УДК 517.51

В. В. Михайлюк (Чернів. нац. ун-т)

ЛІНІЙНО ВПОРЯДКОВАНІ КОМПАКТИ І КОНАМІОКОВІ ПРОСТОРИ

It is proved that for any Baire space X, linearly ordered compact Y, and separately continuous mapping $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, there exists a G_δ-set $A \subseteq X$ dense in X and such that f is jointly continuous at every point of the set $A \times Y$, i.e., any linearly ordered compact is a co-Namioka space.

Доказано, что для произвольных пространства Бера X, линейно упорядоченного компакта Y и раздельно непрерывного отображения $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ существует плотное в X G_δ-множество $A \subseteq X$ такое, что функция f непрерывна по совокупности переменных в каждой точке множества $A \times Y$, т. е. произвольный линейно упорядоченный компакт является конамиоковым пространством.

1. Дослідження масивності множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних функцій, визначених на добутку берівського і компактного просторів, займають особливе місце в теорії нарізно неперервних відображень. Класичний результат Наміоки [1] став поштовхом до інтенсифікації даних досліджень і привів, зокрема, до виникнення наступних понять, які були введені в [2].

Нехай X, Y — топологічні простори. Кажуть, що нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ *має властивість Наміоки*, якщо існує щільна в X G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times Y$.

Компактний простір Y називається *конаміоковим*, якщо для довільного берівського простору X кожне нарізно неперервне відображення $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ має властивість Наміоки.

Найбільш загальні результати у напрямку вивчення властивостей конаміокових просторів одержано в [3, 4], де встановлено, що клас компактних конаміокових просторів замкнений відносно добутку і містить компакти Валдівіа. Крім того, в [3] показано, що лінійно впорядкований компакт $[0, 1] \times \{0, 1\}$ з лексикографічним порядком також є конаміоковим і передоведено результат з [5] про конаміоковість довільного цілком впорядкованого компакту. Таким чином, природно виникає питання: чи обов'язково довільний лінійно впорядкований компакт є конаміоковим простором?

У даній статті ми покажемо, що відповідь на дане питання є позитивною.

2. Спочатку нагадаємо деякі означення і доведемо допоміжні твердження.

Нехай X — топологічний простір і $f: X \to \mathbb{R}$. Для довільної непорожньої множини $A \subseteq X$ через $\omega_f(A)$ позначатимемо коливання $\sup\{|f(x') - f(x'')|: x', x'' \in A\}$ функції f на множині A, а для довільної точки $x_0 \in X$ через $\omega_f(x_0)$ позначатимемо коливання $\inf\{\omega_f(U): U \in \mathcal{U}\}$ функції f в точці x_0, де $\mathcal{U}$ — система всіх околів точки x_0 у просторі X.

Нехай X, Y — топологічні простори, $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$. Відображення f^{x_0} і f_{y_0} означимо таким чином: $f^{x_0}(y) = f_{y_0}(x) = f(x, y)$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$.

Для лінійно впорядкованої множини $(X, <)$ і точок $x', x'' \in X$, $x' < x''$, покладемо $[x', x''] = \{x \in X: x' \le x \le x''\}$, $[x', x'') = \{x \in X: x' \le x \le x''\}$,

$(x', x''] = \{x \in X: x' < x \leq x''\}$ і $(x', x'') = \{x \in X: x' < x < x''\}$. Точки x', $x'' \in X$, $x' < x''$, називатимемо *сусідніми*, якщо $(x', x'') = \varnothing$. Нагадаємо, що базу топології на X, узгодженої з лінійним порядком, утворюють всі непорожні інтервали (x', x'') і проміжки $[a, x)$ і $(x, b]$, де a і b — відповідно найменший і найбільший елементи в X (якщо вони існують). Легко бачити, що лінійно впорядкований простір X компактний відносно топології, породженої лінійним порядком, тоді і тільки тоді, коли кожна непорожня множина $A \subseteq X$ має в X точну верхню і точну нижню межі.

Топологічний простір X називається *зв'язним*, якщо $A \bigcup B \neq X$ для довільних диз'юнктних непорожніх відкритих в X множин A і B. Зауважимо, що лінійно впорядкований компакт X зв'язний тоді і тільки тоді, коли в X немає сусідніх точок.

Твердження 1. *Нехай $(X, <)$ — лінійно впорядкований компакт, $f: X \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке $n \in \mathbb{N}$, що для довільних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in X$ таких, що $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots$ $\ldots \leq a_n < b_n$, існує $k \leq n$ таке, що $|f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon$.*

Доведення. Розглянемо таке скінченне покриття $(U_i: i \in I)$ компактного простору X проміжками U_i, що $\omega_f(U_i) < \varepsilon$ для кожного $i \in I$. Покладемо $n = |I| + 1$. Тоді для довільних $2n$ точок $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots a_n < b_n$ з простору X існує $i_0 \in I$ таке, що проміжок U_{i_0} містить принаймні три з цих точок. Врахувавши, що U_{i_0} — проміжок, одержимо, що існує $k \leq n$ таке, що $a_k, b_k \in U_{i_0}$. Тоді $|f(a_k) - f(b_k)| \leq \omega_f(U_{i_0}) < \varepsilon$.

Твердження 2. *Нехай $(X, <)$ — лінійно впорядкований зв'язний компакт, $a = \min X$, $b = \max X$, $f: X \to \mathbb{R}$ — неперервне відображення і $f(a) \neq f(b)$. Тоді існує точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$.*

Доведення. Покладемо $y_0 = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$, $A = f^{-1}((-\infty, y_0))$ і $B = f^{-1}((y_0, +\infty))$. Оскільки f неперервне, то множини A і B є відкритими в X. Зі зв'язності простору X випливає, що множина $C = X \setminus (A \bigcup B)$ непорожня. Залишилось вибрати довільну точку $c \in C$.

3. Перейдемо до викладу основних результатів.

Теорема. *Довільний лінійно впорядкований зв'язний компакт є конаміоковим простором.*

Доведення. Нехай X — берівський простір, $(Y, <)$ — лінійно впорядкований компакт і $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція. Доведемо, що відображення f має властивість Наміоки.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покажемо, що відкрита множина $G_\varepsilon = \{x \in X: \omega_f(x, y) < 9\varepsilon$ для кожного $y \in Y\}$ є щільною в X.

Нехай U — довільна непорожня відкрита в X множина. Для кожного $x \in U$ позначимо через N_x множину таких номерів $n \in \mathbb{N}$, що існують $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in Y$ такі, що $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n$ і $|f(x, a_i) - f(x, b_i)| > \varepsilon$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. З твердження 1 випливає, що всі множини N_x обмежені зверху. Для кожного $x \in U$ покладемо $\varphi(x) = \max N_x$, якщо N_x є непорожньою, і $\varphi(x) = 0$, якщо $N_x = \varnothing$. З неперервності f відносно першої змінної випливає, що для кожного цілого невід'ємного n множина $\{x \in U: \varphi(x) > n\}$ є відкритою в U, тобто функція $\varphi: U \to \mathbb{Z}$ є напівнеперервною знизу на берівському просторі U. Тому (див. [6]) функція φ

є точково розривною. Тоді існують відкрита в U непорожня множина U_0 і невід'ємне ціле число $n \in \mathbb{Z}$ такі, що $\varphi(x) = n$ для кожного $x \in U_0$.

Якщо $n = 0$, то $|f(x, a) - f(x, b)| \le \varepsilon$ для довільних $x \in U_0$ і a, $b \in Y$. Взявши довільну точку $y_0 \in Y$ і відкриту непорожню множину $U_1 \subseteq U_0$ таку, що $\omega_{f_{y_0}}(U_1) < \varepsilon$, одержимо, що $\omega_f(x, y) < 3\varepsilon$ для довільних $x \in U_1$ і $y \in Y$. Зокрема, $U_1 \subseteq G_\varepsilon$.

Тепер розглянемо випадок, коли $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in U_0$ і виберемо точки $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in Y$ такі, що $a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_n < b_n$ і $|f(x_0, a_i) - f(x_0, b_i)| > \varepsilon$ при $1 \le i \le n$.

Використовуючи неперервність функції f відносно першої змінної, виберемо відкритий окіл $U_1 \subseteq U_0$ точки x_0 в U такий, що $|f(x, a_i) - f(x, b_i)| > \varepsilon$ для довільних $x \in U_1$ та $i \in \{1, \ldots, n\}$. Покажемо, що для довільного $y_0 \in Y$ існує відкритий окіл V точки y_0 в Y такий, що $\omega_{f^x}(V) \le 4\varepsilon$ для кожного $x \in U_1$.

Нехай $y_0 \in G = Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. Оскільки множина G відкрита в Y, то існує відкритий в Y проміжок V такий, що $V \subseteq G$. Тоді для довільних $a, b \in V$ з $a < b$ маємо $[a, b] \cap [a_i, b_i] = \varnothing$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. Врахувавши, що $\varphi(x) = n$ і $|f(x, a_i) - f(x, b_i)| > \varepsilon$ для довільних $x \in U_1$ та $i \in \{1, \ldots, n\}$, одержимо $|f(x, a) - f(x, b)| \le \varepsilon$, тобто $\omega_{f^x}(V) \le \varepsilon$ для кожного $x \in U_1$.

Нехай $a_i < y_0 < b_i$ для деякого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді покладемо $V = (a_i, b_i)$. Зауважимо, що $|f(x, a) - f(x, b)| \le 2\varepsilon$ для довільних точок $a, b \in (a_i, b_i)$ і $x \in U_1$. Справді, припустимо, що існують $a, b \in (a_i, b_i)$ і $x \in U_1$ такі, що $|f(x, a) - f(x, b)| > 2\varepsilon$. Тоді згідно з твердженням 2 існує точка $c \in (a, b)$ така, що $|f(x, a) - f(x, c)| = |f(x, c) - f(x, b)| > \varepsilon$, а це суперечить тому, що $\varphi(x) = n$. Отже, $\omega_{f^x}(V) \le 2\varepsilon$.

Залишилось розглянути випадок, коли $y_0 \in \{a_i, b_i \colon 1 \le i \le n\}$. Нехай $a_0 = \min Y$, $b_0 = \max Y$ і $a_0 < y_0 < b_0$. Покладемо $y_1 = \max(\{a_i, b_i \colon 0 \le i \le n\} \cap [a_0, y_0))$, $y_2 = \min(\{a_i, b_i \colon 0 \le i \le n\} \cap (y_0, b_0])$ і $V = (y_1, y_2)$. З твердження 2 випливає, що для довільних $a \in (y_1, y_0]$, $b \in [y_0, y_2)$ і $x \in U_1$ виконуються нерівності $|f(x, a) - f(x, y_0)| \le 2\varepsilon$ і $|f(x, y_0) - f(x, b)| \le 2\varepsilon$. Тому $\omega_{f^x}(V) \le 4\varepsilon$ для кожного $x \in U_1$. У випадку, коли $y_0 = a_0$ або $y_0 = b_0$, досить покласти $V = [y_0, y_2)$ або $V = (y_1, y_0]$.

Доведемо тепер, що $U_1 \subseteq G_\varepsilon$. Нехай $(x_0, y_0) \in U_1 \times Y$. Візьмемо відкритий окіл V точки y_0 у просторі Y такий, що $\omega_{f^x}(V) \le 4\varepsilon$ для кожного $x \in U_1$. Використавши неперервність f відносно першої змінної, виберемо окіл $U_2 \subseteq U_1$ точки x_0 в X такий, що $\omega_{f_{y_0}}(U_2) < \varepsilon$. Тоді $\omega_f(U_2 \times V) < 9\varepsilon$.

Отже, для кожного ε множина G_ε є щільною в берівському просторі X. Тоді G_δ-множина $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$ також є щільною в X, причому функція f неперервна в кожній точці множини $A \times Y$, тобто f має властивість Наміоки.

Наслідок. *Довільний лінійно впорядкований компакт є конаміоковим простором.*

Доведення. Нехай $(Y, <)$ — довільний лінійно впорядкований компакт. Якщо множина D всіх пар сусідніх в Y точок порожня, то згідно з доведеною теоремою простір Y є конаміоковим.

Нехай $D \neq \varnothing$. Для кожної пари $d \in D$ сусідніх точок в Y позначимо через a_d і b_d відповідно ліву і праву сусідні точки пари d, тобто $d = \{a_d, b_d\}$ і $a_d < b_d$. Покладемо $Z = Y \bigcup (D \times (0,1))$ і означимо лінійний порядок на Z, який є продовженням лінійного порядку на Y. Нехай $z' \in Y$, $d \in D$, $t \in (0,1)$ і $z'' = (d,t)$. Тоді $z' < z''$, якщо $z' \leq a_d$, і $z'' < z'$, якщо $b_d \leq z'$. Нехай $z' = (d', t')$, $z'' = (d'', t'') \in D \times (0, 1)$. Тоді $z' < z''$, якщо $a_{d'} < a_{d''}$ або $d' = d''$ і $t' < t''$.

Зауважимо, що $(Z, <)$ — компактний простір, який не має сусідніх точок, причому простір $(Y, <)$ є компактним підпростором простору $(Z, <)$.

Нехай X — довільний берівський простір і $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервне відображення. Побудуємо відображення $g: X \times Z \to \mathbb{R}$, яке є продовженням відображення f. Для довільних $x \in X$ і $z = (d, t) \in D \times (0, 1)$ покладемо $g(x, z) = (1-t) f(x, a_d) + tf(x, b_d)$. Легко бачити, що функція g також є нарізно неперервною. Тому згідно з доведеною теоремою існує щільна в X G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що g неперервна за сукупністю змінних у кожній точці множини $A \times Z$. Тому функція f неперервна за сукупністю змінних у кожній точці множини $A \times Y$. Отже, f має властивість Наміоки і Y є конаміоковим.

4. У цьому пункті ми покажемо, що в наведених вище міркуваннях умова неперервності функції f відносно першої змінної є істотною і не може бути замінена на слабшу умову — квазінеперервність.

Нехай X — топологічний простір і $f\colon X \to Y$. Нагадаємо, що відображення f називається *квазінеперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо для довільних околів U точки x_0 в X і V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y існує відкрита в X непорожня множина $G \subseteq U$ така, що $f(G) \subseteq V$. Відображення f називається *квазінеперервним*, якщо f квазінеперервне в кожній точці $x \in X$.

Приклад. Нехай $X = (0, 1)$ і $Y = [0, 1] \times \{0, 1\}$ — лінійно впорядкований компакт з лексикографічним порядком, тобто $(y, i) < (z, j)$, якщо $y < z$ або $y = z$ і $i < j$. Для кожного $t \in [0, 1]$ покладемо $t_l = (t, 0)$ і $t_r = (t, 1)$. Функцію $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ означимо таким чином: $f(x, y) = 0$, якщо $x_r \leq y$, і $f(x, y) = 1$, якщо $x_l \geq y$.

Для кожного $x \in (0,1)$ маємо $(f^x)^{-1}(0) = [x_r, 1_r]$ і $(f^x)^{-1}(1) = [0_l, x_l]$, тому всі функції f^x є неперервними. Якщо $y \in \{0_l, 0_r\}$, то $f_y(x) = 1$ для кожного $x \in X$, і якщо $y \in \{1_l, 1_r\}$, то $f_y(x) = 0$ для кожного $x \in X$. Нехай $z \in (0,1)$. Тоді при $y = z_l$ маємо $f_y(x) = 0$, якщо $x \in (0, z)$, і $f_y(x) = 1$, якщо $x \in [z, 1)$. А при $y = z_r$ $f_y(x) = 0$, якщо $x \in (0, z]$, і $f_y(x) = 1$, якщо $x \in (z, 1)$. Отже, функція f є квазінеперервною відносно другої змінної. Але функція f розривна за сукупністю змінних у кожній точці (x, x_l) і (x, x_r) при $x \in X$.

Автор висловлює щиру подяку О. В. Маслюченку за корисні поради, які істотно покращили виклад матеріалу даної статті.

1. *Namioka I.* Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math. – 1974. – **51**, № 2. – P. 515 – 531.
2. *Debs G.* Points de continuite d’une function separement continue // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**. – P. 167 – 176.
3. *Bouziad A.* Notes sur la propriete de Namioka // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – **344**, № 2. – P. 873 – 883.
4. *Bouziad A.* The class of co-Namioka spaces is stable under product // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – **124**, № 3. – P. 983 – 986.
5. *Deville R.* Convergence ponctuelle et uniforme sur un espace compact // Bull. Acad. pol. sci. Sér. math. – 1989. – **37**. – P. 507 – 515.
6. *Calbrix J., Troallic J. .P.* Applications séparément continues // C. r. Acad. sci. A. – 1979. – **288**. – P. 647 – 648.

Одержано 26.12.2005