} |X_k(t) - X_k(s)| \le$$

$$\le (2\ln(n))^{-1/2} \max_{1 \le k \le n} \omega(X_k, \delta).$$

Одержуємо

$$\mathbf{P}(\omega(U_n, \delta) \ge \varepsilon) \le \mathbf{P}\left(\max_{1 \le k \le n} \omega(X_k, \delta) \ge (2\ln(n))^{1/2} \varepsilon \right) \le$$

$$\le n\, \mathbf{P}(\omega(X_1, \delta) \ge (2\ln(n))^{1/2} \varepsilon). \tag{6}$$

Оскільки майже напевне $\omega(X_1, \delta) \Rightarrow 0$ при $\delta \Rightarrow 0$, то неважко побудувати послідовність r_δ таку, що

$$\mathrm{P}(\omega(X_1, \delta) \ge r_\delta) \le 1/2 \tag{7}$$

та $r_\delta \Rightarrow 0$ при $\delta \Rightarrow 0$.

З леми 1 маємо

$$\mathbf{P}(\omega(X_1,\delta) \geq (2\ln(n))^{1/2}\varepsilon) \leq 1 - \Phi\left(\frac{2\ln(n)^{1/2}\varepsilon - r_\delta}{d(X_1,\delta)}\right).$$

Звідси та з співвідношень (6), (7) для фіксованого $\varepsilon > 0$, $n \geq 2$ і досить малого $\delta > 0$ такого, що $r_\delta \leq (2^{-1}\ln(n))^{1/2}\varepsilon$, випливає

$$\mathbf{P}(\omega(U_n,\delta) \geq \varepsilon) \leq n\left(1 - \Phi\left(\frac{(2^{-1}\ln(n))^{1/2}\varepsilon}{d(X_1,\delta)}\right)\right).$$

Далі до останньої нерівності застосуємо відому оцінку [5, с. 183]

$$1 - \Phi(y) \leq (2\pi y^2)^{-1/2}\exp(-y^2/2).$$

Одержуємо

$$\mathbf{P}(\omega(U_n,\delta) \geq \varepsilon) \leq$$

$$\leq n d(X_1,\delta)(\pi\varepsilon^2\ln(n))^{-1/2}\exp\left(\frac{-\varepsilon^2\ln(n)}{2d(X_1,\delta)}\right)^2 \leq$$

$$\leq (\pi\varepsilon^2\ln(n))^{-1/2} d(X_1,\delta)\, n^{-\varepsilon^2/(2d(X_1,\delta))^2+1}. \tag{8}$$

Оскільки для $\delta \Rightarrow 0$ $d(X_1,\delta) \Rightarrow 0$, то з нерівності (8) випливає, що при досить великих $m \geq m_2(\varepsilon)$ буде збігатися ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\omega(U_n, 1/m) \geq \varepsilon) < \infty.$$

За лемою Бореля – Кантеллі при $m \geq m_2(\varepsilon)$ маємо

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\Rightarrow\infty} \omega(U_n, 1/m) \leq \varepsilon\right) = 1.$$

З останньої рівності та співвідношень (3)–(5) одержуємо

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\Rightarrow\infty} \|U_n(t) - \sigma(t)\| \leq 2\varepsilon\right) = 1. \tag{9}$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ — довільне число, то (9) $\Rightarrow$ (2), що завершує доведення теореми.

1. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
2. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392 с.
3. *Судаков В. Н., Цирельсон Б. С.* Экстремальные свойства полупространств для сферических инвариантных мер // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1974. – **41**. – С. 14–24.
4. *Ибрагимов И. А.* Об условиях принадлежности гауссовских однородных полей классам $\mathbf{H}_p^r$ // Там же. – 1990. – **184**. – С. 126–143.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 499 с.

Одержано 10.12.93