УДК 517.51

С. А. Стасюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ КЛАССОВ $MB^{\omega}_{p,\theta}$ *

We obtain exact-order estimates for the best approximation of periodic functions of several variables from the classes $MB^{\omega}_{p,\theta}$ by trigonometric polynomials with the “numbers” of harmonics from graded hyperbolic crosses in the metric of the space L_q.

Одержано точні за порядком оцінки найкращого наближення в метриці простору L_q періодичних функцій кількох змінних із класів $MB^{\omega}_{p,\theta}$ тригонометричними поліномами з „номерами” гармонік із східчастих гіперболічних хрестів.

1. Введение. В настоящей работе решаются задачи приближения на классах $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных смешанной гладкости (определение см., например, в [1, 2]) в случае, когда гладкостная функция Ω имеет вид

$$\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$$

(при таких $\Omega(t)$ будем пользоваться обозначением $MB^{\omega}_{p,\theta}$), а $\omega(\tau)$ — функция одной переменной типа модуля непрерывности порядка l, $l \in \mathbb{N}$, которая удовлетворяет условию Бари – Стечкина (определение см. ниже). Если $\omega(\tau) = \tau^r$, $0 < r < l$, то классы $MB^{\omega}_{p,\theta}$ совпадают с известными классами Никольского – Бесова $MB^{r}_{p,\theta}$ — единичными шарами в пространстве $B^{r}_{p,\theta}$.

В [1, 3 – 5] были найдены точные по порядку оценки величин

$$E_{Q_n^1}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q := \sup_{f \in MB^{\omega}_{p,\theta}} E_{Q_n^1}(f)_q := \sup_{f \in MB^{\omega}_{p,\theta}} \inf_{t \in T(Q_n^1)} \|f - t\|_q$$

— наилучшего приближения классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ тригонометрическими полиномами с гармониками из ступенчатых гиперболических крестов $Q_n^1 = \bigcup_{(s,1) \leq n} \rho(s)$ $((s,1) = s_1 + \ldots + s_d$, $\rho(s) = \{k = (k_1, \ldots, k_d)\colon\ 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j},\ s_j \in \mathbb{N},\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, d\}$, $T(Q_n^1)$ — множество тригонометрических полиномов с „номерами” гармоник из Q_n^1).

Целью настоящей работы является получение слабой асимптотики величин $E_{Q_n^1}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q$ при не рассмотренных ранее соотношениях между параметрами p и q, а именно при „крайних” значениях параметров p и q, т. е. когда оба или один из них принимают значение, равное 1 или ∞.

Приведем необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, обозначает d-мерное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi)$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ с конечной нормой

*Выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № GP/F32/0100).

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Опишем условие Бари – Стечкина (S) [6], которое понадобится при определении классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ и при формулировке соответствующих результатов.

Функция одной переменной $\omega(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S), если $\omega(\tau)/\tau^{\alpha}$ почти возрастает при некотором $\alpha > 0$, т. е. существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C > 0$, что

$$\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}} \le C\, \frac{\omega(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Теперь дадим определение самих классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$.

Пусть $V_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2n-1$ вида

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt$$

(для $n = 1$ вторую сумму полагаем равной нулю). Для $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, d$, положим

$$A_s(x) := \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

и для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_s(f)$ обозначим свертку $A_s(f) = f * A_s$.

При $1 \le p \le \infty$ класс $MB^{\omega}_{p,\theta}$ определяется следующим образом:

$$MB^{\omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon \|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

где

$$\|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s} \left(\omega(2^{-(s,1)}) \right)^{-\theta} \|A_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{MB^{\omega}_{p,\infty}} = \sup_{s} \frac{\|A_s(f)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})}\,. \tag{2}$$

Отметим, что в [4] (при $\theta = \infty$) и в [5] (при $1 \le \theta < \infty$) установлено, что при $1 \le q \le p \le \infty$ (за исключением случаев $p = q = \infty$ и $2 < p \le \infty$, $q = 1$) выполняется порядковое равенство

$$E_{Q_n^1}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/p_0 - 1/\theta)_+}, \tag{3}$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$, $a_+ = \max\{a; 0\}$.

2. Основные результаты. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $2 < p \le \infty$, $q = 1$, $1 \le \theta \le 2$ *или* $p = q = \infty$, $\theta = 1$, *тогда при любом* $d \ge 1$ *выполняется порядковая оценка*

$$E_{Q_n^1}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}). \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть* $d = 2$, *тогда справедливы соотношения*

$$E_{Q_n^1}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} \omega(2^{-n}) n^{1-1/\theta}, & \text{если} \quad p = q = \infty, \;\; 1 < \theta \le \infty, \\ \omega(2^{-n}) n^{1/2-1/\theta}, & \text{если} \quad 2 < p \le \infty, \;\; q = 1, \;\; 2 < \theta \le \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Доказательство оценок сверху в (4), (5) будем проводить в d-мерном ($d \ge 1$) случае. Оценка сверху в (4), (5) при $q = 1$ вытекает из (3) вследствие вложения $MB^{\omega}_{p,\theta} \subset MB^{\omega}_{2,\theta}$, $2 < p \le \infty$.

В случае $p = q = \infty$, воспользовавшись неравенством Гельдера и приняв во внимание, что $\omega(\tau)$ удовлетворяет условию (S) с некоторым $\alpha > 0$, для произвольной функции $f \in MB^{\omega}_{\infty,\theta}$ будем иметь

$$E_{Q_n^1}(f)_\infty \le \left\| \sum_{(s,1)>n} A_s(f) \right\|_\infty \le \sum_{(s,1)>n} \|A_s(f)\|_\infty \le$$

$$\le \left(\sum_{(s,1)>n} (\omega(2^{-(s,1)}))^{-\theta} \|A_s(f)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,1)>n} \left(\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \right)^{\theta'} 2^{-\alpha\theta'(s,1)} \right)^{1/\theta'} \ll$$

$$\ll \|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(s,1)>n} 2^{-\alpha\theta'(s,1)} \right)^{1/\theta'} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\alpha n} n^{(d-1)/\theta'} = \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-1/\theta)},$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

Оценки сверху установлены.

Доказательство оценок снизу в (4), (5) будет базироваться на построении соответствующих экстремальных функций.

Рассмотрим функции

$$\varphi_1(x) = \sum_{s_1'=0}^{m} e^{i(4^{s_1'} x_1 + 4^{m-s_1'} x_2)} \qquad \text{и} \qquad \varphi_2(x) = \sum_{s_1'=0}^{m} \cos 4^{s_1'} x_1 \cos 4^{m-s_1'} x_2,$$

а также

$$g_j(x) = C_j\, \omega(2^{-n})\, n^{-1/\theta} \varphi_j(x), \quad j = 1, 2.$$

При $\theta = \infty$ полагаем $\dfrac{1}{\theta} = 0$. Рассмотрим множество $S(m) = \{s\colon s = 2s', s_1' + s_2' = m\}$, где $s' = (s_1', s_2') \in \mathbb{Z}^2_+$. Очевидно, что при $\theta = \infty$ и $s \in S(m)$ выполняются порядковые неравенства

$$||A_s(g_j)||_\infty \ll \omega(2^{-(s,1)}), \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

поэтому, учитывая определение (1) нормы в $MB^{\omega}_{\infty,\theta}$ и $\#S(m) \asymp m$, при $1 \le \theta < \infty$ и $n = 2m$ имеем

$$||g_j||_{MB^{\omega}_{\infty,\theta}} \ll n^{-1/\theta} \left(\sum_{s \in S(m)} (\omega^{-1}(2^{-(s,1)})\omega(2^{-(s,1)}))^{\theta} \right)^{1/\theta} \asymp 1. \tag{7}$$

Из (6) и (7) делаем вывод, что согласно (1), (2) $g_j \in MB^{\omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, при определенном значении $C_j > 0$, $j = 1, 2$.

В [7] (гл. 3, § 3) доказано, что

$$E_{Q^1_{2m-1}}(\varphi_1)_1 \gg m^{1/2}, \qquad E_{Q^1_{2m-1}}(\varphi_2)_{\infty} \gg m,$$

поэтому

$$E_{Q^1_{n-1}}(MB^{\omega}_{p,\theta})_1 \ge E_{Q^1_{2m-1}}(MB^{\omega}_{\infty,\theta})_1 \ge E_{Q^1_{2m-1}}(g_1)_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})n^{-1/\theta} E_{Q^1_{2m-1}}(\varphi_1)_1 \gg \omega(2^{-n}) n^{1/2-1/\theta}$$

для $2 < p \le \infty$, $q = 1$, $2 < \theta \le \infty$, а для $p = q = \infty$, $1 < \theta \le \infty$

$$E_{Q^1_{n-1}}(MB^{\omega}_{\infty,\theta})_{\infty} \ge E_{Q^1_{2m-1}}(g_1)_{\infty} \gg \omega(2^{-n})n^{-1/\theta} E_{Q^1_{2m-1}}(\varphi_2)_{\infty} \gg \omega(2^{-n}) n^{1-1/\theta}.$$

Таким образом, соотношение (5) доказано.

Установим теперь оценку снизу в (4).

Рассмотрим сначала случай $2 < p \le \infty$, $q = 1$, $1 \le \theta \le 2$. В качестве экстремальной выберем функцию

$$g_3(x) = C_3\, \omega(2^{-n}) e^{i(2^{\tilde{s}_1}x_1 + \dots + 2^{\tilde{s}_d}x_d)}, \quad C_3 > 0,$$

где $(\tilde{s}, 1) = n + 1$, $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_d) \in \mathbb{N}^d$.

Несложно проверить, что $g_3 \in MB^{\omega}_{p,\theta}$ при некотором значении $C_3 > 0$. Таким образом, имеем

$$E_{Q^1_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_1 \ge E_{Q^1_n}(g_3)_1 = \|g_3\|_1 \asymp \omega(2^{-n}). \tag{8}$$

Наконец, в случае $p = q = \infty$, $\theta = 1$, как и в (8), получаем

$$E_{Q^1_n}(MB^{\omega}_{\infty,1})_{\infty} \ge E_{Q^1_n}(g_3)_{\infty} = \|g_3\|_{\infty} \asymp \omega(2^{-n}).$$

Заметим, что соответствующие оценки снизу в (4), вследствие независимости правой части (4) от размерности d, также следуют из одномерного случая (см., например, [8]).

Оценки снизу установлены.

Теорема доказана.

В завершение работы приведем некоторые комментарии.

При $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 0$, теоремы 1 и 2 содержат соответствующие результаты и для классов $MB^r_{p,\theta}$, в частности, случаи $p = q = \infty$ и $p = \infty$, $q = 1$ при $d = 2$, $\theta = \infty$ рассмотрены в [7] (гл. 3, § 3), $1 \le \theta \le 2$, $q = 1$, $2 < p < \infty$ – в [9], $2 < \theta < \infty$, $q = 1$, $2 < p \le \infty$ – в [10], а $p = q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$ – в [11].

1. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**, № 1. – P. 35 – 48.
2. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 692 – 704.
3. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
4. *Пустовойтов Н. Н.* О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math. – 2003. – **29**, № 3. – P. 201 – 218.
5. *Стасюк С. А.* Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Мат. заметки. — 2010. – **87**, № 1. – С. 108 – 121.
6. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – **2**. – С. 489 – 523.
7. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci., 1993. – 419 p.
8. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. студ. – 2011. – **35**, № 1. – С. 66 – 73.
9. *Романюк А. С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 2. – С. 93 – 114.
10. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций одной и многих переменных // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 3. – С. 429 – 442.
11. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. – 2011. – **37**, № 3. – P. 171 – 213.

Получено 07.10.11