УДК 519. 21

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук,
Л. І. Ясинська, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Юрченко, асп. (Чернів. ун-т)

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ ОПЕРАТОРАМИ

The conditions of asymptotic behavior of the trivial solutions of the stochastic differential equations systems with random operators are obtained.

Одержані умови асимптотичної поведінки тривіального розв'язку систем стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами.

Вперше згадка про стохастичні диференціальні рівняння в випадковими операторами зустрічається в роботах [1–3]. У даній роботі узагальнюються результати [2–4].

1. Постановка задачі. Нехай задано імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ та потік σ-алгебр $\{\mathfrak{N}_t, t \geq 0\}$, $\mathfrak{N}_t \subset \mathcal{F}$, на якому розглядається система стохастичних диференціальних рівнянь

$$dx(t) = a(t, x_t)dx + b(t, A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t))\, dw_0(t) +$$
$$+ \int_{\mathbb{U}} c(t, A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u)\, \tilde{\nu}_0(du, dt), \tag{1}$$

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0], \tag{2}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n; x_t := \{x(t+\theta), \theta \in [-r, 0]\}$, $\mathbb{D}_n([-r, 0])$ — простір Скорохода неперервних справа функцій $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, які мають лівосторонні границі (НПЛГ) з нормою [5]

$$\| \varphi(\theta) \|^2 := \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|^2,$$

$w_0(t)$ — n-вимірний вінерівський процес; $\tilde{\nu}_0(du, dt) = \nu_0(du, dt)$ — центрована пуассонова міра [6].

Опишемо задання коефіцієнтів рівняння (1).

1. $A_i(\cdot), B_i(\cdot), D_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, — оператори

$$A_i(x_t) := \int_{-r}^{0} x(t+\theta)\, d\beta_i(\theta);$$

$$B_i(x_t) := \int_{-r}^{0} \alpha_i(\theta) x(t+\theta)\, dw_i(\theta);$$

$$D_i(x_t) := \int_{-r}^{0} \int_{\mathbb{U}} \gamma_i(\theta, u) x(t+\theta)\, \tilde{\nu}_i(du, d\theta), \tag{3}$$

де $\beta_i(t)$ — функції обмеженої варіації; $\alpha_i(t)$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{N}_{\mathbb{R}_+}$ вимірні локально обмежені по t; $\gamma_i(t, u)$: $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ вимірні відносно $\mathfrak{N}_{\mathbb{R}_+} \times \mathcal{U}$ локально обмежені по t та

$$\int_{\mathbb{U}} |\gamma_i(t,u)|^2 \Pi_i(du) < \infty;$$

2. $\{ w_i(t), t \geq 0, i = 1, 2 \}$ — одновимірні вінерівські процеси; $\{ \tilde{\nu}_i(du, dt), t \geq 0, u \in \mathbb{U}, i = 1, 2 \}$ — центровані пуассонові міри та початковий випадковий процес $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, які незалежні між собою.

3. Функція $a: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n$ вимірна за сукупністю змінних та локально обмежена по t.

4. Функція $b: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ вимірна та локально обмежена по t.

Стохастичні інтеграли

$$\int_{-r}^{0} \alpha_i(\theta) x(t+\theta)\, dw_i(\theta), \quad i = 1, 2, \qquad \int_{0}^{t} b(s, A_1(x_s), B_1(x_s), D_1(x_s))\, dw_0(s)$$

існують для будь-якого локально обмеженого процесу $\{ x(t), t \geq -r \}$, узгодженого і вимірного відносно потоку σ-алгебр $\{ \mathfrak{I}_t \}$, якщо вінерівські процеси $\{ w_i(t), i = 0, 1, 2 \}$ також узгоджені з цим потоком [7].

Задано вимірний простір $(\mathbb{U}, \mathcal{U})$ та функцію $c: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ вимірну відносно $\mathfrak{I}_{\mathbb{R}_+} \times \mathfrak{I}_{\mathbb{R}^n} \times \mathfrak{I}_{\mathbb{R}^n} \times \mathfrak{I}_{\mathbb{R}^n} \times \mathcal{U}$. Стохастичні інтеграли

$$\int_{-r}^{0} \int_{\mathbb{U}} \gamma_i(s,u) x(t+s)\, \tilde{\nu}_i(du, ds), \quad i = 1, 2;$$

$$\int_{0}^{t} \int_{\mathbb{U}} c(s, A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u)\, \tilde{\nu}_0(du, ds)$$

визначені для будь-якого локально обмеженого вимірного процесу $\{ x(t), t \geq 0 \}$, якщо він узгоджений та прогресивно вимірний відносно потоку $\{ \mathfrak{I}_t \}$, з яким узгоджені міри $\{ \tilde{\nu}_i(du, dt), t \geq 0, u \in \mathbb{U} \}$. Таким чином, коефіцієнти a, b, c задані на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, де визначені $\{ w_i, \tilde{\nu}_i, i = 0, 1, 2 \}$. Для того щоб мати стохастичні диференціали та інтеграли, необхідно задати на цьому імовірнісному просторі потік σ-алгебр $\{ \mathfrak{I}_t \}$, з яким узгоджені вінерівські процеси та випадкові міри [6].

Під сильним розв'язком рівняння (1) розуміємо прогресивно вимірні та $\mathfrak{I}_t$-узгоджені процеси $\{ x(t), t \geq 0 \}$, для яких майже скрізь виконується рівність

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t a(s, x_s)\, ds + \int_0^t b(s, A_1(x_s), B_1(x_s), D_1(x_s))\, dw_0(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c(s, A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u)\, \tilde{\nu}_0(du, ds), \tag{4}$$

а при $t \in [-r, 0]$ визначаються (2).

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1), (2) *задовольняють умови:*

1) $a(t, 0) = 0$; $b(t, 0, 0, 0) \equiv 0$, $c(t, 0, 0, 0, u) \equiv 0$ $\forall t \geq 0$, $u \in \mathbb{U}$;

2) *для довільного $l > 0$ існує стала $L_l > 0$ така, що виконуються умови Ліпшиця*

$$|a(s,\varphi)-a(s,\psi)|^2 \le L_l(\|\varphi-\psi\|_s)^2 \quad \forall\, \varphi,\psi \in \mathbb{D}_n([-r,0]);$$

$$\|\varphi\|_s := \sup_{-r\le s\le t} |\varphi(\theta)|,$$

$$|b(s,x_1,y_1,z_1)-b(s,x_2,y_2,z_2)|^2 +$$
$$+\int_{\mathbb{U}} |c(s,x_1,y_1,z_1,u)-c(s,x_2,y_2,z_2,u)|^2\Pi(du) \le$$
$$\le L_l(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2+|z_1-z_2|^2)$$

при $s\le t$, *та* $\|\varphi\|_s \le l$;

$$\|\psi\|_s \le l; \quad |x_i|\le l; \quad |y_i|\le l; \quad |z_i|\le l; \quad i=1,2, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}^n;$$

3) *рівновимірної обмеженості по* t *при деякому* $l>0$:

$$|a(t,\varphi)|^2 < l(1+\|\varphi\|_s)^2;$$

$$|b(t,x,y,z)|^2+\int_{\mathbb{U}}|c(t,x,y,z,u)|^2\Pi(du) \le$$
$$\le l(1+|x|^2+|y|^2+|z|^2), \quad \{x,y,z\}\subset \mathbb{R}^n.$$

Якщо $x(0)=\varphi(0)$ *не залежить від сукупності величин* $\{w_i(s), \tilde{\nu}_i(du,ds), i=0,1,2\}$, *то існує єдиний сильний та* $\mathfrak{N}_t$*-вимірний розв'язок задачі* (1)–(2). *Через* $\mathfrak{N}_t$ *позначена* σ*-алгебра, породжена величинами* $x(0)$ *при* $\tilde{\nu}_i(du,ds)$, $w_i(s)$ *при* $s\le t$.

Доведення аналогічне доведенню теорем [7, 8].

Далі розглянемо поведінку на нескінченності другого моменту розв'язку задачі (1), (2) в стаціонарному випадку.

2. Асимптотична стійкість у середньому квадратичному розв'язків стохастичних систем з випадковими операторами. Розглянемо стаціонарну задачу

$$dx(t) = a(x_t)dx + b(A_1(x_t),B_1(x_t),D_1(x_t))\,dw_0(t) +$$
$$+\int_{\mathbb{U}} c(A_2(x_t),B_2(x_t),D_2(x_t),u)\,\tilde{\nu}_0(du,dt), \tag{5}$$

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta\in[-r,0], \tag{6}$$

де

$$x(t)\in\mathbb{R}^n; \quad x_t := \{x(t+\theta), \theta\in[-r,0]\},$$

$\varphi(\theta)$ — невипадкова функція; $a:\mathbb{D}_0([-r,0])\to\mathbb{R}^n$ — лінійний оператор;

$$b:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n; \quad c:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}^n$$

— лінійні функції, аргументи яких є лінійними операторами (3). Нехай виконуються умови теореми 1, тоді існує єдиний сильний розв'язок задачі (5), (6) з точністю до стохастичної еквівалентності.

Позначимо через $H(t,\tau)$ матрицю Коші, тобто при $t>\tau$ матриця $H(t,\tau)$ є розв'язком детермінованого диференціально-функціонального рівняння

$$dy(t) = a(x_t)dx \tag{7}$$

при умові

$$H(t,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < \tau, \\ I & \text{при} \quad t = \tau, \end{cases}$$

де I — одинична матриця.

У стаціонарному випадку матриця Коші може бути записана у вигляді [7]

$$H(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(t-\tau)} \Lambda^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \tag{8}$$

де $\Lambda(\lambda) = \lambda I - a(e^{\lambda\theta})$, а Γ — контур, що охоплює всі корені квазіполінома $\det \Lambda(\lambda) = 0$.

Тоді розв'язок задачі (5), (6) можна записати [4] у вигляді

$$x(t) = y(t) + \int_0^t H(t-\tau) b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t))\, dw_0(\tau) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} H(t-\tau) c(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u)\, \tilde{\nu}_0(du, dt), \tag{9}$$

де $y(t)$ — розв'язок рівняння (7) за детермінованою початковою функцією $\varphi(\theta)$.

Позначимо через $r(\mathbb{B})$ спектральний радіус матриці $\mathbb{B}$.

Під простором $\mathfrak{M}_\infty$ будемо розуміти простір випадкових функцій $f_1(t), f_2(t, u) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ таких, що вони $\mathfrak{N}_t$-вимірні при $t \geq 0$ і для них існують інтеграли

$$\int_0^\infty M\{|f_1(t)|^2\}\, dt < \infty, \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} M\{|f_2(t,u)|^2\}\, \Pi(du, dt) < \infty.$$

Теорема 2. *Нехай власні значення твірного оператора півгрупи розв'язків рівняння* (7) *лежать у лівій півплощині* $\operatorname{Re}\lambda < 0$. *Будь-які лінійні оператори на розв'язках задачі* (5), (6) *вигляду*

$$F(x_t) := F(A_i(x_t), B_i(x_t), D_i(x_t));$$

$$\Phi(x_t) := \Phi(A_i(x_t), B_i(x_t), D_i(x_t), u) \quad \forall\, u \in \mathbb{U},\ t \geq 0,\ i = 1, 2,$$

належать простору $\mathfrak{M}_\infty$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$r(\mathbb{B}) < 1, \tag{10}$$

де матриця $\mathbb{B}$ *має вигляд*

$$\mathbb{B} := \int_0^\infty b\big(A_1^2(H_t), B_1^2(H_t), D_1^2(H_t)\big) dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} c\big(A_2^2(H_t), B_2^2(H_t), D_2^2(H_t), u\big) \Pi(du, dt), \tag{11}$$

а $H_t := H(t+\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$;

$$A_i^2(H_t) = \left[\int_{-r}^0 H_t\, d\beta_i(\theta)\right]^2; \tag{11.1}$$

$$B_i^2(H_t) = \int_{-r}^{0} [f_i(\theta)]^2 H_t^2 \, d\theta; \tag{11.2}$$

$$D_i^2(H_t) = \int_{-r}^{0} \int_{\mathbf{U}} [\gamma_i(\theta, u)]^2 H_\tau^2 \Pi_i(du) \, d\theta, \quad i = 1, 2. \tag{11.3}$$

Доведення. Замінимо в (9) $x(t)$ на $x(t+\theta)$ та застосуємо лінійні оператори $b(\cdot,\cdot,\cdot)$, $c(\cdot,\cdot,\cdot,u)$. В результаті маємо

$$b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)) = b(A_1(y_t), B_1(y_t), D_1(y_t)) +$$

$$+ \int_0^t b(A_1(H_{t-\tau}), B_1(H_{t-\tau}), D_1(H_{t-\tau}))\, b(A_1(x_\tau), B_1(x_\tau), D_1(x_\tau))\, dw_0(\tau) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbf{U}} b(A_1(H_{t-\tau}), B_1(H_{t-\tau}), D_1(H_{t-\tau}))\, c(A_2(x_\tau), B_2(x_\tau), D_2(x_\tau), u)\, \tilde{\nu}_0(du, d\tau),$$

$$c(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u) = c(A_2(y_t), B_2(y_t), D_2(y_t), u) +$$

$$+ \int_0^t c(A_2(H_{t-\tau}), B_2(H_{t-\tau}), D_2(H_{t-\tau}), u)\, b(A_1(x_\tau), B_1(x_\tau), D_1(x_\tau))\, dw(\tau) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbf{U}} c(A_2(H_{t-\tau}), B_2(H_{t-\tau}), D_2(H_{t-\tau}), u)\, c(A_2(x_\tau), B_2(x_\tau), D_2(x_\tau), u)\, \tilde{\nu}(du, d\tau).$$

Піднесемо до квадрату ліву та праву частини одержаних рівнянь та застосуємо операцію математичного сподівання; використовуючи властивості стохастичних інтегралів [6], одержимо

$$\mu_0(t) = [b^2(y_t)] + \int_0^t b^2(H_{t-\tau}) \mu_b(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbf{U}} b^2(H_{t-\tau}) \mu_c(\tau, u) \Pi(du)\, d\tau, \tag{12}$$

$$\mu_c(t, u) = c^2(y_t, u) + \int_0^t c^2(H_{t-\tau}, u) \mu_c(\tau, u)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbf{U}} c^2(H_{t-\tau}, u) \mu_c(\tau, u) \Pi(du)\, d\tau, \tag{13}$$

де

$$b^2(y_t) := b\big(A_1^2(y_t), B_1^2(y_t), D_1^2(y_t)\big);$$

$$c^2(y_t, u) := c\big(A_2^2(y_t), B_2^2(y_t), D_2^2(y_t), u\big);$$

$$b^2(H_t) := b\big(A_1^2(H_t), B_1^2(H_t), D_1^2(H_t)\big);$$

$$c^2(H_t, u) := c\big(A_2^2(H_t), B_2^2(H_t), D_2^2(H_t), u\big);$$

$$\mu_0(t) := M\{b^2(x_t)\}; \quad \mu_c(t, u) := M\{c^2(x_t, u)\}.$$

Проінтегруємо рівняння (12), (13) по t від 0 до ∞ та поміняємо порядок інтегрування (причому друге рівняння спочатку проінтегровано по $u \in \mathbb{U}$); в результаті маємо

$$\int_0^\infty \mu_b(\tau)\,dt = \int_0^\infty [b(y_t)]^2\,dt + \int_0^\infty [b(H_t)]^2\,dt \int_0^\infty \mu_b(\tau)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty [b(H_t)]^2\,dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\Pi(du)\,dt; \tag{14}$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\Pi(du)\,dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} [c(y_t,u)]^2\Pi(du)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} [c(H_t,u)]^2\Pi(du)\,dt + \int_0^\infty \mu_b(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} [c(H_t,u)]^2\Pi(du)\,dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\Pi(du)\,dt; \tag{15}$$

де

$$b(y_t) := b(A_1(y_t), B_1(y_t), D_1(y_t));$$

$$c(y_t,u) := c(A_2(y_t), B_2(y_t), D_2(y_t), u);$$

$$b(H_t) := b(A_1(H_t), B_1(H_t), D_1(H_t));$$

$$c(H_t,u) := c(A_2(H_t), B_2(H_t), D_2(H_t), u).$$

Якщо вектор $y(t)$ — це стовпчик матриці $H(t)$, (позначимо їх відповідно $y_j(t)$, $j=\overline{1,n}$), то аналогічно (14) та (15) одержимо

$$\int_0^\infty \mu_{b_j}(t)\,dt = \int_0^\infty [b(y_{jt})]^2\,dt + \int_0^\infty [b(H_t)]^2\,dt \int_0^\infty \mu_{b_j}(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty [b(H_t)]^2\,dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_{c_j}(t,u)\Pi(du)\,dt; \tag{16}$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_{c_j}(t,u)\Pi(du)\,dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} [c(y_{jt},u)]^2\Pi(du)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} [c(H_t,u)]^2\Pi(du)\,dt + \int_0^\infty \mu_{b_j}(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} [c(H_t,u)]^2\Pi(du)\,dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_{c_j}(t,u)\Pi(du)\,dt. \tag{17}$$

Згідно з відповідними позначеннями перепишемо (16) та (17) у вигляді

$$M_j = N_j + \mathbb{B}\, M_j\,. \tag{18}$$

де

$$M_j = M_j^{(1)} + M_j^{(2)}; \quad N_j = N_j^{(1)} + N_j^{(2)};$$

$$N_j^{(1)} = \int_0^\infty b^2(y_j(t+\theta))\,dt; \quad N_j^{(2)} = \int_0^\infty \int_{\mathfrak{U}} c^2(y_j(t+\theta), u)\Pi(du)\,dt,$$

$$M_j^{(1)} = \int_0^\infty \mu_{b_j}(t)\,dt; \quad M_j^{(2)} = \int_0^\infty \int_{\mathfrak{U}} \mu_{c_j}(t, u)\Pi(du)\,dt.$$

Очевидно, вектор N_j співпадає з j-м стовпчиком матриці $\mathbb{B}$, причому

$$\mathbb{B} = \{N_1, N_2, \ldots, N_n\}, \quad M = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Тоді з (18) одержуємо матричне рівняння

$$M = \mathbb{B} + \mathbb{B}M. \tag{19}$$

Необхідність доведемо від супротивного. Оскільки матриця $\mathbb{B}$ складена з невід'ємних елементів, то [9] $\lambda_{\mathbb{B}} > 0$. Нехай $\lambda_0 \ge 1$. У випадку $\lambda_0 = 1$ доведемо, що рівняння (19) має необмежений розв'язок. Нехай це не так, тоді обмежений розв'язок має і рівняння

$$\mathbb{X} = b + \mathbb{B}X, \tag{20}$$

де $X = Mb$ — власний вектор матриці $\mathbb{B}$, який відповідає власному значенню $\lambda_0 = 1$. У підпросторі, який породжує власний вектор d, рівняння (20) має вигляд $y + b = y$, що не має розв'язку за будь-яких y $(|y| < \infty)$. З одержаної суперечності випливає, що при $\lambda_0 = 1$ знайдуться початкові функції $\varphi(\theta)$, для яких

$$b(x_t) := b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)) \notin \mathfrak{M}_\infty$$

та

$$c(x_t, u) := c(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u) \notin \mathfrak{M}_\infty,$$

а значить, $F(x_t) \notin \mathfrak{M}_\infty$, $\Phi(x_t) \notin \mathfrak{M}_\infty$. Суперечність.

У випадку $\lambda_0 > 1$ доведемо, що рівняння (19) має необмежений розв'язок, при будь-якій достатньо малій за нормою початковій функції. Нехай це не так, тоді рівняння (20) має необмежений розв'язок

$$\mathbb{X} = \frac{b}{1 - \lambda_0},$$

координати якого не додатні.

Для доведення *достатності* до системи (12), (13) застосуємо метод послідовних наближень знаходження розв'язків [6].

Аналогічно з матричним рівнянням (19) легко записати $M = \mathbb{B}M + N$, де матриця-вектор має вигляд

$$N = \int_0^\infty b^2(y_t)\,dt + \int_0^\infty \int_{\mathfrak{U}} c^2(y_t, u)\Pi(du)\,dt.$$

Побудуємо послідовні наближення

$$M_n = \mathbb{B}M_{n-1} + N, \quad n = \overline{1,3},$$

з $M_0 = 0$. Звідси одержимо, що $\mu_{b_n}(t), \mu_c(t, u) \in L_1(0, \infty)$.

Дійсно, якщо покласти $M_0 = 0$, то

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{B}^k N.$$

Відомо [9], що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\mathbb{B}^n\|} = \max_i \lambda_i < 1.$$

Тоді для достатньо великих n_0 $(n \ge n_0)$ маємо

$$\sqrt[n]{\|\mathbb{B}^n\|} < (q+\varepsilon) < 1, \quad \|\mathbb{B}^n\| < (q+\varepsilon)^n.$$

Таким чином, при $n \ge n_0$

$$\|M_n\| \le \sum_{k=0}^{n-1} g^k \|N\|,$$

де $0 < g = q + \varepsilon < 1$, звідки

$$\lim_{n\to\infty} \|M_n\| < \frac{\|N\|}{g-1}.$$

Тобто довели, що

$$b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)) \in \mathfrak{M}_\infty,$$

$$c(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u) \in \mathfrak{M}_\infty.$$

Якщо застосувати до (9) оператори $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot, u)$ та пророблти відповідні перетворювання, що привели до (12), (13), то одержимо

$$\int_0^\infty \mu_F(t)dt = \int_0^\infty F^2(y_t)dt + \int_0^\infty F^2(H_t)dt \int_0^\infty \mu_b(t)dt +$$

$$+ \int_0^\infty F^2(H_t)dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\Pi(du)dt;$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_\Phi(t,u)\Pi(du)dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \Phi^2(y_t,u)\Pi(du)dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \Phi^2(H_t,u)\Pi(du)dt + \int_0^\infty \mu_b(t)dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \Phi^2(H_t,u)\Pi(du)dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\Pi(du)dt.$$

З аналогічних міркувань, що містяться в доведенні необхідності, випливає достатність теореми 2, тобто $F(\cdot) \in \mathfrak{M}_\infty$ та $\Phi(\cdot, u) \in \mathfrak{M}_\infty$.

Теорема 3. *Якщо тривіальний розв'язок* (7) *експоненціально стійкий, то за умов теореми* 2 *тривіальний розв'язок задачі* (5), (6) *асимптотично стійкий у середньому квадратичному.*

Доведення. Застосуємо до (12), (13) перетворення Лапласа [10]

$$M_b(\lambda) = \Upsilon_b(\lambda) + H_b(\lambda)M_b(\lambda) + H_b(\lambda)M_c(\lambda);$$

$$M_c(\lambda) = \Upsilon_c(\lambda) + H_c(\lambda)M_b(\lambda) + H_c(\lambda)M_c(\lambda);$$

де

$$M_b(\lambda) = \mathcal{Z}\{\mu_b(t)\}; \quad M_c(\lambda) = \mathcal{Z}\{\mu_c(t, u)\};$$

$$H_b(\lambda) = \mathcal{Z}\{b^2(H_t)\}; \quad H_c(\lambda) = \mathcal{Z}\left\{\int_{\mathbb{U}} c^2(H_t, u)\Pi(du)\right\};$$

$$\Upsilon_b(\lambda) = \mathcal{Z}\{b^2(y_t)\}; \quad \Upsilon_c(\lambda) = \mathcal{Z}\left\{\int_{\mathbb{U}} c^2(y_t, u)\Pi(du)\right\}.$$

Звідси легко бачити, що

$$M(\lambda) = \Upsilon(\lambda) + H(\lambda)M(\lambda), \tag{21}$$

де

$$M(\lambda) = M_b(\lambda) + M_c(\lambda); \quad H(\lambda) = H_b(\lambda) + H_c(\lambda);$$

$$\Upsilon(\lambda) = \Upsilon_b(\lambda) + \Upsilon_c(\lambda).$$

З (21) маємо $M(\lambda) = [I - H(\lambda)]^{-1}\Upsilon(\lambda)$.

Зауважимо, що з умов теореми 3 розв'язок рівняння (7) експоненціально стійкий [10]. Тоді $\Upsilon(\lambda)$, як перетворення Лапласа, не має полюсів у півплощині $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ [11]. Позначимо через $\gamma(\lambda)$ корінь Перрона матриці $H_t(\lambda)$ [10]. З конструкції матриці $H(\lambda)$ випливає

$$\max_{\operatorname{Re}\lambda = a} \gamma(\lambda) = \gamma(a).$$

Встановимо, що рівняння $\det[I - H(\lambda)] = 0$ має корені тільки в півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Припустимо протилежне: $\det[I - H(\lambda_0)] = 0$, де $\operatorname{Re}\lambda_0 \geq 0$. Це означає, що $H(\lambda_0)$ має власне значення 1. Тоді $\gamma(\operatorname{Re}\lambda_0) \geq 1$. Але елементи матриці $H(\lambda)$ при дійсних λ спадають, тобто $\gamma(\operatorname{Re}\lambda)$ — спадна функція. Таким чином, $\gamma(0) \geq 1$ і матриця $H(0) = \mathbb{B}$ має власне значення за модулем, не менше 1. А це суперечить умовам теореми 3 про те, що, $r(\mathbb{B}) < 1$. Таким чином, одержано, що полюси $M(\lambda)$ лежать у лівій півплощині.

Функція $\mu(t)$ веде себе при $t \to +\infty$ як $e^{\alpha t}$, де $\alpha < 0$ та α є дійсною частиною найбільш віддаленого вправо полюса зображення $M(\lambda)$ [11]. Тоді

$$|\mu_b(t)| + \left|\int_{\mathbb{U}} \mu_c(t, u)\Pi(du)\right| \leq Ke^{-\beta t}\|\varphi\|, \quad K > 0, \quad \beta > 0.$$

За умов теореми 2 для довільного лінійного оператора $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot, u)$ маємо оцінку [12]

$$|F^2(y_t)| + \int_{\mathbb{U}} |\Phi^2(y_t, u)|\Pi(du) \leq K_1 e^{-\beta_1 t}\|\varphi\|, \quad K_1 > 0, \quad \beta_1 > 0.$$

Асимптотична стійкість у середньому квадратичному тривіального розв'язку (5), (6) випливає з нерівності

$$M\{|x(t)|^2\} \leq K_1^2 e^{-\beta_1 t}\|\varphi\|^2 + \|H(t)\|^2_{C(0,\infty)} \int_0^\infty |\mu_b(t)|\,dt +$$

$$+\|H(t)\|^2_{C(0,\infty)}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}|\mu_c(t,u)|\Pi(du)dt.$$

***Зауваження* 1.** Якщо в рівнянні (5), (6) $b(\cdot,\cdot,\cdot)=b(x_t)$, $c(\cdot,\cdot,\cdot,u)=c(x_t,u)$, то результати роботи [4] випливають з теорем 2 і 3.

Теорема 4. *Нехай тривіальний розв'язок рівняння* (7) *експоненціально стійкий та* $r(\mathbb{B})>1$. *Тоді в будь-якому околі нуля знайдеться початкова функція* $\varphi(\theta)$ *така, що*

$$\lim_{t\to\infty}M\{|x(t)|^2\}=\infty.$$

***Доведення*.** При доведенні теореми 3 одержали

$$M(\lambda)=[I-H(\lambda)]^{-1}\Upsilon(\lambda),$$

де $\Upsilon(\lambda)$ з умови теореми 4 не має особливостей у півплощині $\operatorname{Re}\lambda_0\geq 0$. Тоді полюси вектора $M(\lambda)$ співпадають з нулями визначника $\det[I-H(\lambda)]$.

Матриця $H(\lambda)$ має додатне власне значення $\gamma(\lambda)$, не менше за модулем від усіх інших власних значень, тобто

$$\max_{\operatorname{Re}\lambda=a}\gamma(\lambda)=\gamma(a).$$

За умов теореми 4 $\gamma(0)>1$, $\gamma(\lambda)$ — неперервна функція дійсного λ така, що

$$\lim_{\lambda\to\infty}\gamma(\lambda)=0.$$

Таким чином, знайдеться $\lambda_0>0$ таке, що $\gamma(\lambda_0)=1$. Тоді

$$|\mu_b(t)|+\int\limits_{\mathbb{U}}|\mu_c(t,u)|\Pi(du)$$

зростає при $t\to\infty$ не повільніше $e^{\lambda_0 t}$ [10], що й завершує доведення теореми 4.

Зауважимо, що випадок $r(\mathbb{B})=1$ потребує окремих досліджень.

***Зауваження* 2.** Якщо підставити (8) у формулу (11), що визначає матрицю $\mathbb{B}$, та застосувати теорему Планшереля [10], то формула (11) набуває вигляду

$$\mathbb{B}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty|c(A_1(e^{is\theta}),B_1(e^{is\theta}),D_1(e^{is\theta}))|^2\left[V^{-1}(is)\right]_+^2ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}|c(A_2(e^{is\theta}),B_2(e^{is\theta}),D_2(e^{is\theta}),u)|^2\left[V^{-1}(is)\right]_+^2\Pi(du)ds. \tag{22}$$

3. Модельний приклад. Розглянемо задачу автоматичної стабілізації курсу пароплава [13] з урахуванням випадкових збурень (зміна швидкості морських течій, нерівномірна інтенсивність повітряних потоків, магнітні бурі тощо).

Математичною моделлю цієї задачі буде система стохастичних диференціально-різницевих рівнянь

$$\varphi''(t)+\mathcal{H}\varphi'(t)+\mathcal{K}\psi(t)=\varphi'(t)w_1'(t)+\int\limits_{\mathbb{R}^1}f_1(u)\varphi'(t)\tilde{\nu}_1'(du,dt)+$$

$$+\psi(t)w_1'(t)+\int\limits_{\mathbb{R}^1}f_2(u)\psi(t)\tilde{\nu}_2'(du,dt); \tag{23}$$

$$\psi'(t) + \frac{1}{T}\psi(t) + \mathcal{B}\varphi(t) + \mathcal{L}\varphi(t-\tau) =$$

$$= \varphi(t)w_3'(t,\omega) + \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_3(u)\tilde{\nu}_3'(du,dt) +$$

$$+ \varphi(t-\tau)w_4'(t,\omega) + \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_4(u)\varphi(t-\tau)\tilde{\nu}_4'(du,dt), \tag{24}$$

де $\varphi(t)$ — кут відхилення пароплава від курсу при куті повороту керма $\psi(t)$; $\mathcal{H} > 0$, $\mathcal{K} > 0$, $T > 0$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — сталі, що характеризують модель курсу пароплава; $w_i(t,u)$, $i = \overline{1,4}$, — вінерівські процеси; $\nu_i(t,A)$ — центровані пуассонові міри, що є незалежними за сукупністю з вінерівськими процесами. Квазіполіном системи (23), (24) має вигляд

$$\det V(\lambda) = \det\left[\mathbb{K}\lambda^2 \sum_{j=0}^{1}\sum_{r=0}^{1} A_{jr}\lambda^j e^{-\Lambda_r\lambda}\right];$$

де

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K} \\ \mathcal{B} & T^{-1} \end{pmatrix}; \quad A_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_0 = 0; \quad \Lambda_1 = \tau > 0.$$

Легко підрахувати [2], що

$$\det V(\lambda) = \lambda^2\mathbb{K} + \mathcal{H}\lambda(T^{-1} + \lambda) - \mathcal{K}(\mathcal{B} + \mathcal{L}e^{-\tau\lambda}). \tag{25}$$

В області параметрів $\mathcal{H}, T, \mathcal{K}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \tau$ можна побудувати межі D-розбиття та визначити області, де корені квазіполінома (25) мають від'ємні дійсні частини $\operatorname{Re}\lambda < 0$ [11].

Далі зрозуміло, що

$$V^{-1}(is) = \frac{1}{\det V(is)}\begin{pmatrix} -s^2 + i\mathcal{H}s & \mathcal{B} + \mathcal{L}e^{-is} \\ \mathcal{K} & T^{-1} + is \end{pmatrix},$$

$$|\det V(is)|^2 = [s^2 + (T^{-1} + \mathcal{H}) + \mathcal{B}(\mathcal{B} + \mathcal{L}\cos s)]^2 +$$

$$+ [\mathcal{H}T^{-1}s - \mathcal{B}^2 + \mathcal{K}\mathcal{L}\sin s)^2,$$

$$\left[V^{-1}(is)\right]_+^2 = \frac{1}{|\det V(is)|^2}\begin{pmatrix} s^2(s^2 + \mathcal{H}^2) & \mathcal{L}^2 + 2\mathcal{L}\mathcal{B}\cos s + \mathcal{B}^2 \\ \mathcal{K}^2 & (T^{-1})^2 + s^2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця (22) набуває вигляду

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left\{\sum_{j=0}^{1}\sum_{r=0}^{1} s_{jr}^* \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_{jr}^2(u)\frac{du}{u^2}\right\}|(is)^j|^2\left[V^{-1}(is)\right]_+^2 ds, \tag{26}$$

де

$$s_{00}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad s_{01}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad s_{10}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad s_{11}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_{00}(u) = \begin{pmatrix} 0 & f_1(u) \\ f_3(u) & 0 \end{pmatrix}; \quad f_{01}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_4(u) & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_{10}(u) = \begin{pmatrix} f_2(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad f_{11}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо позначити відповідні інтеграли в (26) через $\dot{\mathcal{J}}_{11}$, $\dot{\mathcal{J}}_{12}$, $\dot{\mathcal{J}}_{21}$, $\dot{\mathcal{J}}_{22}$, то власні значення матриці $\mathbb{B}$ мають вигляд

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathcal{J}}_{11} + \dot{\mathcal{J}}_{22} + \sqrt{D}\right); \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathcal{J}}_{11} + \dot{\mathcal{J}}_{22} - \sqrt{D}\right);$$

де $D = \left(\dot{\mathcal{J}}_{11} + \dot{\mathcal{J}}_{22}\right)^2 - 4\left(\dot{\mathcal{J}}_{11}\dot{\mathcal{J}}_{22} + \dot{\mathcal{J}}_{12}\dot{\mathcal{J}}_{21}\right)$.

Згідно з теоремою 3 та зауваженням 3 тривіальний розв'язок системи (23), (24) $(\varphi(t) \equiv 0;\ \psi(t) \equiv 0)^T$ асимптотично стійкий у середньому квадратичному, якщо власні значення матриці $\mathbb{B}$ менші одиниці. Таким чином, $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$, є умовою автоматичної стабілізації курсу пароплава.

1. *Скороход А. В.* Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические подгруппы // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 6. – С. 157–183.
2. *Ясинский В. К., Цынгаева А. В.* Устойчивость решений линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений с разрывными траекториями // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 666–671.
3. *Mizel V. I., Trutzer V.* Stochastic hereditary equations: existance and asypmtotic stability // Integral Equat. – 1984. – **7**. – P. 1–72.
4. *Ясинский В. К.* Поведение на бесконечности решений стохастических дифференциальных уравнений со случайными операторами // Дифференциальные уравнения и применение (I): Тр. третьей конф. (Руссе, 26 авг. – 2 сент. 1985 г.) – Руссе, 1987. – С. 487–490.
5. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 389 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: в 3-х т. – М.: Наука, 1975. – Т. 3. – 496 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
8. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
10. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
11. *Дач Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
12. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
13. *Наймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

Одержано 23.03.94