УДК 517. 968

С. В. Переверзев, д-р физ.-мат. наук,
С. Г. Солодкий, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины , Киев)

О ПРЯМЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

We prove that the so-called adaptive direct methods of approximation of the first kind Fredholm equations leads to a more economical way of finite-dimensional approximation as opposed to traditional approaches.

Встановлено, що застосування так званих адаптивних прямих методів до наближення розв'язків рівнянь Фредгольма I роду веде до більш економічного способу скінченної апроксимації, ніж традиційні підходи.

Юрию Ивановичу Мельнику посвящается

1. Пусть L_2 — гильбертово пространство суммируемых в квадрате на $(-1, 1)$ функций с обычной нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Через W_2^ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, обозначим пространство функций f, производные которых $f^{(\nu-1)}$ абсолютно непрерывны на $[-1, 1]$, а $f^{(\nu)} \in L_2$. При этом $\|f\|_{W_2^\nu} = \|f\| + \|f^{(1)}\| + \ldots + \|f^{(\nu)}\|$, а $W_2^\nu(\rho)$ — шар радиуса ρ в W_2^ν (под W_2^0 будем понимать L_2). Пусть $\mathcal{L}(W_2^i, W_2^j)$ — пространство всех линейных ограниченных операторов из W_2^i в W_2^j, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_{i\to j}$. Кроме того, через $C(L_2, L_2)$ обозначим множество всех компактных операторов $A \in \mathcal{L}(L_2, L_2)$.

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{H}_\gamma^r$ операторов Фредгольма вида

$$Az(t) = \int_{-1}^{1} a(t,\tau) z(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

ядра $a(t,\tau)$ которых имеют суммируемые в квадрате на $[-1, 1]\times[-1, 1]$ производные

$$a^{(i,j)}(t,\tau) = \frac{\partial^{i+j} a(t,\tau)}{\partial t^i\, \partial \tau^j},$$

и для всех $\varphi \in L_2$

$$\sum_{i+j\le r} \left\| \int_{-1}^{1} a^{(i,j)}(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau \right\| \le \gamma \|\varphi\|.$$

Легко видеть, что для любого $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ справедливы неравенства

$$\|A\|_{0\to r} \le \gamma, \quad \|A^*\|_{0\to r} \le \gamma. \tag{2}$$

В данной работе исследуется задача конечномерной аппроксимации решения уравнений

$$Az(t) = f(t), \tag{3}$$

где $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$. Предположим, что свободный член $f(t)$ принадлежит множеству $\mathrm{Range}(A) := \{f\colon f(t) = A\varphi(t), \varphi \in L_2\}$, т. е. уравнение (3) разрешимо. Однако, как правило, вместо свободного члена $f \in \mathrm{Range}(A)$ дано некоторое приближение $f_\delta \in L_2$ такое, что $\| f_\delta - f \| \le \delta$, где δ — малое положительное число, которое обычно известно. Предположим теперь, что вместо уравнения (3) имеем приближенное уравнение $A_\varepsilon z(t) = f_\delta(t)$, где $\| A_\varepsilon - A \|_{0\to 0} \le \varepsilon$, $\| f_\delta - f \| \le \delta$. Следуя Г. М. Вайникко (1), под методом регуляризации будем понимать некоторое правило $R_{\delta,\varepsilon}$ сопоставляющее каждой паре $(A_\varepsilon, f_\delta)$ элемент $R_{\delta,\varepsilon}(A_\varepsilon, f_\delta) \in L_2$ такой, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}} \sup_{A_\varepsilon, f_\delta} \inf_{z = A^{-1}f} \| z - R_{\delta,\varepsilon}(A_\varepsilon, f_\delta) \| = 0,$$

где $A^{-1}f$ — полный прообраз элемента $f \in \mathrm{Range}(A)$. В случае $\varepsilon = 0$, т. е. $A_\varepsilon = A$, будем писать $R_{\delta,\varepsilon}(A_\varepsilon, f_\delta) = R_{\delta,}(A, f_\delta)$.

В обширной литературе по некорректным задачам наиболее популярным объектом исследования является метод регуляризации Тихонова $T_\delta^{\alpha,s}(A, f_\delta)$. Если имеется априорная информация о том, что решение (3) принадлежит пространству W_2^s, то в рамках метода Тихонова в качестве приближенного решения (3) рассматривается минимум $z_\delta^\alpha = T_\delta^{\alpha,s}(A, f_\delta)$ функционала

$$\Omega_\alpha(z) = \| Az - f_\delta \|^2 + \alpha \| z^{(s)} \|,$$

где α — параметр регуляризации, зависящий от δ и обычно определяемый условием $\lim_{\delta\to 0}(\delta^2/\alpha) = 0$. Элемент z_δ^α можно определить из уравнения Эйлера для функционала $\Omega_\alpha(z)$:

$$\alpha z^{(2s)} + (-1)^s A^* A z = (-1)^s A^* f_\delta \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$z^{(i)}(-1) = z^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s-1. \tag{5}$$

Краевая задача (4), (5) эквивалентна следующему интегральному уравнению Фредгольма II рода:

$$\alpha z(t) + G_{2s} A^* A z(t) = G_{2s} A^* f_\delta(t), \tag{6}$$

где

$$G_{2s}\varphi(t) = \int_{-1}^{1} g_{2s}(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau,$$

а $g_{2s}(t,\tau)$ — функция Грина краевой задачи

$$(-1)^s u^{(2s)}(t) = \varphi(t), \quad u^{(i)}(-1) = u^{(i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s-1.$$

Согласно определению функции Грина для любой $\varphi \in L_2$ справедливо равенство

$$\frac{d^{2s}}{dt^{2s}} \int_{-1}^{1} g_{2s}(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = \frac{d}{dt} \int_{-1}^{1} g_{2s}^{(2s-1,0)}(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = (-1)^s \varphi(t) \tag{7}$$

и существуют константы $\mu_{i,j}$ такие, что

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} G_{2s} \right\|_{j \to 2s+j-i} \le \mu_{i,j}, \quad i = 0, 1, \dots, 2s, j = 0, 1, 2, \dots, \mu_{2s,j} = 1. \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть* $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$, $h(t,\tau)$ — *ядро интегрального оператора Фредгольма* $H = G_{2s} A^* A$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2$ *справедливо соотношение*

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^j h(t,\tau)}{\partial \tau^j} f(\tau)\, d\tau \right\| \le c_i \gamma^2 \|f\|, \quad i = 0, 1, \dots, 2s+r, \; j = 0, 1, 2, \dots, r, \tag{9}$$

где $c_i = \mu_{i,0}$, $i = 0, 1, \dots, 2s-1$, $c_i = 1$, $i = 2s, 2s+1, \dots, 2s+r$.

Доказательство. Если оператор A имеет вид (1), то

$$\frac{\partial^j h(t,\tau)}{\partial \tau^j} = \int_{-1}^{1} g_{2s}(t,u) \int_{-1}^{1} a(v,u) a^{(0,j)}(v,\tau)\, dv\, du. \tag{10}$$

Рассмотрим операторы

$$A_{0,i} f(t) = \int_{-1}^{1} a^{(0,i)}(t,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

$$\overline{A}_{i,0} f(t) = \frac{d^i}{dt^i} A^* f(t) = \int_{-1}^{1} a^{(0,i)}(\tau,t) f(\tau)\, d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

Для $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ имеем $A_{0,i}^* = \overline{A}_{i,0}$ и

$$\|A_{0,i}\|_{0\to 0} \le \gamma, \quad \|\overline{A}_{i,0}\|_{0\to 0} \le \gamma.$$

Пусть $i = 0, 1, \dots, 2s-1$. Тогда из (8), (10) следует

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^j h(t,\tau)}{\partial \tau^j} f(\tau)\, d\tau \right\| = \left\| \frac{d^i}{dt^i} G_{2s} A^* A_{0,j} f \right\| \le \mu_{i,0} \gamma^2 \|f\|.$$

Кроме того, из (7) и (10) для $i = 2s + p$, $p = 0, 1, \dots, r$, имеем

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^j h(t,\tau)}{\partial \tau^j} f(\tau)\, d\tau \right\| = \|\overline{A}_{p,0} A_{0,j} f\| \le \gamma^2 \|f\|.$$

Лемма доказана.

Отметим, что в теории некорректных задач (3) часто используется множество $M_\rho(A) = \{u : u \in L_2, u \in A^*Av, \|v\| \le \rho\}$. А именно: известно ([1], § 4), что для $f \in AM_\rho(A) = \{\varphi : \varphi = Au, u \in M_\rho(A)\}$ уравнение (3) имеет единственное решение $z = A^{-1}f$. Кроме того [1, с. 44], для любого $A \in C(L_2, L_2)$ и достаточно малых δ, ε имеем

$$\inf_{R_\delta} \sup_{f \in AM_\rho(A)} \sup_{f_\delta : \|f - f_\delta\| \le \delta} \|A^{-1}f - R_\delta(A, f_\delta)\| \asymp \delta^{2/3}, \tag{11}$$

$$\inf_{R_{\delta,\varepsilon}} \sup_{f \in AM_\rho(A)} \sup_{\substack{f_\delta, A_\varepsilon \\ \|f - f_\delta\| \le \delta \\ \|A - A_\varepsilon\|_{0\to 0} \le \varepsilon}} \|A^{-1}f - R_{\delta,\varepsilon}(A_\varepsilon, f_\delta)\| \asymp (\delta + \varepsilon)^{2/3}. \tag{12}$$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать классы Φ_γ^r уравнений (3) со свободными членами $f \in AM_\rho(A)$ и операторами A из $\mathcal{H}^r_\gamma$.

2. Традиционный подход к конечномерной аппроксимации решений уравнений (3) состоит в следующем (см., например, [2], гл. 6, § 3): выбираем некоторый конечномерный оператор $A_{N,\varepsilon}$, $\operatorname{rank} A_{N,\varepsilon} = N$, и элемент $f_{N,\delta} \in \operatorname{Range}(A_{N,\varepsilon})$ такие, что

$$\| A - A_{N,\varepsilon} \|_{0\to 0} \le \varepsilon, \quad \| f - f_{N,\delta} \| \le \delta.$$

Далее в качестве приближенного решения уравнения (3) берем элемент $R_{\delta,\varepsilon}(A_{N,\varepsilon}, f_{N,\delta})$, где $R_{\delta,\varepsilon}$ — некоторый метод регуляризации. Заметим, что, как правило, $R_{\delta,\varepsilon}(A_{N,\varepsilon}, f_{N,\delta}) \in \operatorname{Range}(A_{N,\varepsilon})$ и нахождение элемента $R_{\delta,\varepsilon}(A_{N,\varepsilon}, f_{N,\delta})$ сводится к решению системы N линейных алгебраических уравнений.

Из (11), (12) следует, что величины δ и ε должны иметь равные порядки, т. е. $\varepsilon \asymp \delta$. С другой стороны, известно, что

$$\sup_{A \in \mathcal{H}^r_\gamma} \inf_{\substack{A_N \\ \operatorname{rank} A_N = N}} \| A - A_N \|_{0\to 0} \asymp N^{-r}.$$

Таким образом, при фиксированном δ для того, чтобы в рамках традиционного подхода к конечномерной аппроксимации гарантировать на классе Φ^r_γ оптимальный порядок точности, необходимо положить

$$N \asymp \delta^{-1/r}. \tag{13}$$

Другой подход к конечномерной аппроксимации решений некорректных задач (3) связан с прямыми методами решения регуляризованных уравнений (6).

Так называемые прямые методы приближенного решения уравнения

$$\alpha z + Hz = \varphi \tag{14}$$

сводятся к случаю, когда по (14) определяется однозначно разрешимое уравнение

$$\alpha \bar{z} + H_N \bar{z} = \varphi, \tag{15}$$

где H_N — оператор, действующий в некоторое конечномерное подпространство F_N, $\dim F_N = N$, а $\bar{z}$ выбирается в качестве приближенного решения (14). При этом решение $\bar{z}$ уравнения (15) имеет вид

$$\bar{z} = \sum_{k=1}^{N} x_k \varphi_k + \alpha^{-1} \varphi, \tag{16}$$

где система $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$ является базисом в F_N, а неизвестные коэффициенты x_k определяются из некоторой системы N линейных алгебраических уравнений. Таким образом, под прямым методом будем понимать любое правило D, согласно которому оператору H сопоставляются подпространство F_N и оператор H_N, действующий в F_N. Адаптивным прямым методом назовем такой прямой метод, при котором координатная система $\{\varphi_k\}$ в (16) заранее не фиксирована, а зависит от оператора H конкретного уравнения (14). Для фиксированного N множество всех прямых методов обозначим через $\mathcal{D}_N$.

Пусть теперь X — гильбертово пространство, а Y_i, $i = \overline{1,3}$, $Y_1 \subset Y_3$ — некоторые его подпространства, норма в которых задается с помощью конечной совокупности линейных операторов $L^i_0, L^i_1, \ldots, L^i_{l_i}$ ($L^i_0 = E$ — тождественный оператор), $L^i_j : Y_i \to X$ таким образом, что для любого $\eta \in Y_i$

$$\|\eta\|_{Y_i} = \sum_{j=0}^{l_i} \|L_j^i \eta\|_X.$$

Пусть множество $\mathcal{H}$ состоит из операторов H, действующих из X в Y_1 и удовлетворяющих условиям:

1) $\|H\|_{X\to Y_1} \le \beta_1$, $\|(E-H)^{-1}\|_{X\to X} \le \beta_2$;

2) операторы $(L_j^1 H)^*$ действуют из X в Y_2 и

$$\sum_{j=0}^{l_1} \left\|(L_j^1 H)^*\right\|_{X\to Y_2} \le \beta_3$$

при любом $H \in \mathcal{H}$.

Через $\Psi = [\mathcal{H}, Y_3(\rho)]$ обозначим класс уравнений вида $z = Hz + g$ с операторами $H \in \mathcal{H}$ и свободными членами g из шара $Y_3(\rho)$ радиуса ρ в пространстве Y_3. Под погрешностью прямого метода $D \in \mathcal{D}_N$ на классе Ψ будем понимать величину

$$e_N(\Psi, D) = \sup_{\substack{z=Hz+g \\ H\in\mathcal{H}, g\in Y_3(\rho)}} \|z - \tilde{z}(D)\|_X,$$

где $\tilde{z}(D)$ — приближенное решение уравнения $z = Hz + g$ методом D. Как и в [3], рассмотрим оптимизацию прямых методов по точности в смысле величины

$$\Theta_N(\Psi) = \inf_{D\in\mathcal{D}_N} e_N(\Psi, D).$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество ортопроекторов P на всевозможные подпространства $F \subset X$, $\dim F \le n$, удовлетворяющие условию

$$\lim_{n\to\infty} \|E-P\|_{Y_1\to X} \|E-P\|_{Y_2\to X} \to 0.$$

Обозначим через $\tilde{D} = \tilde{D}(P) \in \mathcal{D}_N$ адаптивный прямой метод, при котором каждому оператору $H \in \mathcal{H}$ ставится в соответствие оператор

$$\tilde{H}_N = PH + HP - PHP, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad n = [N/2].$$

Лемма 2. *Для произвольного* $H \in \mathcal{H}$

$$\|H - \tilde{H}_N\|_{Y_3\to X} \le \beta_3 \prod_{i=1}^{3} \|E-P\|_{Y_i\to X}. \tag{17}$$

Кроме того, для $n > n_0$

$$\|(E-\tilde{H}_N)^{-1}\|_{X\to X} \le \sigma(P),$$

$$\sigma(P) = \beta_2(1 - \beta_2\beta_3 \|E-P\|_{Y_1\to X} \|E-P\|_{Y_2\to X})^{-1}. \tag{18}$$

Доказательство. При произвольных $z \in X$ и $P \in \mathcal{P}_N$ введем вспомогательный элемент $\zeta = H(z - Pz) \in Y_1$, для которого имеем

$$\|(H-\tilde{H}_N)z\|_X = \|\zeta - P\zeta\|_X \le \|E-P\|_{Y_1\to X} \|\zeta\|_{Y_1}. \tag{19}$$

Для нахождения оценки $\| \zeta \|_{Y_1}$ понадобятся предварительные выкладки. А именно: в случае $z \in Y_3, \eta \in X$ справедливы соотношения

$$| (L_j^1 H(z - Pz), \eta) | = | ((L_j^1 H - L_j^1 HP)(z - Pz), \eta) | =$$

$$= | ((z - Pz), (L_j^1 H)^* \eta - P(L_j^1 H)^* \eta) | \le$$

$$\le \| z - Pz \|_X \| (L_j^1 H)^* \eta - P(L_j^1 H)^* \eta \|_X \le$$

$$\le \| E - P \|_{Y_2 \to X} \| E - P \|_{Y_3 \to X} \| (L_j^1 H)^* \|_{X \to Y_2} \| z \|_{Y_3} \| \eta \|_X.$$

Для $z \in X$ аналогично получаем

$$| (L_j^1 H(z - Pz), \eta) | \le \| E - P \|_{Y_2 \to X} \| (L_j^1 H)^* \|_{X \to Y_2} \| z \|_X \| \eta \|_X. \tag{20}$$

По определению нормы в Y_1 для $z \in Y_2$ имеем

$$\| \zeta \|_{Y_1} = \sum_{j=0}^{l_1} | L_j^1 H(z - Pz) |_X = \sup_{\| \eta \|_X \le 1} \sum_{j=0}^{l_1} | (L_j^1 H(z - Pz), \eta) | \le$$

$$\le \beta_3 \| E - P \|_{Y_2 \to X} \| E - P \|_{Y_3 \to X} \| z \|_{Y_3}.$$

Подставляя найденную оценку в (19), получаем (17). Аналогичным образом с помощью (20) устанавливаем соотношение

$$\| H - \tilde{H}_N \|_{X \to X} \le \beta_3 \| E - P \|_{Y_1 \to X} \| E - P \|_{Y_2 \to X}. \tag{21}$$

Неравенство (18) непосредственно вытекает из теоремы о разрешимости приближенного уравнения [4, с. 517] и оценки (21). Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_{2n+1} \cap \mathcal{L}(X, Y_1)} \prod_{i=1}^{3} \| P \|_{X \to Y_i}^{-1} \ll \Theta_{2N}(\Psi) \ll \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \prod_{i=1}^{3} \| E - P \|_{Y_i \to X}.$$

Доказательство. Заметим, что для метода $\tilde{D}$ справедливо равенство $z - \tilde{z}(\tilde{D}) = (E - \tilde{H}_N)^{-1} (H - \tilde{H}_N) z$. Но тогда с учетом (17) и (18) имеем

$$\| z - \tilde{z}(\tilde{D}) \|_X \le \beta_3 \sigma(P) \prod_{i=1}^{3} \| E - P \|_{Y_i \to X} \| z \|_{Y_3}, \tag{22}$$

где

$$\| z \|_{Y_3} \le \| H \|_{X \to Y_1} \| (E - H)^{-1} \|_{X \to X} \| g \|_X + \| g \|_{Y_3} \le \rho(1 + \beta_1 \beta_2).$$

Подставляя найденную оценку в (21), окончательно получаем

$$\| z - \tilde{z}(\tilde{D}) \|_X \ll \prod_{i=1}^{3} \| E - P \|_{Y_i \to X}, \quad P \in \mathcal{P}_n.$$

В силу произвольности $H \in \mathcal{H}$, $g \in Y_3(\rho)$ и $P \in \mathcal{P}_n$ отсюда сразу же следует верхняя оценка для величины Θ_{2N}.

Для получения оценки возьмем произвольный $P \in \mathcal{P}_{2n+1} \cap \mathcal{L}(X, Y_1) : X \to F$, $\dim F = 2n + 1$, и рассмотрим оператор $H_0 = \Delta \| P \|_{X \to Y_1}^{-1} \| P \|_{X \to Y_2}^{-1} P$, где число

$\Delta > 0$ следует выбрать так, чтобы $H_0 \in \mathcal{H}$. Для этого прежде всего нужно, чтобы

$$\| H_0 \|_{X \to Y_1} = \Delta \| P \|^{-1}_{X \to Y_2} \le \beta_1.$$

Кроме того, потребуем выполнения следующего условия:

$$\| H_0 \|_{X \to X} = \Delta \| P \|^{-1}_{X \to Y_1} \| P \|^{-1}_{X \to Y_2} \le 1.$$

Тогда согласно теореме 5 [5, с. 230] имеем

$$\| (E - H_0)^{-1} \|_{X \to X} = \left\| E + \sum_{i=1}^{\infty} (H_0)^i \right\|_{X \to X} \le$$

$$\le 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \| H_0 \|^i_{X \to X} = \left(1 - \| H_0 \|_{X \to X}\right)^{-1}.$$

Налагая условия на норму резольвенты из определения класса $\mathcal{H}$, получаем оценку

$$\Delta \le (\beta_2 - 1)\beta_2^{-1} \| P \|_{X \to Y_1} \| P \|_{X \to Y_2}.$$

Далее необходимо обеспечить выполнение условия 2, налагаемого на класс $\mathcal{H}$. Для этого с целью сокращения объема выкладок введем обозначение $\Delta_1 = \Delta \| P \|^{-1}_{X \to Y_1} \| P \|^{-1}_{X \to Y_2}$. Итак, в силу свойств ортопроектора

$$\left(L_j^1 H_0\right)^* = \left(L_j^1 \Delta_1 P\right)^* = \Delta_1 \left(L_j^1 P^2\right)^* = \Delta_1 P \left(L_j^1 P\right)^*.$$

Но тогда по определению нормы элемента в Y_1 имеем

$$\left\| \left(L_j^1 P\right)^* \right\|_{X \to Y_2} = \sup_{\|\eta\|_X \le 1} \sum_{i=0}^{l_2} \left\| (L_j^2 P)^* \eta \right\|_{Y_2} =$$

$$= \sup_{\|\eta\|_X \le 1} \sum_{i=0}^{l_2} \Delta_1 \left\| L_i^2 P \left(L_j^1 P\right)^* \eta \right\|_X = \Delta_1 \sup_{\|\eta\|_X \le 1} \left\| P \left(L_j^1 P\right)^* \eta \right\|_{Y_2} =$$

$$= \Delta_1 \| P \|_{X \to Y_2} \sup_{\|\eta\|_X \le 1} \left\| \left(L_j^1 P\right)^* \eta \right\|_X. \tag{23}$$

Оценим теперь

$$\sum_{j=0}^{l_1} \left\| (L_j^1 P)^* \eta \right\|_X = \sup_{\|\psi\|_X \le 1} \sum_{j=0}^{l_1} \left| \left((L_j^1 P)^* \eta, \psi\right) \right| = \sup_{\|\psi\|_X \le 1} \sum_{j=0}^{l_1} \left| (\eta, L_j^1 P \psi) \right| \le$$

$$\le \| \eta \|_X \sup_{\|\psi\|_X \le 1} \sum_{j=0}^{l_1} \| L_j^1 P \psi \|_X = \| \eta \|_X \sup_{\|\psi\|_X \le 1} \| P \psi \|_{Y_1} \le \| \eta \|_X \| P \|_{X \to Y_1}. \tag{24}$$

Тогда из (23), (24) находим

$$\sum_{j=0}^{l_1} \left\| (L_j^1 H_0)^* \eta \right\|_{X \to Y_2} \le \Delta_1 \| P \|_{X \to Y_1} \| P \|_{X \to Y_2} = \Delta.$$

Следовательно, для включения $H_0 \in \mathcal{H}$ достаточно положить $\Delta = \{ \beta_1, (\beta_2 - 1)\beta_2^{-1}, \beta_3 \}$.

Покажем теперь, что на H_0 достигается оценка снизу. Пусть $S_{\rho'} = S_{2n+1,\rho'}$ — шар радиуса ρ' в F с нормой пространства X. Выберем ρ' так, чтобы элементы $g = z - H_0 z$ принадлежали $Y_3(\rho)$ при $z \in S_{\rho'}$. Для этого заметим, что

$$\| g \|_{Y_3} = \| z - H_0 z \|_{Y_3} = \| z - \Delta_1 P z \|_{Y_3} = (1-\Delta_1) \| Pz \|_{Y_3} \le$$
$$\le (1-\Delta_1) \| P \|_{X \to Y_3} \| z \|_X \le (1-\Delta_1) \| P \|_{X \to Y_3} \rho'.$$

Таким образом, при условии

$$\rho' = \rho \left((1-\Delta_1) \| P \|_{X \to Y_3} \right)^{-1} \asymp \| P \|^{-1}_{X \to Y_3}$$

элементы $g = z - H_0 z$ заполняют шар $Y_3(\rho)$ в случае, когда $z \in S_{\rho'}$. Обозначим $U_{\rho'} = \{ g : g = z - H_0 z, z \in S_{\rho'} \}$. Очевидно, множество решений уравнений $g = H_0 z + g$, $g \in U_{\rho'}$ в силу однозначной разрешимости этих уравнений совпадает с $S_{\rho'}$, а элементы $H_0 z = \Delta_1 z$ заполняют шар $S_{\rho''} = S_{2n+1,\rho''}$ радиуса $\rho'' \asymp \asymp \prod_{i=1}^{3} \| P \|^{-1}_{X \to Y_i}$ в F с нормой пространства X, если z пробегает шар $S_{\rho'}$.

В силу теоремы о поперечнике шара [6, с. 255] имеем

$$\Theta_{2n}(\Psi) = \inf_{D \in \mathcal{D}_{2n}} \sup_{\substack{z = Hz + g \\ H \in \mathcal{H}, g \in Y_3(\rho)}} \| z - \tilde{z}(D) \|_X \ge \inf_{D \in \mathcal{D}_{2n}} \sup_{\substack{z = H_0 z + g \\ g \in U_{\rho'}}} \| z - \tilde{z}(D) \|_X =$$

$$= \inf_{D \in \mathcal{D}_{2n}} \sup_{z \in S_{\rho'}} \| H_0 z - H_{2n} \tilde{z}(D) \|_X \ge \inf_{\substack{M_n \in X \\ \dim M_n \le 2n}} \sup_{z \in S_{\rho''}} \inf_{\eta \in M_n} \| z - \eta \|_X =$$

$$= d_{2n}(S_{\rho''}, X) = \rho'' \asymp \prod_{i=1}^{3} \| P \|^{-1}_{X \to Y_i},$$

где $d_{2n}(S_{\rho''}, X)$ — $2n$-поперечник по Колмогорову шара $S_{\rho''}$.

Теорема доказана.

3. Обозначим $\Psi_\alpha^{p,q,\nu} = \Psi_\alpha^{p,q,\nu}(d, c, \gamma, \rho)$, $p \ge \nu$, $d = d(\alpha)$, $c = \{ c_i \}$ класс интегральных уравнений Фредгольма вида (14), для которых выполняется условие $\| (\alpha E + H)^{-1} \|_{0 \to 0} \le d(\alpha)$, а ядра $h(t, \tau)$ интегральных операторов H удовлетворяют условию (9) при $i = 0, 1, \ldots, p$, $j = 0, 1, \ldots, q$ и свободные члены φ принадлежат шару $W_2^\nu(\rho)$. Таким образом, с помощью леммы 1 установлено, что при $X = L_2$, $Y_1 = W_2^p$, $Y_2 = W_2^q$, $Y_3 = W_2^\nu$, $L_j^i = d^j / dx^j$, $i = \overline{1,3}$, уравнения (14) из класса $\Psi_\alpha^{p,q,\nu}$ принадлежат классу Ψ (см. п. 3).

Если теперь в качестве ортопроектора $P \in \mathcal{P}_n$ рассматривать оператор P_n, сопоставляющий функции $f \in L_2$ ее n-ю частную сумму ряда Фурье по ортонормированной системе полиномов Лежандра, то в силу неравенств (22), (18) и известной оценки $\| E - P_n \|_{W_2^i \to L_2} \le b n^{-i}$ (b — абсолютная константа) для любого уравнения (14) из $\Psi_\alpha^{p,q,\nu}(d, c, \gamma, \rho)$ и достаточно больших n имеем

$$\| z - \bar{z}(\tilde{D}) \| \le \frac{c_{p,q} d(\alpha)}{1 - c_{p,q} d(\alpha) n^{-p-q}} n^{-p-q-\nu} \| z \|_{W_2^\nu}, \tag{25}$$

где $\bar{z}(\tilde{D})$ — решение приближенного уравнения (15), построенного согласно прямому методу $\tilde{D} = \tilde{D}(P_n)$, а

$$c_{p,q} = b(q+1)\gamma^2 \sum_{i=0}^{p} c_i.$$

Теорема 2. *Пусть* $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ *и* $f \in AM_\rho(A)$. *Предположим, что существуют такие константы* $d > 0, \kappa > 0$, *что для* $\alpha \in (0, 1)$

$$\| (\alpha E + G_{2s} A^* A)^{-1} \|_{0 \to 0} \le d\alpha^{-\kappa}.$$

Тогда при $n^{-2r-2s} = o(\alpha^\kappa)$

$$\| z_\delta^\alpha - \bar{z}_{n,\delta}^\alpha(\tilde{D}) \| \le c_{r,s,\kappa} \alpha^{-\kappa-1} n^{-3r-4s} \| A^{-1} f - z_\delta^\alpha \|,$$

где z_δ^α — *точноерешение уравнения* (6), $\bar{z}_{n,\delta}^\alpha(\tilde{D})$ — *приближенное решение* (6) *методом* $\tilde{D}$, *а* $c_{r,s,\kappa}$ — *некоторая константа, зависящая от* $\gamma, \mu_{i,j}$ *и* d.

Доказательство. Из (6) следует неравенство

$$\| z_\delta^\alpha \|_{W_2^{2s+r}} \le \alpha^{-1} \| G_{2s} \|_{r \to 2s+r} \| A^* \|_{0 \to r} \| A z_\delta^\alpha - f_\delta \|.$$

Далее,

$$\| A z_\delta^\alpha - f_\delta \| \le \| f - A z_\delta^\alpha \| + \| f - f_\delta \| \le \| A \|_{0 \to 0} \| A^{-1} f - z_\delta^\alpha \| + \delta \le$$
$$\le (1 + \| A \|_{0 \to 0}) \| A^{-1} f - z_\delta^\alpha \|.$$

Таким образом, учитывая (2) и (8), имеем

$$\| z_\delta^\alpha \|_{W_2^{2s+r}} \le \alpha^{-1} \mu_{0,r} \gamma (1+\gamma) \| A^{-1} f - z_\delta^\alpha \| = \gamma_1 \alpha^{-1} \| A^{-1} f - z_\delta^\alpha \|.$$

Используя это неравенство и оценку (26), окончателно получаем

$$\| z_\delta^\alpha - \bar{z}_{n,\delta}^\alpha(\tilde{D}) \| \le \frac{c_{2s+r,r} d\alpha^{-\kappa}}{1 - c_{2s+r,r} d\alpha^{-\kappa} n^{-2r-2s}} \gamma_1 \alpha^{-1} n^{-3r-4s} \| A^{-1} f - z_\delta^\alpha \| =$$
$$= c_{r,s,\kappa} \alpha^{-\kappa-1} n^{-3r-4s} \| A^{-1} f - z_\delta^\alpha \|.$$

4. В методе регуляризации по Тихонову $T_\delta^{\alpha,s}$ большое значение имеет случай, связанный с $s = 0$. Положим

$$T_\delta^\alpha(A, f_\delta) = T_\delta^{\alpha,0}(A, f_\delta) = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* f_\delta.$$

Известно [1, с. 45], что для $\alpha \asymp \delta^{2/3}$

$$\sup_{f \in AM_\rho(A)} \sup_{f_\delta : \| f - f_\delta \| \le \delta} \| A^{-1} f - T_\delta^\alpha(A, f_\delta) \| \asymp \delta^{2/3}, \tag{26}$$

и метод Тихонова T_δ^α является оптимальным по порядку в смысле точности на классе Φ_γ^r.

Через $T_{n,\delta}^\alpha(A, f_\delta)$ обозначим приближенное решение уравнения (6) адаптивным прямым методом $\tilde{D}(P_n)$ при $s = 0$, т. е.

$$T_{n,\delta}^{\alpha}(A, f_\delta) = (\alpha E + \tilde{H}_{2n}(A^*A))^{-1}A^*f_\delta.$$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \asymp \delta^{2/3}$, $n \asymp \delta^{-4/9r}$. *Тогда выполняется соотношение*

$$\sup_{A \in \mathcal{H}_\gamma^r} \sup_{f \in AM_\rho(A)} \sup_{f_\delta:\, \|f - f_\delta\| \le \delta} \| A^{-1}f - T_{n,\delta}^{\alpha}(A, f_\delta)\| \asymp \delta^{2/3}.$$

Доказательство. Прежде всего отметим известный факт, что для положительного и самосопряженного оператора A^*A

$$\|(\alpha E + A^*A)^{-1}\|_{0\to 0} \le \alpha^{-1}. \tag{27}$$

Из (27) следует, что $\kappa = 1$ и $d = 1$ удовлетворяют условиям теоремы 2 при $s = 0$ и $z_\delta^\alpha = T_\delta^\alpha(A, f_\delta)$. Тогда, используя (26), для $f \in AM_\rho(A)$, $A \in \mathcal{H}_\gamma^r$ получаем

$$\|A^{-1}f - T_{n,\delta}^{\alpha}(A, f_\delta)\| \le \|A^{-1}f - z_\delta^\alpha\| + \|z_\delta^\alpha - T_{n,\delta}^{\alpha}(A, f_\delta)\| \asymp$$

$$\asymp (1 + c_{r,0,1}\alpha^{-2}n^{-3r})\|A^{-1}f - z_\delta^\alpha\| \asymp \delta^{2/3}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что $T_{n,\delta}^{\alpha}$ является методом конечномерной аппроксимации решений задач (3), причем для класса Φ_γ^r этот метод является оптимальным по порядку в смысле точности. Из теоремы 3 следует, что для класса Φ_γ^r реализация метода $T_{n,\delta}^{\alpha}$ состоит в решении системы $N = 2n \asymp \delta^{-4/9r}$ линейных алгебраических уравнений. Если указанный результат сравнить с оценкой (13), то, очевидно, для класса Φ_γ^r метод $T_{n,\delta}^{\alpha}$ является существенно более экономичным в смысле размерности N, чем методы, построенные в рамках традиционного подхода к конечномерной аппроксимации.

5. Реализация метода $T_{n,\delta}^{\alpha}$ связана с вычислением двумерных коэффициентов Фурье–Лежандра для ядер интегральных операторов A^*A, что может оказаться весьма трудоемкой задачей с вычислительной точки зрения. Один из возможных путей преодоления указанной трудности состоит в следующем. В интегральном уравнении $Az(t) = f_\delta(t)$ с оператором A вида (1) делаем замену переменных $t = \cos u$, $t = \cos v$ после чего получаем уравнение

$$\tilde{A}\,\tilde{z}(t) = \int_0^\pi \tilde{a}(u, v)\tilde{z}(v)\sin v\, dv = \tilde{f}_\delta(u), \tag{28}$$

где

$$\tilde{a}(u, v) = -a(\cos u, \cos v), \quad \tilde{z}(v) = z(\cos v), \quad \tilde{f}_\delta(u) = f_\delta(\cos u).$$

Учитывая, что ядро $\tilde{a}(u, v)$ и свободный член $\tilde{f}_\delta(u)$ являются четными 2π-периодическими функциями своих аргументов, заменим их интерполяционными аналогами сумм Фурье по тригонометрической системе, т. е.

$$\tilde{a}_m(u, v) = \sum_{k,l=0}^{m} a_{k,l}\cos ku \cos lv, \qquad \tilde{f}_{\delta,m}(u) = \sum_{k=0}^{m} f_k \cos ku,$$

где коэффициенты $a_{k,l}$ и f_k определяются по формулам

$$f_k = \frac{\nu_k}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} \cos\frac{2\pi ki}{m_1}\tilde{f}_\delta\left(\frac{2\pi i}{m_1}\right), \ \nu_0 = 1, \nu_k = 2, k = 1, 2, \ldots,$$

$$a_{k,l} = \frac{\nu_k \nu_l}{m_1^2}\sum_{i,j=1}^{m_1} \cos\frac{2\pi ki}{m_1}\cos\frac{2\pi lj}{m_1}\tilde{a}\left(\frac{2\pi i}{m_1}, \frac{2\pi j}{m_1}\right), \tag{29}$$

а $m_1 \geq 2m$. Отметим, что вычисления по формулам (29) могут быть проведены с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье, что потребует выполнения $O(m_1^2 \log^2 m_1)$ арифметических операций над $O(m_1^2)$ значениями ядра $a(t, \tau)$ и свободного члена $f_\delta(t)$.

Вместо уравнения (28) рассмотрим уравнение

$$\tilde{A}_m \tilde{z}_m(u) = \int_0^\pi \tilde{a}_m(u, v)\tilde{z}_m(v)\sin v\, dv = \tilde{f}_{\delta,m}(u).$$

Применяя к этому уравнению метод регуляризации Тихонова при $s = 0$, получаем следующее уравнение (4):

$$\alpha \tilde{z}_m(u) + \sin u \int_0^\pi \tilde{a}_m^*(u, v)\sin v\, \tilde{z}_m(v)\, dv = \sin u\, f_{\delta,m}^*(u), \tag{30}$$

где

$$a_m^*(u, v) = \int_0^\pi \tilde{a}_m(\xi, u)\tilde{a}_m(\xi, v)\, d\xi = \pi\sum_{k,l=0}^{m} \cos ku \cos lv\left(\sum_{p=0}^{m}\frac{a_{pk}a_{pl}}{\nu_p}\right),$$

$$f_{\delta,m}^*(u) = \int_0^\pi \tilde{a}_m(v, u)\tilde{f}_{\delta,m}(v)\, dv = \pi\sum_{k=0}^{m} \cos ku\left(\sum_{p=0}^{m}\frac{a_{pk}f_p}{\nu_p}\right). \tag{31}$$

Решение уравнения (30) естественно искать в виде $\tilde{z}_m(u) = \sin u\, g_m(u)$, где $g_m(u)$ является решением уравнения с четными периодическими коэффициентами

$$\alpha g_m(u) + A_m^* g_m(u) \equiv \alpha g_m(u) + \int_0^\pi a_m^*(u, v)\sin^2 v\, g_m(v)\, dv = f_{\delta,m}^*(u). \tag{32}$$

Приближенное решение уравнения (32) будем строить с помощью адаптивного прямого метода $\tilde{D}(S_n)$, при котором оператору A_m^* ставится в соответствие $2n$-мерный оператор

$$\tilde{H}_{2n}(A_m^*) = A_m^* S_n + S_n A_m^* - S_n A_m^* S_n,$$

где

$$S_n \varphi(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \cos ku \cos kv\right] dv$$

— ортопроектор на линейную оболочку функции $1, \cos u, \cos 2u, \ldots, \cos(n - 1)u$. При методе $\tilde{D}(S_n)$ приближенное решение $g_{m,n}(u)$ уравнения (32) имеет вид

$$g_{m,n}(u) = \alpha^{-1}\left[f_{\delta,m}^*(u) + \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cos ku + \sum_{k=n}^{2n-1} x_k A_m^* \cos(k-n)u\right],$$

где

$$A_m \cos(k-n)u = \frac{\pi^2}{4} \sum_{q=0}^{m} \cos qu \sum_{p=0}^{m} \frac{a_{pq}}{\nu_p} \left[\frac{2a_{p,k-n}}{\nu_{k-n}} - \frac{a_{p,k-n-2}}{\nu_{k-n-2}} - \frac{a_{p,k-n+2}}{\nu_{k-n+2}} \right],$$

а неизвестные коэффициенты x_k определяются из системы $2n$ линейных алгебраических уравнений. Из (29) и (31) видно, что для подсчета коэффициентов этой системы и нахождения ее решения необходимо выполнить лишь некоторое число элементарных арифметических операций над значениями ядра и свободного члена исходного уравнения в $O(m_1^2)$ точках. В силу известных оценок приближения дифференцируемых функций интерполяционными аналогами сумм Фурье, для уравнений из класса Φ_γ^r нужно выбрать m и m_1 из условия $m \asymp m_1 \asymp \delta^{-1/r}$. Для определения размерности решаемой системы линейных уравнений с учетом теоремы 3 можно положить $2n \asymp \delta^{-4/9r}$. Таким образом, в рамках описанной выше схемы конечномерной аппроксимации размерность решаемой линейной системы существенно меньше размерности массива значений ядра и свободного члена.

Для иллюстрации эффективности приведенного алгоритма рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{z(t)\,d\tau}{(t-\tau)^2+1} = f(t) \qquad (33)$$

с точным решением $z(t) = (1-\tau^2)^2$. Это уравнение ранее использовалось в качестве тестового примера в работе [7], посвященной вычислительным аспектам метода Тихонова. По сути дела, в [7] на базе метода Тихонова и аппроксимации интегрального оператора квадратурной суммой реализован традиционный подход к конечномерной аппроксимации решения уравнения (33). При этом число используемых значений ядра и свободного члена равно соответственно 1681 и 41. Размерность решаемой системы линейных алгебраических уравнений равна 41. При значениях параметра регуляризации $\alpha = 10^{-8}$, $\alpha = 5 \cdot 10^{-9}$, $\alpha = 10^{-9}$ в [7] достигнута точность соответственно 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-2}.

Применение описанной выше вычислительной схемы к уравнению (33) позволило при том же числе используемых значений ядра и свободного члена и тех же значениях параметра регуляризации достичь точность порядка 10^{-3} после решения системы только 6 линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, приведенный пример подтверждает сделанный ранее вывод о том, что применение адаптивных прямых методов к регуляризованным уравнениям позволяет существенно снизить размерность решаемой системы по сравнению с традиционным подходом к конечномерной аппроксимации решений интегральных уравнений I рода.

1. *Вайникко Г. М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. – Тарту: Тарт. ун-т, 1982. – 110 с.
2. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
3. *Переверзев С. В., Солодкий С. Г.* О выборе базисных функций для приближенного решения уравнений типа уравнений Пайерлса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1991. – **31**, № 1. – С. 122–131.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
6. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
7. *Тихонов А. Н., Гласко В. Б.* О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма I рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1964. – **4**, № 3. – С. 564–571.

Получено 02.02.94