УДК 517.5

О. І. Степанець, А. Л. Шидліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ

We obtain some new results for convex downwards functions vanishing at infinity.

Установлен ряд новых результатов для выпуклых вниз функций, исчезающих на бесконечности.

У роботі продовжуються дослідження властивостей множин опуклих функцій, започатковані у [1] (гл. III), [2] та [3] (гл. III), де, зокрема, викладено і мотивацію таких досліджень.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина всіх додатних при $t \geq 1$ опуклих донизу спадних до нуля функцій:

$$\mathfrak{M} = \Big\{\psi(t)\colon \psi(t) > 0, \quad \psi(t_1) - 2\psi((t_1+t_2)/2) + \psi(t_2) \geq 0$$

$$\forall t_1,\ t_2 \in [1,\infty), \quad \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\Big\}.$$

Нехай, далі, $\psi \in \mathfrak{M}$, тоді через $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ позначають функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1.$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ $\eta(t)$ при всіх $t \geq 1$ визначається однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right).$$

Покладемо

$$\mu(t) = \mu(\psi;t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

В залежності від поведінки функції μ розрізняють наступні підмножини множини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_0 = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < \mu(\psi;t) \leq K \ \ \forall t \geq 1\big\}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K \leq \mu(\psi;t) < \infty \ \ \forall t \geq 1\big\}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K_1 \leq \mu(\psi;t) \leq K_2 \ \ \forall t \geq 1\big\}, \tag{3}$$

де, як і далі, $K, K_1, \ldots$ — деякі додатні сталі, що не залежать від параметра t.

Через $\mathfrak{M}_0^+$ позначають підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi;t)$ при $t \to \infty$ монотонно прямує до нуля:

$$\mathfrak{M}_0^+ = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \mu(\psi;t) \downarrow 0\big\},$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ — підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi; t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} \colon \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}.$$

В [2] було встановлено наступний критерій належності функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ до введених множин.

Твердження А. *Функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належить множині $\mathfrak{M}_0$ тоді і лише тоді, коли величина*

$$\alpha(t) = \alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \psi'(t+0),$$

задовольняє умову

$$\alpha(t) \geq K > 0 \quad \forall t \geq 1;$$

$\psi \in \mathfrak{M}$ належить множині $\mathfrak{M}_\infty$ тоді і лише тоді, коли

$$\alpha(t) \leq K \quad \forall t \geq 1;$$

$\psi \in \mathfrak{M}$ належить множині $\mathfrak{M}_C$ тоді і лише тоді, коли

$$0 < K_1 \leq \alpha(t) \leq K_2 \quad \forall t \geq 1.$$

Якщо функція $\alpha(t)$ не спадає і

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \infty,$$

то $\psi \in \mathfrak{M}_0^+$. Якщо ж $\alpha(t)$ не зростає і

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = 0,$$

то $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Спочатку розглянемо множини функцій, обернених до функцій із множини $\mathfrak{M}$, і встановимо аналог твердження А для цих множин.

Нехай $\mathfrak{M}^*$ — множина всіх додатних при $t \in (0, 1]$ опуклих донизу спадних функцій $\varphi(\cdot)$ таких, що $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = \infty$.

Для $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ означимо характеристики $\zeta(t) = \zeta(\varphi; t)$ та $\nu(t) = \nu(\varphi; t)$ — аналоги величин $\eta(t)$ та $\mu(t)$, які визначаються таким чином:

$$\varphi(\zeta(t)) = 2\varphi(t), \quad t \in (0, 1]. \tag{4}$$

Внаслідок строгої монотонності φ функція $\zeta(t)$ при всіх $t \in (0, 1]$ визначається однозначно:

$$\zeta(t) = \zeta(\varphi; t) = \varphi^{-1}(2\varphi(t)). \tag{5}$$

Функція $\nu(t)$ задається рівністю

$$\nu(t) = \nu(\varphi; t) = \frac{\zeta(t)}{t - \zeta(t)}.$$

Якщо $\varphi_1(t) = t^{-r}$, $r > 0$, то $\zeta(\varphi_1; t) = 2^{-1/r}t$ і $\nu(\varphi_1; t) = (2^{1/r} - 1)^{-1}$; якщо $\varphi_2(t) = \ln\dfrac{1}{t}$, тобто $\varphi_2(t)$ — обернена функція до функції e^{-t}, то $\zeta(\varphi_2; t) = t^2$ і $\nu(\varphi_2; t) = \dfrac{t}{1-t}$, а якщо ж $\varphi_3(t) = e^{1/t}$ $(\varphi_3^{-1}(t) = 1/\ln t)$, то $\zeta(\varphi_3; t) = \dfrac{t}{t\ln 2 + 1}$ і $\nu(\varphi_3; t) = (t\ln 2)^{-1}$. З даних прикладів бачимо, що функція $\nu(t)$ може бути обмеженою зверху та знизу деякими сталими, може прямувати до нуля або до нескінченності при $t \to 0$. На основі таких ознак виділимо із множини $\mathfrak{M}^*$ наступні підмножини:

$$\mathfrak{M}_0^* = \big\{\varphi \in \mathfrak{M}^* \colon 0 < \nu(\varphi; t) \le K \quad \forall t \in (0, 1]\big\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty^* = \big\{\varphi \in \mathfrak{M}^* \colon 0 < K \le \nu(\varphi; t) < \infty \quad \forall t \in (0, 1]\big\},$$

$$\mathfrak{M}_C^* = \mathfrak{M}_0^* \cap \mathfrak{M}_\infty^* = \big\{\varphi \in \mathfrak{M}^* \colon 0 < K_1 \le \nu(\varphi; t) \le K_2 \quad \forall t \in (0, 1]\big\}.$$

Далі, через $\mathfrak{M}_0^{*+}$ позначимо підмножину всіх функцій $\varphi \in \mathfrak{M}^*$, для яких величина $\nu(\varphi; t)$ при $t \to 0$ монотонно прямує до нуля:

$$\mathfrak{M}_0^{*+} = \big\{\varphi \in \mathfrak{M}^* \colon \nu(\varphi; t) \downarrow 0 \ \text{ при } \ t \to 0\big\},$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^{*+}$ — підмножину всіх функцій $\varphi \in \mathfrak{M}^*$, для яких $\nu(\varphi; t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to 0$:

$$\mathfrak{M}_\infty^{*+} = \big\{\varphi \in \mathfrak{M}^* \colon \nu(\varphi; t) \uparrow \infty \ \text{ при } \ t \to 0\big\}.$$

У функцій $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ на проміжку $(0, 1)$ існують монотонні похідні $\varphi'(t)$, що допускають розриви лише першого роду. Тому далі вважаємо, що $\varphi'(t) = \varphi'(t-0)$, $t \in (0, 1)$. При цих позначеннях має місце наступний аналог твердження А.

Теорема 1. *Функція $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ належить множині $\mathfrak{M}_0^*$ тоді і лише тоді, коли величина*

$$\beta(t) = \beta(\varphi; t) = \frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)}, \qquad \varphi'(t) \overset{\text{df}}{=} \varphi'(t-0), \tag{6}$$

задовольняє умову

$$\beta(t) \le K \quad \forall t \in (0, 1]; \tag{7}$$

$\varphi \in \mathfrak{M}^*$ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^*$ тоді і лише тоді, коли

$$\beta(t) \ge K > 0 \quad \forall t \in (0, 1]; \tag{8}$$

$\varphi \in \mathfrak{M}^*$ належить множині $\mathfrak{M}_C^*$ тоді і лише тоді, коли

$$0 < K_1 \le \beta(t) \le K_2 \quad \forall t \in (0, 1]. \tag{9}$$

Якщо функція $\beta(t)$ не спадає і

$$\lim_{t\to 0} \beta(t) = 0, \tag{10}$$

то $\varphi \in \mathfrak{M}_0^{*+}$. Якщо ж $\beta(t)$ не зростає і

$$\lim_{t\to 0}\beta(t)=\infty, \tag{11}$$

то $\varphi\in\mathfrak{M}_{\infty}^{*+}$.

Доведення. Враховуючи рівність (6), для будь-якого $t\in(0,1]$ маємо

$$\varphi(t)\int\limits_{\zeta(t)}^{t}\frac{\beta(\tau)}{\tau}d\tau\le\int\limits_{\zeta(t)}^{t}|\varphi'(\tau)|d\tau=\int\limits_{\zeta(t)}^{t}\frac{\beta(\tau)\varphi(\tau)}{\tau}d\tau\le\varphi(\zeta(t))\int\limits_{\zeta(t)}^{t}\frac{\beta(\tau)}{\tau}d\tau$$

або, з урахуванням (4),

$$\varphi(t)\int\limits_{\zeta(t)}^{t}\frac{\beta(\tau)}{\tau}d\tau\le\varphi(t)\le 2\varphi(t)\int\limits_{\zeta(t)}^{t}\frac{\beta(\tau)}{\tau}d\tau,$$

тобто для будь-якого $t\in(0,1]$

$$\frac{1}{2}\le\int\limits_{\zeta(t)}^{t}\frac{\beta(\tau)}{\tau}d\tau\le 1. \tag{12}$$

Якщо виконується (7), то звідси отримуємо

$$\frac{1}{2K}\le\int\limits_{\zeta(t)}^{t}\frac{d\tau}{\tau}=\ln\frac{t}{\zeta(t)}=\ln\left(\frac{1}{\nu(\varphi;t)}+1\right).$$

Таким чином,

$$\nu(\varphi;t)\le(e^{1/(2K)}-1)^{-1},$$

тобто $\varphi\in\mathfrak{M}_0^*$.

Якщо виконується умова (8), то з (12) аналогічно знаходимо

$$\ln\left(\frac{1}{\nu(\varphi;t)}+1\right)\le\frac{1}{K},$$

звідки одразу випливає, що $\varphi\in\mathfrak{M}_{\infty}^*$. Таким самим чином переконуємося, що при виконанні умови (9) функція φ належить множині $\mathfrak{M}_C^*$.

Якщо $\beta(t)$ не спадає і виконується (10), то внаслідок (12) для будь-якого $t\in$ $\in(0,1]$

$$\beta(t)\ge\frac{1}{2\ln\left(\dfrac{1}{\nu(\varphi;t)}+1\right)}.$$

Звідси з урахуванням (10) робимо висновок, що

$$\lim_{t\to 0}\nu(\varphi;t)=0.$$

Переконаємося, що $\nu(\varphi;t)$ монотонно не зростає при $t\to 0$. Це можливо тоді і лише тоді, коли

$$t\zeta'(t) - \zeta(t) \geq 0, \quad \zeta'(t) = \zeta'(t-0). \tag{13}$$

Згідно з (4) та (6)

$$2\varphi(t) = \varphi(\zeta(t)) = -\frac{\zeta(t)\varphi'(\zeta(t))}{\beta(\zeta(t))}.$$

Об'єднуючи цю рівність із рівністю (6) і враховуючи те, що внаслідок (5) для будь-якої функції $\varphi \in \mathfrak{M}^*$

$$\zeta'(t) = \frac{2\varphi'(t)}{\varphi'(\zeta(t))}, \tag{14}$$

отримуємо

$$\frac{t\zeta'(t)\beta(\zeta(t))}{\beta(t)\zeta(t)} = 1,$$

або

$$t\zeta'(t) = \zeta(t)\frac{\beta(t)}{\beta(\zeta(t))} \geq \zeta(t),$$

тобто співвідношення (13) дійсно є правильним. Тим самим доведено, що коли $\beta(t)$ не спадає і виконується (10), то $\varphi \in \mathfrak{M}_0^{*+}$. Аналогічно переконуємося, що у випадку, коли $\beta(t)$ не зростає і справджується умова (11), функція φ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^{*+}$.

Залишається показати, що для будь-якої $\varphi \in \mathfrak{M}_0^*$ виконується умова (7), а для будь-якої $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^*$ — умова (8) і для будь-якої функції $\varphi \in \mathfrak{M}_C^*$ справджується умова (9).

Для кожної функції $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ при довільному $t \in (0,1]$ маємо

$$\left|\varphi'(t)\right|\big(t-\zeta(t)\big) \leq \varphi(t) = -\int\limits_{\zeta(t)}^{t} \varphi'(\tau)d\tau \leq \left|\varphi'(\zeta(t))\right|\big(t-\zeta(t)\big).$$

Звідси

$$\frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)} \leq \frac{t}{t-\zeta(t)} = 1 + \frac{\zeta(t)}{t-\zeta(t)}.$$

Якщо $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ така, що

$$\nu(\varphi;t) = \frac{\zeta(t)}{t-\zeta(t)} \leq K \quad \forall t \in (0,1],$$

тобто $\varphi \in \mathfrak{M}_0^*$, то

$$\beta(t) = \frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)} \leq K+1.$$

Тим самим доведено, що якщо $\varphi \in \mathfrak{M}_0^*$, то умова (7) виконується, а також те, що для функцій $\varphi \in \mathfrak{M}_C^*$ справджується права частина співвідношення (9).

Для кожної функції $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ позначимо через $\overline{\zeta}(t) = \overline{\zeta}(\varphi; t)$ функцію, обернену до $\zeta(t)$. Внаслідок (14) при довільному $t \in (0, 1]$ виконується нерівність $\zeta'(t) > 2$, з якої випливає строга монотонність функції $\zeta(t)$. Тому функція $\overline{\zeta}(t)$ на півінтервалі $(0, \zeta(1)]$ визначається однозначно і при кожному $t \in (0, \zeta(1)]$ справджується співвідношення

$$\frac{1}{2}\varphi(t) = -\int\limits_{t}^{\overline{\zeta}(t)} \varphi'(\tau)d\tau \leq |\varphi'(t)|(\overline{\zeta}(t) - t)$$

або

$$\frac{t}{\overline{\zeta}(t) - t} \leq 2\frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)}. \tag{15}$$

Припустимо тепер, що функція $\varphi \in \mathfrak{M}^*$ така, що

$$\nu(\varphi; t) = \frac{\zeta(t)}{t - \zeta(t)} \geq K > 0 \quad \forall t \in (0, 1], \tag{16}$$

тобто $\varphi \in \mathfrak{M}^*_\infty$. Тоді, покладаючи $z = \overline{\zeta}(t)$, знаходимо

$$\frac{t}{t - \overline{\zeta}(t)} = \frac{\zeta(z)}{\zeta(z) - z} \geq K.$$

Підставляючи дану оцінку в (15), робимо висновок, що коли виконується (16), то при всіх $t \in (0, \zeta(1)]$

$$\beta(t) = \frac{t|\varphi'(t)|}{\varphi(t)} \geq K_1 > 0.$$

Зрозуміло, що така ж нерівність справджується і при $t \in [\zeta(1), 1]$. Таким чином, якщо $\varphi \in \mathfrak{M}^*_\infty$, то умова (8) виконується, а якщо $\varphi \in \mathfrak{M}^*_C$, то справджується і ліва частина співвідношення (9).

Твердження доведено.

Із твердження А легко випливає наступний факт, який вказує на певну спорідненість функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що мають подібні величини $\alpha = \alpha(\psi; \cdot)$.

***Наслідок* 1.** *Якщо для функцій $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ та $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ величина $r(t) = \dfrac{\alpha(\psi_1; t)}{\alpha(\psi_2; t)}$ при всіх $t \geq 1$ задовольняє співвідношення*

$$0 < K_1 \leq r(t) \leq K_2 < \infty,$$

то властивості цих функцій збігаються в тому сенсі, що якщо одна з цих функцій належить множині $\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}_0$ або $\mathfrak{M}_C$, то й інша функція також належить цій самій множині.

Зрозуміло, що аналогічне твердження для функцій з множини $\mathfrak{M}^*$ випливає з теореми 1.

***Наслідок* 1$'$.** *Якщо для функцій $\varphi_1 \in \mathfrak{M}^*$ та $\varphi_2 \in \mathfrak{M}^*$ величина $r^*(t) = \dfrac{\beta(\varphi_1; t)}{\beta(\varphi_2; t)}$ при всіх $t \in (0, 1]$ задовольняє співвідношення*

$$0 < K_1 \leq r^*(t) \leq K_2 < \infty,$$

то властивості цих функцій збігаються в тому сенсі, що якщо одна з цих функцій належить множині $\mathfrak{M}^*_\infty$, $\mathfrak{M}^*_0$ або $\mathfrak{M}^*_C$, то й інша функція належить цій самій множині.

З означення множин $\mathfrak{M}$ та $\mathfrak{M}^*$ випливає, що для довільної $\psi \in \mathfrak{M}$ функція φ, обернена до функції $\psi(t)/\psi(1)$, належить множині $\mathfrak{M}^*$. Крім того, на підставі теорем про похідну оберненої функції для будь-якого $t \geq 1$ маємо

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{\psi(t)\psi(1)}{t|\psi'(t)|\psi(1)} = \frac{y|\varphi'(y)|}{\varphi(y)} = \beta(\varphi; y),$$

де $y = \psi(t)/\psi(1) \in (0, 1]$. Звідси на підставі твердження A та теореми 1 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 2. *Функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належить множині $\mathfrak{M}_0$ ($\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_0^+$ або $\mathfrak{M}_\infty^+$) тоді і лише тоді, коли функція φ, яка є оберненою до функції $\psi(t)/\psi(1)$, належить відповідно множині $\mathfrak{M}^*_\infty$ ($\mathfrak{M}^*_0$, $\mathfrak{M}^*_C$, $\mathfrak{M}^{*+}_\infty$ або $\mathfrak{M}^{*+}_0$).*

Записуючи рівність (6) у вигляді

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -\frac{\beta(t)}{t}$$

та інтегруючи останнє співвідношення по проміжку $[t, 1]$, $t \leq 1$, отримуємо

$$\varphi(t) = \varphi(1)\exp\left(\int_t^1 \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau\right).$$

Аналізуючи цю рівність, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 3. *Якщо $\varphi \in \mathfrak{M}^*_0$, то можна вказати таке $r_1 > 0$, що при всіх $t \in (0, 1]$ буде виконуватись нерівність*

$$\varphi(t) \leq K t^{-r_1};$$

якщо $\varphi \in \mathfrak{M}^*_\infty$, то існує число $r_2 > 0$ таке, що при всіх $t \in (0, 1]$

$$\varphi(t) \geq K t^{-r_2};$$

якщо ж $\varphi \in \mathfrak{M}^*_C$, то існують числа $r_1, r_2 > 0$ такі, що при всіх $t \in (0, 1]$

$$K_1 t^{-r_1} \leq \varphi(t) \leq K_2 t^{-r_2}.$$

Цей наслідок є аналогом для обернених функцій наступного твердження для функцій з множини $\mathfrak{M}$, яке було встановлено в [2] (див. також [3]).

Твердження B. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то можна вказати таке $r_1 > 0$, що при всіх $t \geq 1$ буде виконуватись нерівність*

$$\psi(t) \geq K t^{-r_1}; \tag{17}$$

якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то існує число $r_2 > 0$ таке, що при всіх $t \geq 1$

$$\psi(t) \le Kt^{-r_2}; \tag{18}$$

якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}_C$, *то існують числа* $r_1, r_2 > 0$ *такі, що при всіх* $t \ge 1$

$$K_1 t^{-r_1} \le \psi(t) \le K_2 t^{-r_2}. \tag{19}$$

Зокрема, якщо $\psi_1(t) = e^{-t} \in \mathfrak{M}_\infty$, то для будь-яких $t \ge 1$, $r > 0$ маємо $\psi_1(t) \le t^{-r}$; як що $\psi_2(t) = \dfrac{1}{\ln t} \in \mathfrak{M}_0$, то для будь-яких $t \ge 1$, $r > 0$ $\psi_2(t) \ge t^{-r}$; якщо ж $\psi_3(t) = t^{-r}$, $r > 0$, то для довільного $t \ge 1$ та r_1, $r_2 > 0$ таких, що $r_2 < r < r_1$, $t^{-r_1} \le \psi_3(t) \le t^{-r_2}$. У зв'язку з цим природно виникає питання: чи гарантують співвідношення вигляду (17) – (19) належність функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ до однієї із множин $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ чи $\mathfrak{M}_C$? Відповідь на це питання дають наступні твердження.

Теорема 2. *Якою б не була монотонно незростаюча на проміжку* $t \ge 1$ *функція* $f(t)$ *така, що* $f(t) > 0$ *при* $t \ge 1$, *і для якої* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, *знайдеться функція* $\psi \in \mathfrak{M}$ *така, що*

$$\psi(t) < f(t) \quad \forall t \ge 1, \tag{20}$$

і при цьому справджуються співвідношення $\varliminf\limits_{t\to\infty} \mu(\psi; t) = 0$ *та* $\varlimsup\limits_{t\to\infty} \mu(\psi; t) = \infty$.

Це означає, що нерівності вигляду (18) не гарантують функціям $\psi \in \mathfrak{M}$ належності ані до множини $\mathfrak{M}_\infty$, ані до множини $\mathfrak{M}_0$. Звідси, зокрема, випливає, що множина $\mathfrak{M} \setminus (\mathfrak{M}_\infty \cup \mathfrak{M}_0)$ не є порожньою.

Доведення. Нехай $y = f(t)$ — довільна функція, що задовольняє умови твердження. Побудуємо функцію $\psi(t)$ таким чином. Нехай $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ — послідовність додатних чисел така, що при непарних значеннях i, $i = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$, $n_i = 1 + 1/k$, а при парних i n_i — довільні числа, які монотонно і необмежено зростають. Через a_1 позначимо деяке число з проміжку $t > 1$ і при деякому $\xi > 0$ розглянемо функцію $y_1(\xi, t)$, графіком якої є пряма $l_\xi^{(1)}$, що проходить через точки $(a_1, 2\xi)$ і $(n_1 a_1, \xi)$. Позначимо через ξ_1, $\xi_1 > 0$, таке значення ξ, при якому справджується нерівність

$$y_1(\xi_1, t) \le f(t), \quad t > 1.$$

При довільному значенні ξ лінія $l_\xi^{(1)}$ перетинає вісь Ot в точці $(2n_1 - 1)a_1$, тому таке значення ξ_1 завжди знайдеться.

Далі, покладемо $(2n_1 - 1)a_1 = a_2$ і при $\xi > 0$ розглянемо функцію $y_2(\xi, t)$, графіком якої є лінія $l_\xi^{(2)}$, що проходить через точки $(a_2, 2\xi)$ і $(n_2 a_2, \xi)$. Через ξ_2 позначимо число, для якого

$$y_2(\xi_2, t) \le f(t), \quad t > 1,$$

і, окрім того, лінії $l_{\xi_1}^{(1)}$ та $l_{\xi_2}^{(2)}$ перетинаються в деякій точці b_1, що лежить на проміжку $[n_1 a_1, (2n_1 - 1)a_1)$. Таке число ξ_2 знайдеться, бо лінія $l_\xi^{(2)}$ перетинає вісь Ot в точці $(2n_2 - 1)a_2$, що не залежить від ξ.

Покладемо $(2n_2 - 1)a_2 = a_3$ і продовжимо процес побудови функцій $y_i(\xi_i, t)$, $i = 3, 4, \ldots$. При цьому k-й, $k \ge 3$, крок полягає в наступному. Покладемо

$a_k = (2n_{k-1} - 1)a_{k-1}$, розглянемо функцію $y_k(\xi, t)$, графіком якої є пряма $l_\xi^{(k)}$, що проходить через точки $(a_k, 2\xi)$ і $(n_k a_k, \xi)$, знайдемо значення ξ_k, для якого

$$y_k(\xi_k, t) \le f(t), \quad t > 1, \tag{21}$$

і, окрім того, лінії $l_{\xi_{k-1}}^{(k-1)}$ та $l_{\xi_k}^{(k)}$ перетинаються в деякій точці b_{k-1} з проміжку $[n_{k-1}a_{k-1}, (2n_{k-1} - 1)a_{k-1})$.

В результаті буде побудовано:

1) послідовність точок a_k таких, що

$$a_k = (2n_{k-1} - 1)a_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots;$$

2) послідовність точок b_k, для яких

$$n_k a_k \le b_k < (2n_k - 1)a_k, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

3) послідовність лінійних функцій $y_k(\xi_k, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, для яких справджується співвідношення (21) і лінії $l_{\xi_{k-1}}^{(k-1)}$ та $l_{\xi_k}^{(k)}$ перетинаються в точках b_k.

Після цього покладемо

$$\psi(t) = y_k(\xi_k, t), \qquad t \in [b_{k-1}, b_k], \quad k = 1, 2, \ldots, \quad b_0 \overset{\text{df}}{=} 1.$$

Графіком функції $\psi(t)$ є ламана лінія з вузлами в точках b_k, яка за побудовою є опуклою донизу при всіх $t > 1$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Тобто $\psi \in \mathfrak{M}$ і для неї справджується оцінка (20). Водночас на кожному проміжку $[a_k, n_k a_k]$ функція $\psi(t)$ зменшується вдвічі. Тому $\eta(\psi, a_k) = n_k a_k$ і, отже, $\dfrac{\eta(\psi, a_k) - a_k}{a_k} = n_k - 1$. Звідси на підставі того, що

$$\frac{\eta(\psi, a_{2k-1}) - a_{2k-1}}{a_{2k-1}} = \frac{1}{k}, \quad \text{а} \quad \frac{\eta(\psi, a_{2k}) - a_{2k}}{a_{2k}} = n_{2k} - 1,$$

отримуємо потрібні співвідношення:

$$\varliminf_{t\to\infty} \mu(\psi; t) = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(\psi, a_{2k-1}) - a_{2k-1}}{a_{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

і

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mu(\psi; t) = \lim_{k\to\infty} \frac{\eta(\psi, a_{2k}) - a_{2k}}{a_{2k}} = \lim_{k\to\infty} (n_{2k} - 1) = \infty.$$

Наступне твердження показує, що нерівності вигляду (17) також не гарантують функціям $\psi \in \mathfrak{M}$ належності до множини $\mathfrak{M}_0$.

Теорема 3. *Якою б не була незростаюча при $t \ge 1$ функція $f(t)$ така, що $f(t) > 0$ при $t \ge 1$, і для якої $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, знайдеться функція $\psi \in \mathfrak{M}$ така, що*

$$f(t) < \psi(t) \quad \forall t \ge 1 \tag{22}$$

і при цьому величина $\mu(\psi; t)$ є необмеженою.

Доведення. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $f(t) < 1$. Проміжок $y \in (0, 1]$ розіб'ємо точками $y_k = \dfrac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$, і через t_k позначимо точки, для яких $f(t_k) = y_k$. У випадку, коли при деякому k таких точок є багато, через t_k позначимо найбільшу з них, тобто

$$t_k = \max\{t : \; y(t) = y_k\}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Таким чином, будемо мати

$$f(t) < y_k, \qquad t > t_k, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Передусім на проміжку $[1, t_1]$ функцію ψ означимо так, щоб її графіком була лінія l_0, яка з'єднує $(1, 2)$ та $(t_1, 1)$. При цьому менший із кутів, під якими l_0 перетинає пряму $y = 1$, позначимо через α_0. Лінія l_0 перетинає графік функції $f(t)$ в деякій точці $\bar{t}_0 > t_1$.

Далі, для побудови функції ψ застосуємо процедуру, на першому кроці якої візьмемо довільне число $\xi > \max\left\{t_2, \bar{t}_0\right\}$ і розглянемо лінію $l(\xi) = l(\xi; t)$, що з'єднує точки $\left(\xi, \dfrac{1}{2^1}\right)$ та $\left(\xi + \sqrt{\xi}, \dfrac{1}{2^2}\right)$. Менший із кутів, під якими $l(\xi)$ перетинає пряму $y = \dfrac{1}{2^2}$, позначимо через α_2. Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{2^2 \sqrt{\xi}},$$

і тому кут α_2 неперервно зменшується з ростом ξ. Звідси випливає, що знайдеться значення $\xi = t_2'$, $t_2' > \max\left\{t_2, \bar{t}_0\right\}$, таке, що точка перетину t_1' прямих l_0 та $l(\xi)$ буде лежати справа від точки t_1, тобто $t_1' > t_1$. Лінію $l(\xi)$ при $\xi = t_2'$ позначимо через l_2. Тоді функцію $\psi(t)$ на проміжку $\left[t_1, t_2' + \sqrt{t_2'}\,\right]$ означимо так, щоб її графік при $t \in \left[t_2', t_2' + \sqrt{t_2'}\,\right]$ збігався з лінією l_2, а на проміжку $[t_1, t_2')$ — з лінією l_1, яка сполучає точки $(t_1, 1)$ та $\left(t_2', \dfrac{1}{2^1}\right)$.

Таким чином, функцію $\psi(t)$ буде означено при всіх $t \in \left[1, t_2' + \sqrt{t_2'}\,\right]$. Вона є опуклою і задовольняє співвідношення (22).

На другому кроці візьмемо довільне число $\xi > \max\left\{t_4, \bar{t}_2\right\}$, де $\bar{t}_2$ — точка перетину прямої l_2 із графіком функції $f(t)$. Розглянемо лінію $l(\xi) = l(\xi; t)$, що з'єднує точки $\left(\xi, \dfrac{1}{2^3}\right)$ та $\left(\xi + \sqrt{\xi}, \dfrac{1}{2^4}\right)$. Менший із кутів, під якими $l(\xi)$ перетинає пряму $y = \dfrac{1}{2^4}$, позначимо через α_k. Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{1}{2^4 \sqrt{\xi}},$$

і кут α_4 знову неперервно зменшується з ростом ξ. Тому знайдеться значення $\xi = t_4'$, $t_4' > \max\left\{t_4, \bar{t}_2\right\}$, таке, що точка перетину t_3' прямих l_2 та $l(\xi)$ буде лежати справа від точки $t_2' + \sqrt{t_2'}$, тобто $t_3' > t_2' + \sqrt{t_2'}$. Лінію $l(\xi)$ при $\xi = t_4'$ позначимо через l_4. Тоді функцію $\psi(t)$ на проміжку $\left[t_2' + \sqrt{t_2'}, t_4' + \sqrt{t_4'}\,\right]$ означимо так, щоб її графік при $t \in \left[t_4', t_4' + \sqrt{t_4'}\,\right]$ збігався з лінією l_4, а на проміжку

$\left[t_2' + \sqrt{t_2'}, t_4'\right)$ — з лінією l_3, яка сполучає точки $\left(t_2' + \sqrt{t_2'}, \dfrac{1}{2^2}\right)$ та $\left(t_4', \dfrac{1}{2^3}\right)$. Тим самим функцію $\psi(t)$ означено при всіх $t \in \left[1, t_4' + \sqrt{t_4'}\right]$. Вона є опуклою і задовольняє співвідношення (22).

Продовжуючи цей процес далі, на деякому, наприклад k-му, кроці візьмемо довільне число $\xi > \max\left\{t_{2k}, \bar{t}_{2k-2}\right\}$, де $\bar{t}_{2k-2}$ — точка перетину прямої l_{2k-2} із графіком функції $f(t)$. Розглянемо лінію $l(\xi) = l(\xi; t)$, що з'єднує точки $\left(\xi, \dfrac{1}{2^{2k-1}}\right)$ та $\left(\xi + \sqrt{\xi}, \dfrac{1}{2^{2k}}\right)$. Менший із кутів, під якими $l(\xi)$ перетинає пряму $y = \dfrac{1}{2^{2k}}$, позначимо через α_{2k}. Тоді

$$\operatorname{tg} \alpha_{2k} = \frac{1}{2^{2k}\sqrt{\xi}},$$

і кут α_{2k} неперервно зменшується з ростом ξ. Тому знайдеться значення $\xi = t_{2k}'$, $t_{2k}' > \max\left\{t_{2k}, \bar{t}_{2k-2}\right\}$, таке, що точка перетину t_{2k-1}' прямих l_{2k-2} та $l(\xi)$ буде лежати справа від точки $t_{2k-2}' + \sqrt{t_{2k-2}'}$, тобто $t_{2k-1}' > t_{2k-2}' + \sqrt{t_{2k-2}'}$. Лінію $l(\xi)$ при $\xi = t_{2k}'$ позначимо через l_{2k}. Тоді функцію $\psi(t)$ на проміжку $\left[t_{2k-2}' + \sqrt{t_{2k-2}'}, t_{2k}' + \sqrt{t_{2k}'}\right]$ означимо так, щоб її графік при $t \in \left[t_{2k}', t_{2k}' + \sqrt{t_{2k}'}\right]$ збігався з лінією l_{2k}, а на проміжку $\left[t_{2k-2}' + \sqrt{t_{2k-2}'}, t_{2k}'\right)$ — з лінією l_{2k-1}, яка сполучає точки $\left(t_{2k-2}' + \sqrt{t_{2k-2}'}, \dfrac{1}{2^{2k-2}}\right)$ та $\left(t_{2k}', \dfrac{1}{2^{2k-1}}\right)$. Тим самим функцію $\psi(t)$ означено при всіх $t \in \left[1, t_{2k}' + \sqrt{t_{2k}'}\right]$. Вона є опуклою і задовольняє співвідношення (22).

В результаті такого процесу буде побудовано функцію $\psi(t)$, графіком якої є ламана лінія з вузлами в точках $(1, 2)$, $(t_1, 1)$, $\left(t_{2k}', \dfrac{1}{2^{2k-1}}\right)$ та $\left(t_{2k}' + \sqrt{t_{2k}'}, \dfrac{1}{2^{2k}}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$. Ця функція за побудовою є опуклою донизу при всіх $t > 1$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Тобто $\psi \in \mathfrak{M}$ і для неї справджується оцінка (22). Водночас на кожному із проміжків $\left(t_{2k}', t_{2k}' + \sqrt{t_{2k}'}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, функція $\psi(t)$ зменшується вдвічі. Тому $\eta(\psi, t_{2k}') = t_{2k}' + \sqrt{t_{2k}'}$ і, отже,

$$\frac{t_{2k}'}{\eta(\psi, t_{2k}') - t_{2k}'} = \sqrt{t_{2k}'} \longrightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким чином, теореми 2 і 3, зокрема, показують, що нерівності вигляду (17) та (18), взагалі кажучи, не гарантують функції $\psi \in \mathfrak{M}$ належності до множин $\mathfrak{M}_\infty$ та $\mathfrak{M}_0$ відповідно.

Розглянемо тепер випадок, коли для даної функції $\psi(t) \in \mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$\psi_1(t) \le \psi(t) \le \psi_2(t) \quad \forall t \ge 1, \tag{23}$$

де ψ_1, ψ_2 — деякі функції з множини $\mathfrak{M}$. Позначимо через $\psi_1^{-1}(\xi)$ та $\psi_2^{-1}(\xi)$ функції, обернені відповідно до функцій ψ_1 та ψ_2. Внаслідок строгої монотонності функцій ψ_1 та ψ_2 ці функції визначаються однозначно для довільного $\xi \in (0, \psi_1(1)]$.

У прийнятих позначеннях справедливим є наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а ψ_2 — довільна неперервна спадна на проміжку $[1,\infty)$ функція така, що при кожному $t \geq 1$ виконується нерівність $\psi_2(t) \geq \psi_1(t)$, і*

$$\overline{\lim_{\xi\to 0}} \frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} = \infty. \tag{24}$$

Тоді існує функція $\psi \in \mathfrak{M}$, для якої виконується співвідношення (23), *і при цьому величина $1/\mu(\psi;t)$ не є обмеженою.*

Доведення. Нехай функції ψ_1 та ψ_2 задовольняють умови даного твердження. Тоді внаслідок (24) існує монотонно спадна до нуля послідовність чисел $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t'_k - t_k}{t_k} = \infty, \qquad t_k = \psi_1^{-1}(\xi_k), \quad t'_k = \psi_2^{-1}(\xi_k). \tag{25}$$

Шукану функцію ψ можна будувати, наприклад, таким чином.

Насамперед розглянемо функцію $y_1(\xi_1, t)$, графіком якої є пряма l_1, що проходить через точки $(t_1; \xi_1)$ та $\big(t'_1; \psi_1(t'_1)\big)$. Тоді для будь-якого $t \in (t_1, t'_1)$ будемо мати

$$\psi_1(t) \leq y_1(\xi_1, t) \leq \psi_2(t).$$

На наступному кроці позначимо через ξ_{i_2}, $i_2 \geq 2$, найближчий зліва від точки $\psi_1(t'_1)$ елемент послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Послідовність $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно спадає до нуля, тому таке значення завжди знайдеться.

Розглянемо функцію $y_2(\xi_{i_2}, t)$, графіком якої є пряма l_2, що проходить через точки $(t_{i_2}; \xi_{i_2})$ та $\big({t'}_{i_2}; \psi_1({t'}_{i_2})\big)$. Тоді для будь-якого $t \in (t_{i_2}, {t'}_{i_2})$ знову будемо мати

$$\psi_1(t) \leq y_2(\xi_{i_2}, t) \leq \psi_2(t).$$

Далі, позначимо через ξ_{i_3}, $i_3 > i_2$, найближчий зліва від точки $\psi_1({t'}_{i_2})$ елемент послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ і продовжимо процес побудови функцій $y_k(\xi_k, t)$ при $k = 3, 4, \ldots$. При цьому k-й крок буде полягати в наступному. Позначимо через ξ_{i_k}, $i_k > i_{k-1}$, найближчий зліва від точки $\psi_1({t'}_{i_{k-1}})$ елемент послідовності $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Розглянемо функцію $y_k(\xi_{i_k}, t)$, графіком якої є пряма l_k, що проходить через точки $(t_{i_k}; \xi_{i_k})$ та $\big({t'}_{i_k}; \psi_1({t'}_{i_k})\big)$. Тоді, аналогічно, для будь-якого $t \in (t_{i_k}, {t'}_{i_k})$

$$\psi_1(t) \leq y_k(\xi_{i_k}, t) \leq \psi_2(t). \tag{26}$$

Таким чином буде побудовано послідовність лінійних функцій $y_k(\xi_{i_k}, t)$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} 1$, для яких при кожному $t \in (t_{i_k}, {t'}_{i_k})$ буде справджуватись співвідношення (26).

Після цього покладемо

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t \in [{t'}_{i_k}, t_{i_{k+1}}), \quad k = 0, 1, \ldots, \ {t'}_{i_0} \stackrel{\mathrm{df}}{=} 1, \\ y_k(\xi_{i_k}, t), & t \in [t_{i_k}, {t'}_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

За побудовою дана функція $\psi(t)$ є опуклою донизу при всіх $t > 1$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Тобто $\psi \in \mathfrak{M}$ і для неї на підставі (26) справджується оцінка (23). Водночас якщо позначити через α_k гострі кути між прямими l_k і $y = \xi_{i_k}/2$, то будемо мати

$$\operatorname{tg}\alpha_k = \frac{\psi_1(t_{i_k}) - \psi_1({t'}_{i_k})}{{t'}_{i_k} - t_{i_k}}$$

і

$$\frac{1}{\mu(\psi, t_{i_k})} = \frac{\eta(\psi, t_{i_k}) - t_{i_k}}{t_{i_k}} = \frac{\psi_1(t_{i_k})}{2t_{i_k}\operatorname{tg}\alpha_k} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{{t'}_{i_k} - t_{i_k}}{t_{i_k}}\,\frac{\psi_1(t_{i_k})}{\psi_1(t_{i_k}) - \psi_1({t'}_{i_k})} \geq \frac{1}{2}\,\frac{{t'}_{i_k} - t_{i_k}}{t_{i_k}}.$$

Звідси з огляду на (25) робимо висновок, що величина $1/\mu(\psi, t)$ не є обмеженою, що і потрібно було довести.

На підставі твердження B для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_C$ виконується співвідношення (19). Однак із теореми 4 випливає, що умова (19) не гарантує належності функції $\psi \in \mathfrak{M}$ навіть до множини $\mathfrak{M}_\infty$.

Дійсно, якщо покласти для будь-якого $t \geq 1$ $\psi_1(t) = t^{-r_1}$, а $\psi_2(t) = t^{-r_2}$, де $r_1 > r_2 > 0$, то для будь-якого $\xi \in (0, 1)$ будемо мати

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} = \frac{\xi^{-\frac{1}{r_2}} - \xi^{-\frac{1}{r_1}}}{\xi^{-\frac{1}{r_1}}} = \xi^{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} - 1 \longrightarrow \infty \quad \text{при} \quad \xi \to 0.$$

Отже, існує функція $\psi \in \mathfrak{M}$, для якої при всіх $t \geq 1$ справджується нерівність

$$t^{-r_1} \leq \psi(t) \leq t^{-r_2},$$

яка, однак, не належить множині $\mathfrak{M}_\infty$.

Разом з тим у випадку, коли

$$\varlimsup_{\xi\to 0} \frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} < \infty,$$

умова (23) вже забезпечує належність функції ψ до множини $\mathfrak{M}_\infty$.

Теорема 5. *Нехай $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$, а ψ_1 — довільна неперервна додатна спадна на проміжку $[1, \infty)$ функція така, що $\psi_1(t) \leq \psi_2(t)$ $\forall t \geq 1$, і при будь-якому $\xi \in (0, \psi_1(1))$*

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} \leq K_1, \tag{27}$$

де K_1 — деяка додатна стала, що не залежить від параметра ξ. Тоді кожна функція $\psi \in \mathfrak{M}$, яка задовольняє співвідношення (23), *належить множині $\mathfrak{M}_\infty$.*

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$, яка задовольняє співвідношення (23), і при будь-якому $t \geq 1$ покладемо $\xi = \psi(t)$. Для даного ξ через t_ξ та t'_ξ позначимо значення параметра t такі, що $\psi_1^{-1}(\xi) = t_\xi$ і $\psi_2^{-1}(\xi) = t'_\xi$. Тоді на підставі (23) маємо

$$t_\xi \leq t \leq t'_\xi \quad \text{і} \quad \eta(\psi_1; t_\xi) \leq \eta(\psi; t) \leq \eta(\psi_2; t'_\xi).$$

Звідси випливає, що $\eta(\psi;t)-t \leq \eta(\psi_2;t'_\xi)-t_\xi$. Тому внаслідок (27) та того, що $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$, отримуємо

$$\frac{1}{\mu(\psi;t)} = \frac{\eta(\psi;t)-t}{t} \leq \frac{\eta(\psi_2;t'_\xi)-t_\xi}{t_\xi} = \frac{\eta(\psi_2;t'_\xi)-t'_\xi}{t_\xi} + \frac{t'_\xi - t_\xi}{t_\xi} =$$

$$= \frac{\eta(\psi_2;t'_\xi)-t'_\xi}{t'_\xi}\frac{\psi_2^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} + \frac{\psi_2^{-1}(\xi)-\psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} \leq$$

$$\leq (K_1+1)\frac{\eta(\psi_2;t'_\xi)-t'_\xi}{t'_\xi} + K_1 \leq K, \quad K = \text{const}.$$

Тобто величина $1/\mu(t;\psi)$ обмежена на всьому проміжку $[1,\infty)$, і, отже, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Наступне твердження дає достатні умови виконання співвідношення (27).

Теорема 6. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, а ψ_2 — деяка неперервна додатна спадна до нуля на проміжку $[1,\infty)$ функція така, що при кожному $t \geq 1$ справджується нерівність $\psi_1(t) \leq \psi_2(t)$. Тоді*:

1) *якщо $\psi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$ і виконується співвідношення*

$$\frac{\psi_2(t)-\psi_1(t)}{\psi_1(t)} \leq K_1 \quad t \geq 1, \tag{28}$$

де K_1 — деяка додатна стала, що не залежить від t, то існує стала K_2 така, що при будь-якому $\xi \in (0,\psi_1(1)]$

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi)-\psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} \leq K_2; \tag{29}$$

2) *якщо ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_0$, то із співвідношення* (29) *випливає нерівність* (28);

3) *якщо ж функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_C$, то умови* (28) *та* (29) *є рівносильними.*

Доведення. Покажемо спочатку, що коли $\psi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$ і виконується співвідношення (28), то справджується і нерівність (29). Припустимо, що це не так, і існує спадна послідовність чисел $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ така, що

$$\lim_{i\to\infty}\frac{t'_{\xi_i}-t_{\xi_i}}{t_{\xi_i}} = \infty, \qquad t_{\xi_i} = \psi_1^{-1}(\xi_i), \quad t'_{\xi_i} = \psi_2^{-1}(\xi_i).$$

Для будь-якого $\xi \in (0,\psi_1(1)]$ та довільного $k \in \mathbb{N}$ через $t_\xi^{(k)}$ позначимо таке число, для якого виконується рівність $\psi_1\left(t_\xi^{(k)}\right) = \dfrac{\xi}{2^k}$, $t_\xi^{(0)} \overset{\text{df}}{=} t_\xi$. Тоді для довільного $k \in \mathbb{N}$ $t_\xi^{(k)} = \eta\left(\psi_1; t_\xi^{(k-1)}\right)$.

Функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_\infty$, тому існує стала $C_1 > 0$ така, що при будь-якому $t \geq 1$

$$\frac{\eta(\psi_1;t)-t}{t} \leq C_1.$$

Звідси випливає, що для довільних $\xi \in (0,\psi_1(1)]$ та $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\eta(\psi_1; t_\xi^{(k)}) - t_\xi}{t_\xi} = \frac{\eta(\psi_1; t_\xi^{(k)})}{t_\xi^{(k)}} \frac{\eta(\psi_1; t_\xi^{(k-1)})}{t_\xi^{(k-1)}} \cdots \frac{\eta(\psi_1; t_\xi^{(0)})}{t_\xi} - 1 \le (C_1+1)^{k+1} - 1.$$

Зокрема, при $\xi = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots,$

$$\frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_i}^{(k)}) - t_{\xi_i}}{t_{\xi_i}} \le (C_1+1)^{k+1} - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує номер i_k такий, що при всіх $i > i_k$ виконується нерівність

$$\frac{t'_{\xi_i} - t_{\xi_i}}{t_{\xi_i}} > \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_i}^{(k)}) - t_{\xi_i}}{t_{\xi_i}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Це означає, що $t'_{\xi_i} > \eta(\psi_1; t_{\xi_i}^{(k)})$, і тому справджуються наступні співвідношення:

$$\psi_1(t'_{\xi_i}) < \xi_i/2^k \quad \text{і} \quad \psi_2(t'_{\xi_i}) - \psi_1(t'_{\xi_i}) > \psi_1(t_{\xi_i}) - \psi_1\big(\eta(\psi_1; t_{\xi_i}^{(k)})\big) = \xi_i\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Звідси

$$\frac{\psi_2(t'_{\xi_i}) - \psi_1(t'_{\xi_i})}{\psi_1(t'_{\xi_i})} > \frac{\xi_i(1 - 1/2^{k+1})}{\xi_i/2^{k+1}} = 2^{k+1} - 1.$$

Таким чином, внаслідок довільності k отримуємо суперечність із нерівністю (28). Отже, припущення є хибним і виконується нерівність (29).

Покажемо тепер, що коли $\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, то із нерівності (29) випливає нерівність (28). Знову застосуємо метод від супротивного і припустимо, що існує зростаюча послідовність чисел $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ така, що величина $\dfrac{\psi_2(t_n) - \psi_1(t_n)}{\psi_1(t_n)}$ монотонно прямує до нескінченності при $n \to \infty$. Візьмемо довільне число $k \in \mathbb{N}$ і покладемо для будь-якого $n = 1, 2, \ldots$

$$\xi_n^{(k)} = 2^k \psi_1(t_n).$$

Оскільки $\psi_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то при досить великих n справджується нерівність $\xi_n^{(k)} < \psi_1(1)$, і тому знайдеться точка $t_{\xi_n^{(k)}}$ така, що $\psi_1(t_{\xi_n^{(k)}}) = \xi_n^{(k)}$, $t_{\xi_n^{(0)}} \overset{\text{df}}{=} t_n$.

На підставі припущення величина $\dfrac{\psi_2(t_n) - \psi_1(t_n)}{\psi_1(t_n)}$ монотонно прямує до нескінченності при $n \to \infty$. Тому починаючи з деякого номера n_k матимемо

$$\frac{\psi_2(t_n) - \psi_1(t_n)}{\psi_1(t_n)} = \frac{\psi_2(t_n) - \psi_1(t_n)}{\xi_n^{(k)}/2^k} > 2^k - 1.$$

Звідси випливає, що

$$\psi_2(t_n) - \psi_1(t_n) > \xi_n^{(k)}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \psi_1(t_{\xi_n^{(k)}}) - \psi_1(t_n),$$

а це означає, що $\psi_2(t_n) > \psi_1(t_{\xi_n^{(k)}})$ і $t'_{\xi_n^{(k)}} > t_n$, де $t'_{\xi_n^{(k)}} = \psi_2^{-1}\big(\xi_n^{(k)}\big)$.

Функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_0$, і тому існує стала $C_2 > 0$ така, що при будь-якому $t \geq 1$

$$\frac{\eta(\psi_1;t) - t}{t} \geq C_2.$$

Звідси внаслідок того, що $t_{\xi_n^{(k-1)}} = \eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(k)}})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, отримуємо

$$\frac{t_n - t_{\xi_n^{(k)}}}{t_{\xi_n^{(k)}}} = \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(1)}})}{t_{\xi_n^{(1)}}} \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(2)}})}{t_{\xi_n^{(2)}}} \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(3)}})}{t_{\xi_n^{(3)}}} \cdots \frac{\eta(\psi_1; t_{\xi_n^{(k)}})}{t_{\xi_n^{(k)}}} - 1 > (C_2 + 1)^k - 1.$$

Тоді для будь-яких $n > n_k$

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi_n^{(k)}) - \psi_1^{-1}(\xi_n^{(k)})}{\psi_1^{-1}(\xi_n^{(k)})} = \frac{t'_{\xi_n^{(k)}} - t_{\xi_n^{(k)}}}{t_{\xi_n^{(k)}}} > \frac{t_n - t_{\xi_n^{(k)}}}{t_{\xi_n^{(k)}}} > (C_2 + 1)^k - 1.$$

Тобто отримали співвідношення, яке внаслідок довільності k суперечить умові (29). Тому і в цьому разі припущення є хибним і виконується співвідношення (28).

Оскільки $\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty$, то твердження пункту 3 даної теореми випливає із щойно доведених перших двох пунктів.

***Зауваження* 1.** Існують функції $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для яких справджується співвідношення (29), однак не справджується співвідношення (28).

Дійсно, покладемо $\psi_1(t) = e^{-t^2 - t}$, $\psi_2(t) = e^{-t^2}$. Тоді будемо мати

$$\frac{\psi_2(t) - \psi_1(t)}{\psi_1(t)} = \frac{e^{-t^2}}{e^{-t^2 - t}} - 1 = e^t - 1 \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

однак

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} = \frac{\sqrt{\ln(1/\xi)}}{(\sqrt{1 - 4\ln\xi} - 1)/2} - 1 = \frac{2}{\sqrt{4 - \dfrac{1}{\ln(1/\xi)}} - \dfrac{1}{\sqrt{\ln(1/\xi)}}} - 1 \underset{\xi \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

***Зауваження* 2.** Існують функції $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_0^+$, для яких справджується співвідношення (28), однак не справджується співвідношення (29).

Дійсно, покладемо $\psi_1(t) = \dfrac{1}{\ln t + \sqrt{\ln t}}$, $\psi_2(t) = \dfrac{1}{\ln t}$. Тоді

$$\frac{\psi_2(t) - \psi_1(t)}{\psi_1(t)} = \frac{\dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{\ln t + \sqrt{\ln t}}}{\dfrac{1}{\ln t + \sqrt{\ln t}}} = \frac{1}{\sqrt{\ln t}} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

проте

$$\frac{\psi_2^{-1}(\xi) - \psi_1^{-1}(\xi)}{\psi_1^{-1}(\xi)} = \frac{e^{\frac{1}{\xi}}}{e^{\frac{\xi + 2 - \sqrt{\xi^2 + 4\xi}}{2\xi}}} - 1 = e^{\frac{\sqrt{\xi^2 + 4\xi} - \xi}{2\xi}} \underset{\xi \to 0}{\longrightarrow} \infty.$$

Із теорем 5 та 6 випливає наступний наслідок.

Наслідок 4. *Нехай функції* $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$ *такі, що для будь-якого* $t \geq 1$ *справджуються нерівності* $\psi_1(t) \leq \psi_2(t)$ *і*

$$\frac{\psi_2(t) - \psi_1(t)}{\psi_1(t)} \leq K,$$

де K *— деяка додатна стала. Тоді довільна функція* $\psi \in \mathfrak{M}$, *що задовольняє співвідношення*

$$\psi_1(t) \leq \psi(t) \leq \psi_2(t) \quad \forall t \geq 1,$$

належить множині $\mathfrak{M}_\infty$.

Наступне твердження встановлює зв'язок між поведінкою відношення двох функцій $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}$ і поведінкою відношення величин $\eta(\psi_1; t)$ та $\eta(\psi_2; t)$.

Теорема 7. *Якщо* $\psi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$, *а функція* $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ *така, що*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} = K, \quad K \in (0, \infty), \tag{30}$$

то справджується співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = 1, \qquad \eta_1(t) = \eta(\psi_1; t), \quad \eta_2(t) = \eta(\psi_2; t), \tag{31}$$

і $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$. *Якщо ж в умові даного твердження функція* ψ_1 *належить множині* $\mathfrak{M}_C$, *то функція* ψ_2 *також буде належати множині* $\mathfrak{M}_C$.

Разом з тим існують функції $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}_0^+$, *для яких виконується умова* (30) *і не виконується співвідношення* (31).

Доведення. Якщо виконується (30), то

$$\psi_1(t) = \psi_2(t)(K + \varepsilon(t)), \tag{32}$$

де $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тому для довільного $t > 1$

$$\psi_1(\eta_2(t)) = \psi_2(\eta_2(t))(K + \varepsilon(\eta_2(t))) = \frac{\psi_2(t)}{2}\Big(K + \varepsilon(\eta_2(t))\Big) =$$

$$= \frac{\psi_1(t)}{2}\frac{K + \varepsilon(\eta_2(t))}{K + \varepsilon(t)} = \psi_1(\eta_1(t))\frac{K + \varepsilon(\eta_2(t))}{K + \varepsilon(t)}. \tag{33}$$

Оскільки завжди $\eta_2(t) > t$, то величина

$$r(t) = \frac{K + \varepsilon(\eta_2(t))}{K + \varepsilon(t)}$$

прямує до одиниці при $t \to \infty$, тому на підставі (33) маємо

$$\frac{\psi_1(\eta_2(t))}{\psi_1(\eta_1(t))} - 1 = \gamma(t), \quad \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0. \tag{34}$$

Звідси

$$|\gamma(t)| = \frac{\big|\psi_1(\eta_2(t)) - \psi_1(\eta_1(t))\big|}{\psi_1(\eta_1(t))} = \frac{\left|\displaystyle\int_{\eta_1(t)}^{\eta_2(t)} \psi_1{}'(\xi)d\xi\right|}{\psi_1(\eta_1(t))}. \tag{35}$$

Якщо в даній точці t $\eta_1(t) \geq \eta_2(t)$, то внаслідок (35)

$$|\gamma(t)| \geq \frac{|\psi_1'(\eta_1(t))|\eta_1(t)\left(1 - \dfrac{\eta_2(t)}{\eta_1(t)}\right)}{\psi_1(\eta_1(t))}. \tag{36}$$

Функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_\infty$, тому згідно з твердженням А знайдеться число K_1 таке, що при довільному $x \geq 1$

$$\frac{x|\psi_1'(x)|}{\psi_1(x)} \geq K_1.$$

Тоді внаслідок (36) матимемо

$$\big|\gamma(t)\big| \geq K_1\left(1 - \frac{\eta_2(t)}{\eta_1(t)}\right). \tag{37}$$

Якщо ж в точці t $\eta_1(t) < \eta_2(t)$, то згідно з (35)

$$\big|\gamma(t)\big| \geq \frac{2\big|\psi_1'(\eta_2(t))\big|\,\eta_2(t)\left(1 - \dfrac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}\right)}{\psi_1(t)}.$$

На підставі (32) маємо

$$\frac{\psi_1(t)}{2} = \frac{\psi_2(t)}{2}\big(K + \varepsilon(t)\big) = \psi_2(\eta_2(t))\big(K + \varepsilon(t)\big) = \psi_1(\eta_2(t))\frac{K + \varepsilon(t)}{K + \varepsilon(\eta_2(t))}.$$

Тому при досить великих t та $x = \eta_2(t)$

$$\big|\gamma(t)\big| \geq \frac{x|\psi_1'(x)|}{\psi_1(x)}\left(1 - \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}\right)\frac{K + \varepsilon(\eta_2(t))}{K + \varepsilon(t)} \geq K_2\left(1 - \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)}\right), \tag{38}$$

де K_2 — деяка додатна стала.

Згідно з (34) $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$. Тому із (37) та (38) одержуємо (31).

Включення $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty$ отримуємо із наступного твердження, яке легко випливає із означення поняття границі функції та співвідношень (1) – (3):

якщо для функцій $\psi_1 \in \mathfrak{M}$ та $\psi_2 \in \mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = 1, \qquad \eta_1(t) = \eta(\psi_1; t), \quad \eta_2(t) = \eta(\psi_2; t),$$

то властивості цих функцій збігаються в тому сенсі, що якщо одна з цих функцій належить множині $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ або $\mathfrak{M}_C$, то й інша функція належить цій самій множині.

Зрозуміло, що якщо в умові теореми 7 функція ψ_1 належить множині $\mathfrak{M}_C$, то аналогічно випливає, що і функція ψ_2 належить $\mathfrak{M}_C$.

Для завершення доведення теореми достатньо вказати пару функцій із множини $\mathfrak{M}_0^+$, для яких виконується умова (30) і не виконується співвідношення (31).

Роль таких функцій, зокрема, можуть відігравати функції $\psi_1(t) = \dfrac{1}{\ln t + \sqrt{\ln t}}$ та $\psi_2(t) = \dfrac{1}{\ln t}$. Для цих функцій

$$\eta_1(t) = \exp\left(\frac{1}{2} + 2\ln t + 2\sqrt{\ln t} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8(\ln t + \sqrt{\ln t})}\right), \quad \eta_2(t) = \exp(2\ln t).$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\exp\left(\dfrac{1}{2} + 2\ln t + 2\sqrt{\ln t} - \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + 8(\ln t + \sqrt{\ln t})}\right)}{\exp(2\ln t)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\exp\left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{\ln t} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\ln t + 2\sqrt{\ln t}}\right) = \infty,$$

однак

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{\ln t + \sqrt{\ln t}} = 1.$$

***Зауваження* 3.** Існують функції $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для яких справджується співвідношення (31), однак не справджується співвідношення (30).

Дійсно, покладемо при всіх $t \geq 1$ $\psi_1(t) = e^{-t^2-t}$, $\psi_2(t) = e^{-t^2}$. Тоді будемо мати

$$\eta_1(t) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\ln\frac{1}{2} + 4t^2 + 4t} - \frac{1}{2}, \quad \eta_2(t) = \sqrt{t^2 - \ln\frac{1}{2}}.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta_1(t)}{\eta_2(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1 - 4\ln\dfrac{1}{2} + 4t^2 + 4t} - 1}{2\sqrt{t^2 - \ln\dfrac{1}{2}}} = 1,$$

проте

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t^2-t}}{e^{-t^2}} = 0.$$

Зазначимо, що зв'язок між розбиттям множини $\mathfrak{M}$ на множини $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ та $\mathfrak{M}_C$ і розбиттям множини $\mathfrak{M}$ з урахуванням відомих умов Барі – Стєчкіна вивчався у роботі [4].

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688 – 702.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. II. – С. 159 – 176.
4. *Тихонов С. Ю.* Об эквивалентности некоторых условий для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 3. – С. 427 – 431.

Одержано 03.07.2006