УДК 62–501.52

М. В. Тригуб, канд. техн. наук (Ун-т радиоэлектроники, Харьков)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

The problem of an approximately optimal stabilization of quasilinear systems with geometrical constraints on the control is considered. By using the idea of global Krotov's estimates, we substantiate the approximation method for the optimal stabilization control and suggest an error estimate in terms of a functional.

Розглядається задача наближено-оптимальної стабілізації квазілінійних систем при наявності геометричних обмежень на керування. При застосуванні ідеї глобальних оцінок Кротова обгрунтовується метод апроксимації оптимального стабілізуючого керування і пропонується оцінка похибки за функціоналом.

1. Введение. В задачах синтеза управления многими техническими объектами, работающими в колебательно-вращательном режиме, приходится рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений, квазилинейные по координатам вектора состояния объекта и линейные по координатам вектора управления.

Оптимальная стабилизация таких систем без учета ограничений на управляющие воздействия и с квадратичным критерием качества рассматривалась в работе [1].

Следует отметить, что задачи синтеза управления, удовлетворяющего наперед заданному ограничению, наиболее полно исследованы для линейных систем. Так, в работах [2, 3] предложен удобный и достаточно общий метод синтеза приближенно-оптимального управления для линейных систем при наличии геометрических ограничений на управляющие воздействия. Функционал качества, рассматриваемый в работах [2, 3], представляет собой сумму двух слагаемых, одно из которых является определенно-положительной квадратичной формой фазовых координат, а другое может быть тождественным нулем, суммой квадратов или суммой модулей управляющих воздействий с определенными весовыми коэффициентами.

В настоящей статье предлагается метод приближенно-оптимальной стабилизации систем, исследованных в работе [1], но с учетом геометрических ограничений на управляющие воздействия. Функционал качества рассматривается такой же, как и в работах [2, 3]. Предлагаемый метод является развитием результатов [4] и позволяет для нелинейных систем за счет выбора малого параметра значительно расширить область стабилизации, полученную в [4].

2. Постановка задачи. Поведение управляемой системы описывается дифференциальным уравнением возмущенного движения

$$\dot{x} = Ax + Du + \mu\varphi(x), \tag{1}$$

где μ — малый параматр; компоненты вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x))^T$ — аналитические в некоторой ограниченной области $G_1 \subset R^n$, содержащей начало координат $x = 0$

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_i^{(k)}(x) \tag{2}$$

(символ (k) означает порядок формы); $A = \left\| a_j^i \right\|_n^n$ и $A = \left\| d_s^i \right\|_m^n$ — матрицы с элементами a_j^i и d_s^i соответственно; компоненты вектор-функции $x(t, \mu) =$ $= (x_1(t, \mu), \ldots, x_n(t, \mu))^T \in R^n$ абсолютно непрерывны, а компоненты вектор-функции $u(t, \mu) = (u_1(t, \mu), \ldots, u_m(t, \mu))^T \in R^m$ измеримы и удовлетворяют ограничениям вида

$$|u_s| \leq u_s^*, \quad s = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Заданы замкнутые области $G \subseteq G_1$, $G_0 \subset G$ $(x_0 \in G_0)$ и функционал

$$\mathcal{T}(x_0, u) = \int_0^\infty \left[\omega^{(2)}(x) + \sum_{s=1}^m P_s(u_s) \right] dt, \tag{4}$$

где $\omega^{(2)}(x)$ — определенно-положительная квадратичная форма, а неотрицательные функции $P_s(u_s)$, $s = \overline{1, m}$, принимает один из следующих видов: a) $P_s(u_s) = 0$; b) $P_s(u_s) = \delta_s (u_s)^2$; c) $P_s(u_s) = \delta_s |u_s|$.

Рассматривается задача оптимальной стабилизации системы (1) в области $G \subseteq G_1$, содержащей все оптимальные траектории, исходящие из области начальных возмущений $G_0 \subset G$.

Так как в принятом классе V_4 всех вектор-функций $u(x(t), \mu)$, удовлетворяющих (1) и (3) при всех $x_0 \in G_0$, строго оптимальной функции может не существовать или построение ее представляет большие трудности, то, следуя [2, 4], для любого $\varepsilon > 0$ требуется найти функцию $\overline{u}(x(t), \mu)$, удовлетворяющую условию

$$\left| \mathcal{T}(x_0, \overline{u}(x, \mu)) - \inf_{\{u\}} \mathcal{T}(x_0, u) \right| \leq \varepsilon.$$

3. Метод решения. Задача оптимальной стабилизации будет решена, если удастся найти гладкую функцию $V(x, \mu)$, удовлетворяющую нелинейному уравнению в частных производных [2, 4]:

$$B(x, V(x, \mu), \mu) = \omega^{(2)}(x) + \left(\frac{\partial V(x, \mu)}{\partial x}, Ax + \mu\varphi(x) \right) + \sum_{s=1}^m F_s^*(\xi_s) = 0, \tag{5}$$

где

$$F_s^*(\xi_s) = \inf_{|u_s| \leq u_s^*} F_s(\xi_s, u_s), \tag{6}$$

$$F_s(\xi_s, u_s) = \xi_s u_s + P_s(u_s), \qquad \xi_s = \sum_{q=1}^n \frac{\partial V(x, \mu)}{\partial x_q} d_s^q. \tag{7}$$

Поскольку для уравнения (5) не известен даже сам факт существования функции $V(x, \mu)$, предлагается приближенный метод его решения, использующий результаты работы [4].

Суть метода заключается в том, что негладкие функции (6) аппроксимируются на конечных промежутках изменений ξ_s, соответствующих области G, полиномами по четным степеням

$$F_s^*(\xi_s) = \lambda_{2s}(\xi_s)^2 + \ldots + \lambda_{r+2s}(\xi_s)^{r+2} + R_s^{r+2}(\xi_s), \tag{8}$$

где λ_{ks}, $s = \overline{1, m}$; $k = \overline{2, r+2}$, — коэффициенты, подлежащие определению; $R_s^{r+2}(\xi_s)$ — погрешности аппроксимаций, выражающие разности между аппроксимируемыми и аппроксимирующими функциями.

Тогда приближенное решение уравнения (5) ищется в виде степенного ряда (это решение будем также обозначать $V(x, \mu)$)

$$V(x, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r W_r(x), \tag{9}$$

где

$$W_r(x) = \sum_{k=r+2} V_r^{(k)}(x).$$

Подставляя ряды (2), (9) и полиномы (8) в уравнение (5) и приравнивая нулю члены при одинаковых степенях μ, получаем бесконечную систему соотношений относительно функций $W_r(x)$, $r \geq 0$.

Из каждого такого соотношения приравниванием нулю членов, имеющих одинаковый порядок $k = i_1 + \ldots + i_n$ относительно $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$, получается также бесконечная система соотношений относительно соответствующих форм $V_r^{(k)}(x)$, $r \geq 0$; $k \geq 2$ [4].

Первое из этих соотношений

$$\left(\frac{\partial V_0^{(2)}(x)}{\partial x}, Ax \right) + \omega^{(2)}(x) + (\lambda_2 \xi^2) = 0,$$
$$\xi^2 = \left((\xi_1)^2, \ldots, (\xi_m)^2\right)^T, \quad \lambda_2 = (\lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2m})^T, \tag{10}$$
$$\xi_s = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial V_0^{(2)}(x)}{\partial x_q} d_s^q,$$

является уравнением Беллмана для системы

$$\dot{x} = Ax + Du \tag{11}$$

без ограничений на управление, вдоль траекторий которой минимизируется функционал

$$\mathcal{T}(x_0, u) = \int_0^{\infty} \left[\omega^{(2)}(x) + \sum_{s=1}^{m} (-4\lambda_{2s})^{-1} (u_s)^2 \right] dt. \tag{12}$$

Соотношение (10) распадается на систему алгебраических уравнений Риккати относительно коэффициентов квадратичной формы $V_0^{(2)}(x)$, разрешимую при выполнении условия общности положения [5]

$$\operatorname{rg} Q = n, \tag{13}$$

где $Q = (D, AD, \ldots, A^{n-1} D)$.

Система (11) с учетом найденного управления без наложенных заранее ограничений, минимизирующего вдоль ее траекторий функционал (12), запишется в виде

$$\dot{x} = Ax + D\lambda_2 \xi, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)^T. \tag{14}$$

Соотношения для определения функций $W_0(x)$, $W_r(x)$, $r \geq 1$, принимают вид

$$-\left(\frac{dW_0(x)}{dt} \right)_{(14)} = \omega^{(2)}(x) + \sum_{s=1}^{m} \sum_{l=2}^{r+2} \lambda_{ls} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W_0(x)}{\partial x_i} d_s^i \right),$$
$$-\left(\frac{dW_r(x)}{dt} \right)_{(14)} = \left(\frac{\partial W_{r-1}(x)}{\partial x}, \varphi(x) \right) + \sum_{s=1}^{m} \sum_{l=2}^{r+2} \lambda_{ls} \times \tag{15}$$

$$\times \sum_{\substack{k_2+\ldots+k_r=l \\ k_2+\ldots+(r-1)k_r=r \\ 2k_2+\ldots+rk_r\ge +2}} C_l(k_2,\ldots,k_r)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W_1(x)}{\partial x_i}d_s^i\right)^{k_2}\ldots\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W_{r-1}(x)}{\partial x_i}d_s^i\right)^{k_r}.$$

В рекуррентных соотношениях (15) суммирование распространяется на все наборы целых неотрицательных чисел $k_2, \ldots, k_r$, для которых

$$\sum_{j=2}^{r} k_j = l, \quad \sum_{j=2}^{r}(j-1)k_j = r, \quad \sum_{j=2}^{r} jk_j \ge r+2;$$

символ $(dW_r(x)/dt)_{14}$ означает полную производную функции $W_r(x)$ по времени в силу системы (14).

Каждое из соотношений (15) сводится к бесконечной системе уравнений относительно соответствующих форм $V_r^{(k)}(x)$, $r \ge 0$; $k \ge 2$.

Так, для определения форм $V_0^{r+2}(x)$, $V_1^{(r+3)}(x)$, $r \ge 0$, получаем системы

$$-\left(\frac{dV_0^{(r+2)}(x)}{dt}\right)_{(14)} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{l=2}^{r+2}\lambda_{ls}\sum_{\substack{p_2+\ldots+p_{r+1}=l \\ p_2+\ldots+rp_{r+1}=r+2}} C_l(p_2,\ldots,p_{r+1})\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_1^{(r+3)}(x)}{\partial x_i}d_s^i\right)^{p_2}\ldots\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_0^{(r+1)}(x)}{\partial x_i}d_s^i\right)^{p_{r+1}} + \omega^2(x),$$

$$-\left(\frac{dV_1^{(r+3)}(x)}{dt}\right)_{(14)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{q=2}^{r+2}\varphi_i^{(q)}(x)\frac{\partial V_0^{(r-q+4)}(x)}{\partial x_i} + \tag{16}$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{m}\lambda_{2s}\sum_{q=3}^{r+2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_0^{(q)}(x)}{\partial x_i}d_s^i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_1^{(r-q+s)}(x)}{\partial x_i}d_s^i\right).$$

Аналогично можно выписать бесконечные системы уравнений и для других форм $V_r^{(k)}(x)$, $r \ge 2$; $k \ge 4$ [4].

Так как система (14) асимптотически устойчива, по теореме Ляпунова [6] существует единственное решение каждого из таких уравнений [4].

Таким образом, для ряда (9) можно последовательно найти любую функцию $W_r(x)$ в виде степенного ряда

$$W_r(x) = \sum_{k=r+2} V_r^{(k)}(x), \quad r = 0, 1, \ldots .$$

Коэффициенты соответствующих форм $V_r^{(k)}(x)$ порядка k этого ряда удовлетворяют системам q_k линейных алгебраических уравнений, причем q_k будет равно числу наборов целых неотрицательных чисел $i_1, \ldots, i_n$ таких, что $i_1 + \ldots + i_n = k$ [6]:

$$q_k = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}.$$

Минимизацией функции $F_s(\xi_s, u_s)$ находятся компоненты функции управления $\bar{u}(x,\mu)$ в зависимости от вида $P_s(u_s)$.

а) $P_s(u_s) = 0$, $s = \overline{1, m}$.

Уравнения m поверхностей переключения в фазовом пространстве замкнутой системы принимают вид

$$\sigma_{1s}(x, \mu) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial V(x, \mu)}{\partial x_q} d_s^q = 0.$$

В зависимости от местонахождения изображающей точки в фазовом пространстве замкнутой системы компоненты ε-оптимальной управляющей функции определяются следующими соотношениями:

$$\bar{u}_s(x, \mu) = -u_s^* \quad \text{при } \sigma_{1s}(x, \mu) > 0;$$

$$\bar{u}_s(x, \mu) = 0 \quad \text{при } \sigma_{1s}(x, \mu) = 0;$$

$$\bar{u}_s(x, \mu) = u_s^* \quad \text{при } \sigma_{1s}(x, \mu) < 0.$$

b) $P_s(u_s) = \delta_s(u_s)^2$.

В этом случае уравнения $2m$ гиперповерхностей переключения в фазовом пространстве замкнутой системы записываются в виде

$$\sigma_{1s}(x, \mu) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial V(x, \mu)}{\partial x_q} d_s^q - 2\delta_s u_s^* = 0,$$

$$\sigma_{2s}(x, \mu) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial V(x, \mu)}{\partial x_q} d_s^q + 2\delta_s u_s^* = 0,$$

а компоненты ε-оптимальной управляющей функции принимают значения

$$\bar{u}_s(x, \mu) = -u_s^*, \quad \sigma_{1s}(x, \mu) \ge 0, \quad \sigma_{2s}(x, \mu) > 0,$$

$$\bar{u}_s(x, \mu) = -\frac{\xi_s}{2\delta_s}, \quad \sigma_{1s}(x, \mu) < 0, \quad \sigma_{2s}(x, \mu) > 0,$$

$$\bar{u}_s(x, \mu) = u_s^*, \quad \sigma_{1s}(x, \mu) < 0, \quad \sigma_{2s}(x, \mu) \le 0.$$

c) $P_s(u_s) = \delta_s |u_s|$.

В рассматриваемом случае уравнения $2m$ гиперповерхностей переключения, а также соотношения для компонент ε-оптимальной управляющей функции принимают вид:

$$\sigma_{1s}(x, \mu) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial V(x, \mu)}{\partial x_q} d_s^q - \delta_s = 0,$$

$$\sigma_{2s}(x, \mu) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial V(x, \mu)}{\partial x_q} d_s^q + \delta_s = 0,$$

$$\bar{u}_s(x, \mu) = -u_s^* \quad \text{при } \sigma_{1s}(x, \mu) \ge 0, \quad \sigma_{2s}(x, \mu) > 0,$$

$$\bar{u}_s(x, \mu) = 0 \quad \text{при } \sigma_{1s}(x, \mu) < 0, \quad \sigma_{2s}(x, \mu) > 0,$$

$$\bar{u}_s(x, \mu) = u_s^* \quad \text{при } \sigma_{1s}(x, \mu) < 0, \quad \sigma_{2s}(x, \mu) \le 0.$$

При попадании изображающей точки на σ_{ks}, $k = \overline{1, 2}$; $s = \overline{1, m}$, и при условии $(\sigma_{ks} d\sigma_{ks}) / dt < 0$ в окрестности σ_{ks} будет возникать скользящий режим [7].

Проблема существования решения системы (1) с полученной функцией управления $\bar{u}(x, \mu)$ в замкнутом виде, которая может быть и разрывной, для рассматриваемой задачи снимается, если решение понимать так, как в работе [8]. При довольно общих предположениях на правую часть уравнений (1) решение существует.

4. Оценка точности метода. Пусть управление $\bar{u}(x, \mu)$, полученное минимизацией функции, таково, что все траектории, исходящие из множества начальных условий G_0, начиная с момента t, находятся в области $G(t)$. Тогда для всех $x_0 \in G_0$ это управление удовлетворяет неравенству [9]

$$\left| \mathcal{T}(x_0, \bar{u}(x, \mu)) - \inf_{\{u\}} \mathcal{T}(x_0, u) \right| \leq \Delta(V),$$

где

$$\Delta(V) = \int_0^\infty \left| \sup_{G(t)} B(x, V(x, \mu), \mu) - \inf_{G(t)} B(x, V(x, \mu), \mu) \right| dt. \tag{17}$$

Если функция $V(x, \mu)$ такова, что $\Delta(V) \leq \varepsilon$, то управление ε-оптимально.

Преобразуем формулу (17) к виду, удобному для вычислений. Для этого предварительно докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть для задачи* (11), (12) *выполнены условия общности положения* (13). *Тогда задачу* (1)–(5) *можно разрешить с наперед заданной точностью в любой замкнутой ограниченной области* $G \subset G_1$ *при некотором* $\mu(G)$ *с помощью функции Беллмана* $V(x, \mu)$ *в виде равномерно сходящегося ряда по степеням* $x_i \in G$ *и* $\mu(G)$.

Доказательство. Для доказательства сходимости ряда функции, разрешающей приближенно-оптимальную стабилизацию, воспользуемся методом построения его мажоранты в линейно преобразованной системе координат, в которой квадратичная форма $V_0^{(2)}(x)$ (первый член указанного ряда) принимает нормальный вид, так как с помощью обратного преобразования можно найти эту мажоранту в исходной системе координат.

Поскольку для аналитических функций всегда можно указать мажоранты, то справедливы следующие неравенства [1, 4]:

$$\left| \varphi_i^{(k)}(x) \right| \leq \bar{\varphi}_k^i z^k, \tag{18}$$

где

$$\bar{\varphi}_k^i = \left| \sup_G \bar{\varphi}_i^{(k)}(x) \right| \left(\frac{\sqrt{n}}{x^*} \right)^k, \quad z = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

$$G: |x_i| \leq x_m^i, \quad x^* = \min\left(x_m^1, \ldots, x_m^n\right).$$

Мажоранты

$$\varphi^i(z) = \sum_{k=1}^\infty \bar{\varphi}_k^i z^k$$

сходятся при $z < x^* / \sqrt{n}$.

Пусть $x = Cy$ — линейное неособое преобразование, приводящее квадратичную форму $V_0^{(2)}(x)$ к виду

$$V_0^{(2)}(y) = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \bar{z}^2.$$

Пусть $y = Bx$ — обратное преобразование.

Уравнение Беллмана

$$\left(\frac{\partial V(y,\mu)}{\partial y}, \tilde{A}y + \mu f(y) \right) + \sum_{s=1}^{m} F_s^*(\xi(y,\mu)) + \omega^2(y) = 0,$$

где

$$A = BAC, \quad f(y) = B\varphi(y), \quad \tilde{D} = BD, \quad \xi(y,\mu) = \tilde{D}\frac{\partial V(y,\mu)}{\partial y}$$

(вектор $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ является элементом действительного векторного пространства R^n, функции $\varphi_i(y)$, $\omega^{(2)}(y)$ соответствуют функциям $\varphi_i(x)$, $\omega^{(2)}(x)$). Так как при введенном преобразовании аналитические функции являются аналитическими, то аналогично формулам (18) в новых переменных справедливы неравенства

$$\left| f_j^{(k)}(y) \right| \le \tilde{\varphi}_k^j \, \bar{z}^k, \quad j = \overline{1,n}, \tag{19}$$

где

$$\bar{z}(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} \le \bar{z}(0)e^{-\alpha t}$$

($-\alpha$ — максимальная действительная часть корней характеристического полинома системы (14)).

Неравенства (19) соответствуют неравенствам $\left|\varphi_j^{(k)}(x)\right| \le \overline{\varphi}_k^i z^k$ в прежних переменных.

Построим сходящийся ряд

$$\overline{V}(\bar{z},\mu) = \tilde{W}_0(\bar{z}) + \mu\tilde{W}_1(\bar{z}) + \ldots + \mu^r\tilde{W}_r(\bar{z}) + \ldots, \tag{20}$$

который в переменных y_j является мажорантой ряда

$$V(y,\mu) = W_0(y) + \mu W_1(y) + \ldots + \mu^r W_r(y) + \ldots .$$

Для этого воспользуемся неравенствами [1]

$$\left|V_r^{(k)}(y)\right| \le \tilde{V}_k\,\bar{z}^k, \quad \left|\frac{\partial V_r^k(y)}{\partial y_j}\right| \le k\,\tilde{C}_k^{rj}\,\tilde{V}_k^r\,\bar{z}^{k-1}$$
$$\left(V_0^{(2)}(y) = \tilde{V}_2^0\,\bar{z}^2 = \bar{z}^2\right). \tag{21}$$

Оценим функции $W_0(y)$, $W_1(y), \ldots, W_r(y), \ldots$, исходя из соотношений (15), (16) в переменных y_j, $j = \overline{1,n}$, и используя при этом неравенства (19), (21):

$$|W_0(y)| = \left| -\int_0^\infty \left[\omega^{(2)}(y) + \sum_{k=2}^{r+2}\sum_{s=1}^{m}\sum_{l=2}^{k}\lambda_{ls} \sum_{\substack{p_2+\ldots+p_{k-1}=l \\ p_2+\ldots+(k-1)p_{k-1}=k}} C_l(p_2,\ldots,p_{k-1}) \times \right.\right.$$

оф

$$\left.\left. \times \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_0^{(2)}(y)}{\partial y_j}\tilde{d}_s^j\right)^{p_2} \cdots \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_0^{(k)}(y)}{\partial y_j}\tilde{d}_s^j\right)^{p_{k-1}} \right] dt \right| \le$$

$$\leq \int_0^\infty \sum_{k=2}^{r+2} \Bigg[\tilde{\omega}_k + \sum_{s=1}^{m} \sum_{l=2}^{k} |\lambda_{ls}| \sum_{\substack{p_2+\ldots+p_{k-1}=l \\ p_2+\ldots+(k-1)p_{k-1}=k}} C_l(p_2, \ldots, p_{k-1}) \left(2\sum_{j=1}^{n} \left| \tilde{d}_s^j \right| \right)^{p_2} \ldots$$

$$\ldots \left(k \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_k^0 \tilde{V}_k^0 \left| \tilde{d}_s^j \right| \right)^{p_{k-1}} \bar{z}^k \Bigg] dt \leq \sum_{k=2}^{r+2} \tilde{V}_k^0 \bar{z}^k(0), \tag{22}$$

$$|W_1(y)| \leq \Bigg| -\int_0^\infty \Bigg[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W_0(y)}{\partial y_j} \sum_{p=1}^{\infty} f_j^{(p)}(y) +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{m} \lambda_{2s} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W_0(y)}{\partial y_j} \tilde{d}_s^j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W_1(y)}{\partial y_j} \tilde{d}_s^j \right) \Bigg] dt \Bigg| \leq$$

$$\leq \Bigg| -\int_0^\infty \Bigg[\sum_{j=1}^{n} \sum_{q=2}^{r+2} \frac{\partial V_0^{(q)}(y)}{\partial y_j} \sum_{p=1}^{\infty} f_j^{(p)}(y) +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{m} \lambda_{2s} \sum_{q=3}^{r+2} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1^{(q)}(y)}{\partial y_j} \tilde{d}_s^j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_0^{(r-q+s)}(y)}{\partial y_j} \tilde{d}_s^j \right) \Bigg] dt \Bigg| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \Bigg[\sum_{j=1}^{n} \sum_{q=2}^{r+2} q \tilde{C}_q^{0j} \tilde{V}_q^0 \bar{z}^{q-1} \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_p^j \bar{z}^p + 2\sum_{s=1}^{m} \lambda_{2s} \sum_{q=3}^{r+2} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{q} \tilde{C}_q^{1j} \tilde{V}_q^1 \bar{z}^{q-1} \left| \tilde{d}_s^j \right| \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{n} (r-q+5) \tilde{C}_{r-q+5}^{0j} \tilde{V}_{r-q+5}^0 \bar{z}^{r-q+4} \left| \tilde{d}_s^j \right| \right) \Bigg] dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\tilde{W}_k^1}{k\alpha} \bar{z}^k(0) = \sum_{k=3}^{\infty} \tilde{V}_k^1 \bar{z}^k(0).$$

Аналогично можно оценить функции $W_2(y), \ldots, W_r(y), \ldots$.

В результате получаем оценки

$$|W_0(y)| \leq \tilde{W}_0(\bar{z}) = \sum_{k=2}^{r+2} \tilde{V}_k^0 \bar{z}^k, \quad |W_1(y)| \leq W_1(\bar{z}) = \sum_{k=3}^{\infty} \tilde{V}_k^1 \bar{z}^k,$$

$$|W_r(y)| \leq W_r(\bar{z}) = \sum_{k=r+2}^{\infty} \tilde{V}_k^r \bar{z}^k, \quad r \geq 2, \tag{23}$$

где

$$\tilde{V}_2^0 = 1; \quad \tilde{V}_3^0 = 0;$$

$$\tilde{V}_{r+2}^0 = \frac{1}{(r+2)\alpha} \sum_{s=1}^{m} \sum_{l=2}^{r+2} |\lambda_{ls}| \sum_{\substack{p_2+\ldots+p_{r+1}=l \\ p_2+\ldots+p_{r+1}=+2}} C_l(p_2, \ldots, p_{r+1}) \times$$

$$\times \left(2\sum_{j=1}^{n} \left| \tilde{d}_s^j \right| \right)^{p_2} \ldots \left[(r+1) \sum_{j=1}^{n} \left| \tilde{d}_s^j \right| \tilde{C}_{r+1}^{0j} \tilde{V}_{r+1}^{0j} \right]^{p_{r+1}}, \quad r \geq 2;$$

$$\tilde{V}_3^1 = \frac{2}{3\alpha} \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_2^j \tilde{V}_2^0;$$

$$\tilde{V}_4^1 = \frac{1}{2\alpha}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_3^j\tilde{V}_2^0 + \sum_{s=1}^{m}\lambda_{2s}\left(\sum_{j=1}^{n}3\tilde{C}_3^{0j}\tilde{V}_3^0\left|\tilde{d}_s^j\right|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}3\tilde{C}_3^{1j}\tilde{V}_3^1\left|\tilde{d}_s^j\right|\right);$$

$$\tilde{V}_{r+3}^1 = \frac{1}{(r+2)\alpha}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=2}^{r+2}q\tilde{C}_q^{0j}\tilde{V}_q^0\tilde{\varphi}_{r-q+4}^j +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{m}\lambda_{2s}\left(\sum_{q=3}^{r+2}\sum_{j=1}^{n}q\tilde{C}_q^{1j}\tilde{V}_q^1\left|\tilde{d}_s^j\right|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(r-q+5)\tilde{C}_{r-q+5}^{0j}\left|\tilde{d}_s^j\right|\tilde{V}_{r-q+5}^0\right); \quad r \geq 2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{24}$$

$$\tilde{V}_{r+2}^r = \frac{1}{(r+2)\alpha}\sum_{j=1}^{n}(r+1)\tilde{C}_{r+1}^{r-1j}\tilde{V}_{r+1}^{r-1j}\tilde{\varphi}_2^j + \sum_{s=1}^{m}\sum_{l=2}^{r+2}|\lambda_{2s}|\times$$

$$\times \sum_{\substack{k_1^0+\ldots+k_{r+1}^0+k_2^1+\ldots+k_{r+1}^1+\ldots+k_r^{r-1}\leq l \\ k_1^1+\ldots+k_{r+1}^1+\ldots+rk_r^{r-1} = r \\ k_1^0+\ldots+(r+1)k_{r+1}^0+2k_2^1+\ldots+(r+1)k_{r+1}^1+\ldots+rk_r^{r-1} = r+2}} C_l\left(k_0^1,\ldots,k_{r+1}^0,\ldots,k_r^{r-1}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{n}2\tilde{C}_2^{0j}\tilde{V}_2^0\left|\tilde{d}_s^j\right|\right)^{k_1^0}\ldots\left(\sum_{j=1}^{n}(r+2)\tilde{C}_{r+2}^{0j}\tilde{V}_{r+2}^0\left|\tilde{d}_s^j\right|\right)^{k_{r+1}^0}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{n}3\tilde{C}_3^{1j}\tilde{V}_3^1\left|\tilde{d}_s^j\right|\right)^{k_2^1}\ldots\left(\sum_{j=1}^{n}(r+2)\tilde{C}_{r+2}^{1j}\tilde{V}_{r+2}^1\left|\tilde{d}_s^j\right|\right)^{k_{r+1}^1}\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(\sum_{j=1}^{n}(r+1)\tilde{C}_{r+1}^{r-1}\tilde{V}_{r+1}^r\left|\tilde{d}_s^j\right|\right)^{k_r^{r-1}}, \quad r = 2, 3, \ldots .$$

Построим сходящийся ряд с положительными коэффициентами

$$V_1(\bar{z},\mu) = B_2(\bar{z}) + \mu B_3(z) + \ldots + \mu^r B_r(\bar{z}) + \ldots \tag{25}$$

такой, что $W_r(\bar{z}) \leq \overline{B}_r(\bar{z})$, начиная с некоторого номера r.

Сконструируем вспомогательное уравнение вида

$$n_1\left(-a_1+\mu\sum_{k=2}^{\infty}\tilde{\varphi}_k\bar{z}^{k-1}\right)\bar{z}\frac{dV_1}{d\bar{z}} + \bar{b}_2\left(\frac{dV_1}{d\bar{z}}\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \bar{b}_{r+2}\left(\frac{dV_1}{dz}\right)^{r+2} + \alpha_1\bar{z}^2 = 0, \quad r \geq 2. \tag{26}$$

Коэффициенты $\bar{b}_l$, $l = \overline{2, r+2}$, принимают следующие значения:

$$\bar{b}_2 = (n_1)^2 d^2\lambda\gamma_2, \ldots, \bar{b}_{r+2} = (n_1)^{r+2}d^{r+2}\lambda\gamma_{r+2},$$

где

$$\lambda = m\max_{\substack{1\leq s\leq m \\ 2\leq k\leq r+2}}|\lambda_{ks}|; \quad d = \max_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq s\leq m}}\left|d_s^j\right|; \quad n_1 = n\max_{\substack{0\leq k\leq r \\ 1\leq j\leq n \\ 0\leq p\leq r}}\tilde{C}_{p+2}^{kj}, \quad r \geq 2;$$

$$\gamma_2 = \max_{p_2+\ldots+p_{r+1} = r+2}\left[2^{p_2}\ldots(r+1)^{p_{r+1}}\right];$$

$$\gamma_l = \max_{k_1^0+\ldots+k_{r+1}^0+\ldots+k_r^{r-1} = r+2}\left[2^{k_1^0}\ldots(r+2)^{k_{r+1}^0}3^{k_2^1}\ldots(r+1)^{k_r^{r-1}}\right], \quad l \geq 2;$$

$$\tilde{\varphi}_k = \max_{1 \le j \le n} \tilde{\varphi}_k^j;$$

a_1, α_1 подлежат определению.

Левая часть уравнения (26) является многочленом степени $r+2$ относительно dV_1/dz, коэффициенты которого — известные аналитические функции.

Будем искать решение уравнения (26) в виде

$$V_1(z, \mu) = \sum_{r=2}^{\infty} \mu^{r-2} \tilde{B}_r(\bar{z}) \bar{z},$$

где

$$\tilde{B}_r(\bar{z}) = \sum_{k=r-2}^{\infty} \tilde{B}_r^k \bar{z}^{k+1}, \quad r \ge 2.$$

При $\mu = 1$ теоремы существования и единственности вполне определяют интеграл уравнения (26) внутри некоторой конечной окружности, т. е. определяют элемент аналитической функции, следовательно, $\tilde{B}_r(\bar{z})$ могут быть представлены в виде рядов [11]

$$\tilde{B}_r(\bar{z}) = \sum_{k=r-2}^{\infty} \tilde{B}_r^k \bar{z}^{k+1} \quad \text{при} \quad \bar{z} \le \rho_y$$

(ρ_y подлежит определению).

Очевидно, малый параметр μ можно подобрать так, чтобы ряд функции $V_1(\bar{z}, \mu)$ сходился при любом конечном $\bar{z}$.

Подставляем $V_1(\bar{z}, \mu)$ в уравнение (26) и приравниваем нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ и $\bar{z}$.

Коэффициент $\tilde{B}_2^0$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$\left(\tilde{B}_2^0\right)^2 - \frac{a_1}{n_1 d^2 \lambda \gamma_2} \tilde{B}_2^0 + \frac{\alpha_1}{(n_1)^2 d^2 \lambda \gamma_2} = 0.$$

Это уравнение имеет два действительных корня и искомому решению удовлетворяет следующее значение:

$$\tilde{B}_2^0 = \frac{a_1}{2 n_1 d^2 \lambda \gamma_2} - \frac{1}{n_1 d \sqrt{\lambda \gamma_2}} \sqrt{\frac{(a_1)^2}{4 d^2 \lambda \gamma_2} - \alpha_1}.$$

Коэффициент $\tilde{B}_3^0$ определяется из уравнения

$$\left(n_1 a_1 - 2(n_1)^2 d^2 \lambda \gamma_2 \tilde{B}_2^0\right) \tilde{B}_3^0 =: \bar{b}_3 \left(\tilde{B}_2^0\right)^3.$$

Выражение в скобках будет общим во всех уравнениях для определения остальных коэффициентов ряда $\tilde{B}_r(\bar{z})$, $r \ge 4$.

Очевидно,

$$n_1 a_1 - 2(n_1)^2 d^2 \gamma_2 \lambda \tilde{B}_2^0 = 2 n_1 d \sqrt{\lambda \gamma_2} \sqrt{\frac{(a_1)^2}{4 d^2 \lambda \gamma_2} - \alpha_1}.$$

Предположим, что a_1 известно, будем выбирать α_1 так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\frac{(a_1)^2}{4d^2\lambda\gamma_2} - \alpha_1 = \frac{\alpha^2}{4(n_1)^2 d^2\lambda\gamma_2},$$

тогда будем иметь $n_1 a_1 - 2(n_1)^2 d^2\lambda\gamma_2 \tilde{B}_2^0 = \alpha$, следовательно,

$$\tilde{B}_2^0 = \frac{1}{2n_1 d^2\lambda\gamma_2}\left(a_1 - \frac{\alpha}{n_1}\right).$$

Положим $a_1 > 2\tilde{V}_2^0 n_1 d^2\lambda\gamma_2 + \alpha/\sqrt{n}$, тогда

$$\tilde{B}_2^0 \geq \tilde{V}_2^0, \quad \tilde{B}_3^0 \geq \tilde{V}_3^0. \tag{27}$$

Произведя вычисления, получим зависимость между коэффициентами ряда

$$\tilde{B}_{r+2}^0 = \frac{1}{\alpha}\sum_{l=2}^{r+2} \bar{b}_l \sum_{\substack{p_2+\ldots+p_{r+1}=l \\ p_2+\ldots+rp_{r+1}=r+2}} C_l(p_2, \ldots, p_{r+1})\left(\tilde{B}_2^0\right)^{p_2} \ldots \left(\tilde{B}_{r+1}^0\right)^{p_{r+1}},$$

$$\tilde{B}_3^1 = \frac{1}{\alpha} n_1 \tilde{\varphi}_2 \tilde{B}_2^0; \quad \tilde{B}_4^1 = \frac{1}{\alpha} n_1 \tilde{\varphi}_3 \tilde{B}_2^0 + \bar{b}_2 \tilde{B}_3^0 \tilde{B}_3^1;$$

$$\tilde{B}_{r+3}^1 = \frac{1}{\alpha} n_1 \sum_{q=2}^{r+2} \tilde{B}_q^0 \tilde{\varphi}_{r-q+1} + \bar{b}_2 \tilde{B}_q^1 \tilde{B}_{r-q+5}^0, \quad r \geq 2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{28}$$

$$\tilde{B}_{r+2}^r = \frac{1}{\alpha} n_1 \tilde{B}_{r+1}^{r+1} \tilde{\varphi}_2 + \sum_{l=2}^{r+2} \bar{b}_l \times$$

$$\times \sum_{\substack{k_1^0+\ldots+k_{r+1}^0+k_2^1+\ldots+k_{r+1}^1+\ldots+k_r^{r-1}=l \\ k_2^1+\ldots+k_{r+1}^1+\ldots+(r-1)k_r^{r-1}=r \\ k_1^0+\ldots+(r+1)k_{r+1}^0+2k_2^1+\ldots+(r+1)k_{r+1}^1+\ldots+rk_r^{r-1}=r+2}} C_l\left(k_0^1, \ldots, k_{r+1}^0, \ldots, k_r^{r-1}\right) \times$$

$$\times \left(\tilde{B}_2^0\right)^{k_1^0} \ldots \left(\tilde{B}_{r+2}^0\right)^{k_{r+1}^0} \left(\tilde{B}_3^1\right)^{k_2^1} \ldots \left(\tilde{B}_{r+2}^1\right)^{k_{r+1}^1} \ldots \left(\tilde{B}_{r+1}^{r-1}\right)^{k_r^{r-1}}, \ r \geq 2.$$

Сравнив оценки (24), (27) и (28), убедимся в справедливости неравенств $\tilde{W}_r(\bar{z}) \leq \tilde{B}_r(\bar{z})\bar{z} = B_r(\bar{z})$.

Тем самым доказана равномерная сходимость ряда (20) в некоторой окрестности $\bar{z} = 0$ при $\mu = 1$. Это значит, что соответствующим выбором параметра μ можно добиться сходимости ряда (20) при любом $\bar{z} < \infty$.

Обратным преобразованием $y = Bx$ из ряда (20) получаем ряд

$$\overline{W}(z, \mu) = \overline{W_0}(z) + \mu\overline{W_1}(z) + \ldots + \mu^r \overline{W_r}(z) + \ldots,$$

сходящийся для $z < \infty$ при соответствующем выборе параметра $\mu(G)$.

При этом справедливы оценки

$$W_r(x) = \left|\sum_{k=r+2}^{\infty} V_r^{(k)}(x)\right| \leq \overline{W_r}(z) = \sum_{k=r+2}^{\infty} \overline{V}_k^r z^k,$$

$$\left|\frac{\partial V_r^{(k)}(x)}{\partial x_i}\right| \leq k\,\overline{C}_k^{ri}\,\overline{V}_k^r z^{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots; \quad r = 0, 1, \ldots . \tag{29}$$

Теорема доказана.

Требование малости параметра μ является существенным, так как при достаточно большом μ и значениях x из наперед заданной области G функция

$V(x, \mu)$ может оказаться недифференцируемой [1].

Функция $B[x, V(x, \mu), \mu]$ в формуле (17) имеет вид

$$B[x, V(x, \mu), \mu] = \sum_{i=1}^{n} R^{r+2}_{\langle v, \mu\varphi\rangle_i}(x, \mu) + \sum_{s=1}^{m} R_s^{r+2}(\xi_s), \tag{30}$$

где $\sum_{i=1}^{n} R^{r+2}_{\langle v, \mu\varphi\rangle_i}(x, \mu)$ — остаточный член скалярного произведения $(\partial V(x, \mu)/\partial x, \mu\varphi(x))$; $R_s^{r+2}(\xi_s)$ — разности между аппроксимируемыми и аппроксимирующими функциями.

С учетом оценок (18), (19) и выражения (30) неравенство (17) можно представить в виде [4]

$$\Delta(V) \le \Delta_{r+2} = \int_0^\infty \Bigg[2\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=k+2}^{r+2} j\mu^{k+1} \overline{C}_j^{ki}\, \overline{\varphi}^k_{r-j+4} z^{r+3}(t) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} N_s^{r+2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=k+2}^{r+2} j\left|d_s^i\right|\mu^k\, \overline{C}_j^k\, \overline{V}_j^k z^{j-1}(t) \Bigg] dt, \tag{31}$$

где N_s^{r+2} удовлетворяет выражениям

$$2\left| \sup_{|\xi_s| \le \beta_s} R_s^{r+2}(\xi_s) - \inf_{|\xi_s| \le \beta_s} R_s^{r+2}(\xi_s) \right| = N_s^{r+2}\beta_s \tag{32}$$

($[-\beta_s, \beta_s]$ — интервалы аппроксимации).

Замечание. Аппроксимацию функций $F_s^*(\xi_s)$ на интервалах $[-\beta_s, \beta_s]$ полиномами (8) степени $r+2$ нужно выбирать такую, чтобы выполнялись условия

$$\left| \sup_{|\xi_s| \le \beta_s} R_s^{r+2}(\xi_s) - \inf_{|\xi_s| \le \beta_s} R_s^{r+2}(\xi_s) \right| \to \min.$$

В принципе можно воспользоваться любой пригодной для непрерывных функций аппроксимацией, например, аппроксимацией наилучшего равномерного приближения [12, 13], затем находить разности R_s^{r+2} между аппроксимируемыми и аппроксимирующими функциями и определять N_s^{r+2} из формулы (32).

Следствие. *Для любой наперед заданной замкнутой ограниченной области G содержащейся в G_1, существует конечное r и достаточно малое $\mu(G)$, при которых $\Delta_{r+2} \le \varepsilon$.*

Это объясняется стремлением к нулю мажоранты остаточного члена ряда $(\partial V(x, \mu)/\partial x, \mu\varphi(x))$ в формуле (31), а также стремлением к нулю $\left\{N_s^{r+2}\right\}$ при $r \to \infty$ в силу теоремы Вейерштрасса [12].

5. Алгоритм решения задачи.

1. Задаем точность решения задачи ε, степень r аппроксимирующих полиномов (8) (следует начинать аппроксимацию полиномами степени $r = 2$), некоторое конкретное значение малого параметра $\mu < 1$, а также интервалы аппроксимации G^{ξ_2}: $[-\beta_s, \beta_s]$;

2. В процессе аппроксимации функций (6) полиномами (8), выбранной в соответствии с замечанием предыдущего раздела, определяем коэффициенты аппроксимации $\lambda_{2s}, \ldots, \lambda_{rs}$.

Используя формулы (15), (16), находим функцию $V(x, \mu)$ в виде полинома

$$V(x, \mu) = W_0(x) + \ldots + \mu^r W_r(x).$$

Пересчитываем новые интервалы аппроксимации $G_{\xi_2} : [-\beta_s, \beta_s]$ функций (6) полиномами (8) по формуле

$$\beta_s = \max \left| \sup_{G_1} \xi_s \right|, \left| \inf_{G_1} \xi_s \right|,$$

где ξ_s определяется согласно выражению (7).

Сравниваем интервалы G^{ξ_2} и G_{ξ_2}. Если $G^{\xi_2} \subset G_{\xi_2}$, то выполняем операцию присвоения $G^{\xi_2} := G_{\xi_2}$ и повторяем п. 2 до тех пор, пока $G_{\xi_2} \subseteq G^{\xi_2}$.

3. В соответствии с оценками (18), (29) находим мажоранты функций $\varphi_i(x)$, $W_r(x)$, $V_r^{(k)}(x)$, $\partial V_r^{(k)}(x) / \partial \dot{x}_i$. Для определения коэффициентов мажорант функций $W_r(x)$, $V_r^{(k)}(x)$ можно воспользоваться формулами (23), (24) в исходной системе координат, а после этого коэффициенты мажоранты функции $\partial V_r^{(k)}(x) / \partial x_i$ можно найти аналогично коэффициентам мажорант функций $\varphi_i(x)$ в соответствии с формулой (18).

По формуле (31) вычисляем величину Δ_{r+2}. Если $\Delta_{r+2} > \varepsilon$, то уменьшаем малый параметр $\mu = \mu / 2$ и снова вычисляем Δ_{r+2}. Если $\Delta_{r+2} > \varepsilon$, то увеличиваем степень аппроксимационных полиномов $r = r + 2$ и повторяем п. 2, а затем п. 3 до тех пор, пока $\Delta_{r+2} \leq \varepsilon$.

4. В зависимости от случаев a), b), c) задания функций $P_s(u_s)$ находим функцию управления.

6. Пример. Рассмотрим управляемую систему, движение которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \mu x_2^2 = \varphi_1(x) = \varphi_1^{(1)}(x) + \mu \varphi_1^{(2)}(x), \\ \dot{x}_2 &= u, \quad |u| \leq 1 \quad (\mu > 0). \end{aligned} \tag{33}$$

Пусть заданы области $G : |x_i| \leq 1{,}1;\ G_0 : |x_{i0}| \leq 1{,}05$. Требуется найти функцию $\overline{u}(x, \mu)$, для которой справедливо неравенство

$$\left| \mathcal{T}(x_0, \overline{u}) - \inf_{\{u\}} \mathcal{T}(x_0, u) \right| \leq \varepsilon,$$

где

$$\mathcal{T}(x_0, u) = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + u^2 \right) dt, \quad \varepsilon = 0{,}09. \tag{34}$$

Рассмотрим вначале линеаризованную задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= u, \quad |u| \leq 1, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\mathcal{T}(x_0, u) = \int_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + u^2 \right) dt.$$

Функцию $V(x)$ задаем в виде

$$V(x) = V_0^{(2)}(x),$$

где $V_0^{(2)}(x) = V_{20}x_1^2 + 2V_{11}x_1x_2 + 2V_{02}x_2^2$.

Минимизацией функции $F(\xi, u) = \xi u + u^2$ $(\xi = \partial V_0^{(2)}(x) / \partial x_2)$ по u находим ε–оптимальное управление

$$\overline{u} = \begin{cases} 1, & -\xi/2 \geq 1, \\ -\xi/2, & -1 < -\xi/2 < 1, \\ -1, & -\xi/2 \leq -1. \end{cases} \tag{36}$$

Функцию

$$F^*(\xi) = \inf_{|u| \leq 1} F(\xi, u)$$

на отрезке $[-2,2;\ 2,2]$ изменения ξ апроксимируем параболой, выбирая λ_2 из условия [2]

$$\left| \sup_{|\xi| \leq 2,2} R^2(\xi) - \inf_{|\xi| \leq 2,2} R^2(\xi) \right| \to \min,$$

$$F^*(\xi) = \lambda_2 \xi^2 + R^2(\xi), \quad \lambda_2 = -0,25.$$

Решая уравнение (10), получаем

$$V_0^{(2)}(x) = \left(x_1^2 + x_2^2\right)/2.$$

Следуя теоретическим результатам, найдем коэффициенты мажорант функций $\varphi_i(x)$. Очевидно, $\overline{\varphi}_1^1 = \overline{\varphi}_2^1 = 1$, а остальные $\overline{\varphi}_k^1$, $k = 3, 4, \ldots$, $\overline{\varphi}_k^2$, $k = 1, 2, \ldots$, равны нулю.

Из уравнения

$$-x_1 \frac{\partial W_1(x)}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial W_1(x)}{\partial x_2} = -x_1 x_2^2$$

получаем $W_1(x) = x_1 x_2 / 3$, следовательно, $W_1(z) = z^3 / 3$.

Не производя преобразования координат, находим коэффициенты, необходимые для вычисления Δ_2 (см. формулу (31)):

$$\overline{V}_2^0 = 1;\ \overline{V}_3^1 = \frac{1}{3};\ \overline{C}_2^{01} = \frac{1}{2};\ \overline{C}_2^{02} = 1;\ \overline{C}_3^{11} = \frac{1}{3};\ \overline{C}_3^{12} = \frac{2}{3};\ N^2 = 0,0091.$$

Степень приближенности полученного управления к оптимальному для задачи (35) запишем в виде

$$\Delta_2 = \int_0^\infty \left[\frac{8}{3} \mu z^3(t) + 0,0182 z(t) \right] dt.$$

Пользуясь оценкой [14]

$$z(t) \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\beta_2 / 2\alpha_2} z(0),$$

где α_1, α_2, β_2 удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1 z^2 \leq V_0^{(2)}(x) \leq \alpha_2 z^2, \quad -\beta_1 z^2 \leq \frac{dV(x)}{dt} \leq -\beta_2 z^2,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 1,$$

получаем, что

$$\text{при } \mu = 0{,}01 \quad \Delta_2 > 0{,}1;$$

$$\text{при } \mu = 0{,}005 \quad \Delta_2 > 0{,}1.$$

Рассмотрим нелинейную задачу (33), (34). Аппроксимируем функцию $F^*(\xi)$ на отрезке $[-2{,}2;\ 2{,}2]$ параболой $\lambda_2\xi^2$, $\lambda_2 = -0{,}25$.
Решая уравнение

$$-x_1\frac{\partial W_2(x)}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial W_2(x)}{\partial x_2} = -x_2^2\frac{\partial W_1(x)}{\partial x_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial W_1(x)}{\partial x_2}\right)^2 = \frac{1}{9}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^4,$$

находим

$$W_2(x) = -\frac{1}{36}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{12}x_2^4.$$

Функция $V(x,\mu)$ имеет вид

$$V(x,\mu) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{\mu}{3}x_1x_2 + R_v^3(x,\mu); \quad R_v^3(x,\mu) \le \mu^2\overline{W}_2(z).$$

Очевидно,

$$\overline{W}_2(z) = \frac{1}{12}z^4, \quad \overline{V}_4^2 = \frac{1}{12}, \quad \overline{C}_4^{22} = \frac{3}{2}, \quad \overline{C}_4^{21} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно,

$$\Delta_3 < 1{,}6(z_0)^4\mu^2 + 0{,}05148z_0 < 0{,}09, \quad \mu \le 0{,}01,$$

и задача решена.

Управление $u(x,\mu)$ вычисляется по формуле (36), где $\xi = \partial V(x,\mu)/\partial x_2$.

1. *Альбрехт Э. Г., Шелементьев Г. С.* Лекции по теории стабилизации. – Свердловск: Урал. ун-т, 1972. – 273 с.
2. *Бахито Р. У., Крапчетов Н. Н., Кротов В. Ф.* Синтез приближенно-оптимального управления для одного класса линейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 10. – С. 33–43.
3. *Хрусталев М. М., Бахито Р. У.* Синтез оптимального управления в линейных системах // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. – 1978. – № 1. – С. 165–173.
4. *Тригуб М. В.* Приближенно-оптимальная стабилизация одного класса нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 1. – С. 34–47.
5. *Кириллова Ф. М.* К задаче об аналитическом конструировании регуляторов // Математика и механика. – 1961. – **XXY**, вып. 3. – С. 433–439.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
7. *Емельянов С. В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. – М.: Наука, 1967. – 335 с.
8. *Красовский Н. Н., Субботин А. Н.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
9. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
10. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
11. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 436 с.
12. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
13. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – М.: Физматгиз, 1978. – 512 с.
14. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. – М.: Физматгиз, 1975. – 495 с.

Получено 29.12.93