УДК 512.5

В. И. Сенашов (Ин-т вычислит. моделирования СО РАН, Красноярск, Россия)

О ГРУППАХ С СИЛЬНО ВЛОЖЕННОЙ ПОДГРУППОЙ, ИМЕЮЩЕЙ ПОЧТИ СЛОЙНО КОНЕЧНУЮ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ ЧАСТЬ*

We study Shunkov groups with the following condition: the normalizer of any finite nonunit subgroup has an almost layer-finite periodic part. It is proved that such a group has an almost layer-finite periodic part if it has a strongly imbedded subgroup with almost layer-finite periodic part.

Вивчаються групи Шункова з наступною умовою: нормалізатор будь-якої скінченної нетривіальної підгрупи має майже шарово скінченну періодичну частину. За цієї умови встановлено майже шарову скінченність періодичної частини групи Шункова з сильно вкладеною підгрупою, що має майже шарово скінченну періодичну частину.

Группой Шункова называется такая группа G, в которой для любой ее конечной подгруппы K в фактор-группе $N_G(K)/K$ два любых сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. В статье изучается класс групп Шункова.

Слойно конечные группы впервые появились без названия в статье С. Н. Черникова [1], а затем в его последующих публикациях за ними закрепилось название слойно конечных групп. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. *Почти слойно конечные группы* — это расширения слойно конечных групп с помощью конечных. Напомним, что *сильно вложенной* называется собственная подгруппа H группы G, если H содержит элемент порядка 2 (инволюцию) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций. Элемент называется *строго вещественным* относительно некоторой инволюции, если при сопряжении этой инволюцией он переводится в обратный к нему элемент. *Периодической частью* группы называется множество ее элементов конечного порядка, если оно является группой. Если произведение всех нормальных слойно конечных подгрупп группы слойно конечно, то будем его называть *слойно конечным радикалом* группы. Бесконечные группы с сильно вложенной подгруппой изучались также в работах [2 – 9]. Ранее автором была установлена почти слойная конечность группы Шункова с сильно вложенной подгруппой при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп [10] и при условии периодичности группы [11]. Изучался также случай, когда в группе есть сильно вложенная подгруппа, имеющая черниковскую почти слойно конечную периодическую часть [12], и случай группы с почти слойно конечной сильно вложенной подгруппой [13].

В данной работе предполагается, что в группе имеется сильно вложенная подгруппа с почти слойно конечной периодической частью и условие почти слойной конечности накладывается только на периодические части нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть группа Шункова содержит сильно вложенную подгруппу, имеющую почти слойно конечную периодическую часть. Если в группе нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть, то сама группа имеет почти слойно конечную периодическую часть.*

Данная теорема является обобщением основных результатов из работ [12, 13]. Доказательство теоремы составлено из фрагментов доказательств, приведенных в работах автора [12 – 15],

*Выполнена при поддержке грантов РФФИ (проект 09-01-00395, 10-01-00509) и гранта Сибирского федерального университета (проект — элитное математическое образование в СФУ).

на которые мы ссылаемся в соответствующих случаях. У лемм 4, 5 и у завершающей части доказательства теоремы имеются отличия от доказательств аналогичных частей в упомянутых работах, поэтому мы приводим их полностью. Нужно также иметь в виду, что в работах [12 – 15] доказательства соответствующих лемм аналогичны, но рассматриваемые подгруппы различаются по своим свойствам. Так, в [12] сильно вложенная подгруппа имеет черниковскую периодическую часть, в [13] сильно вложенная подгруппа почти слойно конечна, а в [14, 15] в рассматриваемых группах нет инволюций и, следовательно, нет сильно вложенных подгрупп.

Для удобства чтения статьи приведем результаты, на которые мы ссылаемся в доказательстве теоремы. В тексте будем ссылаться на них как на предложения с соответствующим номером.

1. Если любая абелева подгруппа примарной группы имеет конечный нижний слой, то абелевы подгруппы удовлетворяют условию минимальности (см., например, [16]).

Нижним слоем группы называется множество ее элементов простых порядков.

2. Группа Шункова с условием минимальности для абелевых подгрупп является черниковской (основной результат из [17]).

3. Любая локально конечная p-группа, удовлетворяющая условию минимальности, гиперцентральна (теорема 1.6 из [16]).

4. Пусть G — группа с инволюциями, i — ее некоторая инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:

1) подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны;

2) в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков конечно;

3) в группе G нормализатор любой нетривиальной (i)-инвариантной конечной подгруппы имеет периодическую часть.

Тогда либо G имеет почти нильпотентную периодическую часть, либо G — T_0-группа (теорема 1 из [18]).

5. Пусть группа Шункова G содержит сильно вложенную подгруппу, имеющую черниковскую почти слойно конечную периодическую часть. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть, то сама группа G имеет почти слойно конечную периодическую часть (основной результат из [12]).

6. Пусть G — группа, H — ее сильно вложенная подгруппа, i — некоторая инволюция из H с условием: почти для всех (т. е. кроме, быть может, конечного числа) элементов вида $g^{-1}ig$, $g \in G \setminus H$, подгруппа $\langle i, i^g \rangle$ конечна.

Тогда все инволюции из G сопряжены в G (см. предложение 4.3 из [19]).

7. Локально конечная группа G тогда и только тогда почти слойно конечна, когда в G выполняется условие: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы из G — почти слойно конечная группа (теорема 1 из [14]).

8. Расширение черниковской группы с помощью черниковской группы — снова черниковская группа [20].

9. Слойно конечную группу G можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп, из которых первая является полной абелевой слойно конечной группой, а вторая — тонкой слойно конечной группой (теорема 3.3 [16]).

Напомним, что слойно конечная группа называется *тонкой*, если все ее силовские подгруппы конечны.

10. Каждая тонкая слойно конечная группа является подгруппой тонкого слойно конечного прямого произведения конечных групп (теорема 3.8 [16]).

Напомним, что *слойно конечным прямым произведением конечных групп* называется прямое произведение конечных групп, имеющее для каждого простого числа p лишь конечное число множителей с делящимися на p порядками.

11. Если M — подмножество, а H — подгруппа группы G, то мощность класса подмножеств, сопряженных с M элементами из H, равна индексу $|H\colon N_H(M)|$. В частности, $|a^G| = |G\colon N_G(a)|$ (теорема 2.5.6 из [20]).

12. Пусть $V = \langle a, k\rangle$ — конечная разрешимая квазифробениусова группа, где $|a| = |k| = p$ — простое число, и силовская 2-подгруппа из $C_V(a)$ отлична от обобщенной группы кватернионов. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

1) $V = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a\rangle$;

2) $V = F \leftthreetimes (S\lambda\langle a\rangle)$, где $FC_V(a)$ — группа Фробениуса с абелевым ядром F и дополнением $C_V(a)$, S — некоммутативная 2-подгруппа, $Z(S)$ — циклическая группа и $Z(S) = S \cap C_V(a)$, причем любая (a)-инвариантная абелева подгруппа из S принадлежит $Z(S)$ (лемма 4.3 из [21]).

Напомним определение квазифробениусовой группы.

Пусть B — локально конечная группа, x — ее элемент простого порядка p и $L(B)$ — нетривиальный локально-нильпотентный радикал группы B. Если подгруппа $\langle L(B), C_B(x)\rangle$ есть группа Фробениуса с дополнением $C_B(x)$ и ядром $L(B)$, то B называется *квазифробениусовой группой* (*по модулю* p).

13. Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа, a — элемент простого порядка $p \neq 2$ из G такие, что почти для всех (т. е. кроме, быть может, конечного числа) элементов вида $g^{-1}ag$, где $g \in G \setminus H$, подгруппы $L_g = \langle a, g^{-1}ag\rangle$ являются группами Фробениуса с неинвариантным множителем (a). Тогда либо $G = F \leftthreetimes N_G(a)$ и $F \leftthreetimes (a)$ — группа Фробениуса с ядром F и неинвариантным множителем (a), либо элемент a лежит в конечном нормальном делителе группы G (основная теорема из [22]).

14. Пусть G — группа Фробениуса вида $G = F \leftthreetimes (x)$, где x имеет простой порядок p. Предположим еще, что подгруппы $\langle x, x^g\rangle$ конечны для каждого $g \in G$ и каждая абелева (x)-инвариантная подгруппа простой экспоненты из F конечна. Тогда F — нильпотентная группа (лемма 4.6 из [21]).

15. Пусть (G, H) — пара Фробениуса, $H = \langle a\rangle$ и все подгруппы $\langle a, a^g\rangle$, где $g \in G$, конечны. Тогда $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с дополнением H и периодическим ядром F. Если $|a| = 2k$, то F — периодическая абелева группа (лемма 2.7 из [23]).

16. В нильпотентной группе любая нетривиальная подгруппа имеет нетривиальное пересечение с центром (теорема 16.2.3 из [20]).

Перейдем непосредственно к ***доказательству теоремы***. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Если группа G содержит конечное множество элементов конечного порядка, то утверждение теоремы справедливо для G. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что множество элементов конечного порядка в группе G бесконечно. Поскольку в G есть сильно вложенная подгруппа, то G имеет инволюции.

Обозначим через S некоторую силовскую 2-подгруппу группы G. Ее элементарные абелевы подгруппы конечны в силу условий теоремы. Следовательно, любая абелева подгруппа из S имеет конечный нижний слой. Тогда по предложению 1 абелевы подгруппы из S удовлетворяют условию минимальности, а по предложению 2 S — черниковская и, значит, локально конечная группа. По предложению 3 S имеет нетривиальный центр. Обозначим через i некоторую инволюцию из центра группы S.

Пусть в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков конечно. Тогда по условиям теоремы и по предложению 4 либо G имеет почти нильпотентную периодическую часть, либо G — T_0-группа.

Напомним определение класса T_0-групп. Группа G с инволюцией i называется T_0-*группой*, если выполняются следующие условия:

(1) все подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны;

(2) силовские 2-подгруппы из G — циклические группы или обобщенные группы кватернионов;

(3) централизатор $C_G(i)$ бесконечен и имеет конечную периодическую часть;

(4) нормализатор любой нетривиальной $\langle i \rangle$-инвариантной локально конечной подгруппы из G либо содержится в $C_G(i)$, либо имеет периодическую часть, являющуюся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем четного порядка;

(5) $C_G(i) \neq G$ и для любого элемента c из $G \setminus C_G(i)$, строго вещественного относительно i, т. е. $c^i = c^{-1}$, в $C_G(i)$ существует такой элемент s_c, что подгруппа $\langle c, c^{s_c} \rangle$ бесконечна.

Если периодическая часть группы G почти нильпотентна, то G содержит периодическую нильпотентную нормальную подгруппу K конечного индекса в периодической части группы G. Поскольку K имеет нетривиальный центр $Z(K)$, централизатор любого неединичного элемента из $Z(K)$ по условиям теоремы имеет почти слойно конечную периодическую часть, очевидно, содержащую K. Тогда K почти слойно конечна, а вместе с ней почти слойно конечна и периодическая часть группы G как расширение почти слойно конечной группы с помощью конечной группы. Таким образом, в случае, когда периодическая часть группы G почти нильпотентна, теорема доказана.

T_0-группой группа G быть не может. Действительно, пусть G является T_0-группой. В G бесконечно много элементов $b_1,\ b_2,\ \ldots$ конечного порядка, а в $C_G(i)$ по предположению их конечное число, значит, в G строго вещественных относительно инволюции i элементов вида $ib_1^{-1}ib_1,\ ib_2^{-1}ib_2,\ \ldots$ бесконечно много, и все они имеют конечный порядок вследствие того, что G — группа Шункова. Так как мы предположили, что в $C_G(i)$ конечное число элементов конечного порядка, то среди степеней элементов $ib_1^{-1}ib_1,\ ib_2^{-1}ib_2,\ \ldots$ найдется строго вещественный элемент c относительно инволюции i из $G \setminus C_G(i)$ простого порядка. По условию (5) из определения T_0-группы для некоторого элемента s_c подгруппа $\langle c, c^{s_c} \rangle$ бесконечна. Получили противоречие с тем, что G — группа Шункова.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков бесконечно.

Если в группе G имеется сильно вложенная подгруппа, имеющая черниковскую почти слойно конечную периодическую часть, то по предложению 5 утверждение теоремы справедливо. Следовательно, в группе G имеется сильно вложенная подгруппа F_1, имеющая нечерниковскую почти слойно конечную периодическую часть F. Поскольку в группе G имеется сильно вложенная подгруппа, то в G по предложению 6 все инволюции сопряжены. Следовательно, можем полагать, что в группе F_1 содержится инволюция i. Так как группа F_1 сильно вложена в G, централизатор этой инволюции $C_G(i)$ также содержится в группе F_1, а это в силу только что доказанной бесконечности множества элементов конечных порядков централизатора $C_G(i)$ влечет бесконечность периодической части F группы F_1. Вложим подгруппу F в максимальную почти слойно конечную подгруппу X. Такая подгруппа найдется в силу леммы Цорна и предложения 7. Обозначим через X_1 нормализатор подгруппы X в группе G.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество всех подгрупп группы G вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где элемент a простого порядка p выбираем из F и $g \in G \setminus X_1$. Вследствие того, что G является группой Шункова, подгруппы L_g конечны.

По предложению 8 слойно конечный радикал $R(F)$ нечерниковской группы F является нечерниковской группой. По предложению 9 $R(F)$ можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп A и D, где A — полная абелева слойно конечная группа, а D — слойно конечная группа с конечными силовскими подгруппами. Если бы множество $\pi(F)$ было конечным, то группа A являлась бы прямым произведением конечного числа квазициклических групп, а группа D — конечной группой по предложению 10, и тогда группа $R(F)$ была бы черниковской (напомним, что через $\pi(F)$ обозначают множество простых делителей порядков элементов группы F). Противоречие означает, что $\pi(F)$ бесконечно и для выбора порядка элемента a имеется бесконечно много возможностей.

Вследствие бесконечности множества вариантов выбора порядка элемента a и строения почти слойно конечной группы выберем его порядок таким достаточно большим, что он отличен от 2 и не делит индекс $|X : R(X)|$, где $R(X)$ — слойно конечный радикал группы X (индекс $|X : R(X)|$ конечен в силу почти слойной конечности группы X).

Зафиксируем в дальнейшем введенные обозначения i, S, X, X_1, F, F_1, $\mathfrak{K}$.

Предположим, что множество $\mathfrak{K}$ конечно. Поскольку оно состоит из конечных подгрупп вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где $g \in G \setminus X_1$, то в этом случае множество $a^{G \setminus X_1}$ конечно. Элемент a выбран из слойно конечного радикала $R(X)$ группы X, нормальной в группе X_1. Так как $R(X)$ является характеристической подгруппой группы X, множество a^{X_1} содержится в $R(X)$ и, значит, является подслоем конечного слоя элементов порядка p из $R(X)$. Следовательно, множество a^{X_1} конечно. Поскольку ранее мы получили конечность множества $a^{G \setminus X_1}$, то уже множество a^G конечно. Оно является конечным инвариантным множеством элементов группы G и, значит, порождает по лемме Дицмана [24] конечную нормальную подгруппу в группе G. В предположении конечности множества $\mathfrak{K}$ в силу условий теоремы получаем справедливость утверждения теоремы.

В дальнейшем будем предполагать, что множество $\mathfrak{K}$ бесконечно.

Нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Можно считать, что группа G не имеет неединичного локально конечного радикала.*

Доказательство. Если локально конечный радикал группы G неединичен, то он почти слойно конечен по условиям доказываемой теоремы и по предложению 7 в нем найдется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условию теоремы имеет почти слойно конечную периодическую часть. В этом случае теорема доказана.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть F и M — две различные бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы G, $R(F)$ и $R(M)$ — их слойно конечные радикалы соответственно. Тогда пересечение $R(F) \cap R(M)$ единично.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 10 из [14].

Лемма 3. *Если для некоторого элемента w конечного порядка и максимальной почти слойно конечной подгруппы U пересечение $C_G(w) \cap U$ бесконечно, то периодическая часть группы $C_G(w)$ содержится в U.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 11 из [14].

Лемма 4. *Никакая группа L_g из множества $\mathfrak{K}$ и никакая сопряженная с ней подгруппа не содержатся в группе X.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого элемента b и группы L_g из множества $\mathfrak{K}$ группа L_g^b содержится в X. Тогда вследствие выбора числа p элементы a^b, a^{gb} содержатся в слойно конечном радикале группы X. Отсюда следует, что элемент a принадлежит слойно конечному радикалу группы $X^{b^{-1}}$. Поскольку элемент a содержится в группе F, то $a \in X$, и снова по выбору числа p элемент a содержится в слойно конечном радикале группы X. Следовательно, по лемме 2 $X = X^{b^{-1}}$. Аналогично, a принадлежит слойно конечному радикалу группы $X^{b^{-1}g^{-1}}$, и снова по лемме 2 $X = X^{b^{-1}g^{-1}}$. Окончательно получаем b^{-1}, $b^{-1}g^{-1} \in$ $\in N_G(X) = X_1$, что влечет включение $g \in X_1$, но это противоречит выбору элемента g из $G \setminus X_1$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Любая группа L_g четного порядка из множества $\mathfrak{K}$ содержит сильно вложенную подгруппу.*

Доказательство. Пусть L_g — группа четного порядка из множества $\mathfrak{K}$. Из-за сильной вложенности подгруппы F_1 все инволюции в группе G сопряжены. Подберем элемент d таким образом, чтобы группа L_g^d содержала инволюцию i. По лемме 4 группа L_g^d не содержится в X и, значит, L_g^d не содержится в F. Так как F является периодической частью группы F_1, а L_g^d — конечная группа, то группа L_g^d не содержится в F_1. Вследствие сильной вложенности группы F_1 в группу G подгруппа $L_g^d \cap F_1$ сильно вложена в L_g^d. Тогда сильно вложенная подгруппа найдется и в группе L_g.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Можно считать, что p выбрано настолько большим, что группы из множества $\mathfrak{K}$ не содержат инволюций.*

Доказательство с учетом леммы 5 аналогично доказательству леммы 4 из [12].

Лемма 7. *В дополнение к выбору числа p можно предполагать, что оно не принадлежит $\pi(C_X(b))$, где b пробегает элементы простых порядков из X с централизаторами, имеющими бесконечный индекс в X, и не является порядком регулярного автоморфизма никакой элементарной абелевой q-группы из X для всех простых чисел q, делящих $|X : R(X)|$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 6 из [12].

Лемма 8. *Можно считать, что в множестве $\mathfrak{K}$ нет подгрупп L_g, для которых нильпотентный радикал $F(L_g)$ является p-группой.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 7 из [12].

Лемма 9. *Пусть T — максимальная почти слойно конечная подгруппа с сильно вложенным нормализатором в G, V — подгруппа, сопряженная с T в G, h — нетривиальный примарный элемент из $D = T \cap V$. Если централизатор $C_V(h)$ бесконечен, то и централизатор $C_T(h)$ бесконечен.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 9 из [15].

Лемма 10. *Простое число p можно выбрать таким достаточно большим, что во всех группах $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{K}$ силовские p-подгруппы циклические.*

Доказательство с учетом леммы 9 аналогично доказательству леммы 12 из [12].

Завершим доказательство теоремы. В силу леммы 10 считаем, что найдется элемент $a \in X$ порядка p такого, что силовские p-подгруппы в группе $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{K}$ циклические. Поэтому в силу лемм 6, 8 и теоремы Фейта – Томпсона нильпотентный радикал N_g группы L_g является неединичной p'-группой.

Предположим, что в $C_{L_g}(a)$ найдется элемент b простого порядка, который перестановочен с нетривиальным элементом c из N_g. По лемме 7 элемент b имеет бесконечный централизатор в X, значит, по лемме 3 периодическая часть централизатора элемента b содержится в X вместе с элементом c. Отсюда следует, что пересечение $D_g = N_g \cap X$ нетривиально, так как содержит элемент c. Поэтому подгруппа $O_q(D_g)$ нетривиальна для некоторого $q \in \pi(D_g)$. Рассмотрим нижний слой A_g центра группы $O_q(D_g)$. Тогда A_g — неединичная $\langle a \rangle$-допустимая характеристическая элементарная абелева q-подгруппа в D_g.

Обозначим через C периодическую часть группы $C_G(A_g)$ и покажем, что подгруппа C бесконечна и содержится в X. Если a действует регулярно на A_g, то по лемме 7 $A_g < R(X)$ и, следовательно, по лемме 3 C содержится в X, а тогда по предложению 11 группа C бесконечна.

Пусть теперь элемент a перестановочен с нетривиальным элементом d из A_g. Снова по лемме 7 элемент d имеет бесконечный централизатор в X, а по лемме 3 периодическая часть централизатора элемента d содержится в X. Поэтому C также содержится в X. Кроме того, группа C бесконечна. Действительно, группу A_g можно представить в виде $A_g = C_g \times B_g$, где $C_g = C_{A_g}(a)$, а на B_g элемент a действует регулярно. Если подгруппа B_g неединична, то по лемме 7 $A_g < R(X)$ и снова, как и выше, получаем бесконечность группы C. Пусть теперь $B_g = 1$, т. е. $A_g = C_g$. Поскольку группа A_g конечна, а по лемме 7 централизатор $C_X(c)$ для любого элемента c из A_g имеет конечный индекс в X, централизатор $C_X(A_g)$ также имеет конечный индекс в X. Таким образом, централизатор $C_X(A_g)$ бесконечен, и значит, бесконечна его периодическая часть C.

Итак, в любом случае периодическая часть C группы $C_G(A_g)$ бесконечна и содержится в X. Отсюда следует, что группа C почти слойно конечна (напомним, что группа X почти слойно конечна). Вследствие конечности индекса $|N_G(A_g) \colon C_G(A_g)|$ периодическая часть E нормализатора $N_G(A_g)$ также почти слойно конечна (как расширение почти слойно конечной группы C с помощью конечной группы). Включая группу E в максимальную почти слойно конечную подгруппу V группы G, получаем, что две максимальные почти слойно конечные подгруппы X и V пересекаются по бесконечной подгруппе, содержащей C. По лемме 2 получаем совпадение подгрупп X и V и включение периодической части нормализатора $N_G(A_g)$ в X. Так как A_g является характеристической подгруппой в D_g, периодическая часть группы $N_G(D_g)$ также содержится в X.

Если $N_g \neq D_g$, то в силу нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и по доказанному содержится в X, что противоречит построению подгруппы D_g. Поэтому $N_g = D_g$, откуда вследствие нормальности подгруппы N_g в L_g и доказанного выше включения периодической части нормализатора $N_G(D_g)$ в X получаем $L_g < X$ вопреки лемме 4.

Таким образом, любой элемент простого порядка из $C_{L_g}(a)$ действует регулярно на N_g. Поэтому в силу предложения 12 L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a\rangle$. По предложению 13 группа G либо содержит нетривиальную нормальную локально конечную подгруппу, либо имеет вид $G = T \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$, где $T \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса. В последнем случае по предложениям 14, 15 группа T является нильпотентной и периодической. Тогда в группе T по предложению 16 имеются неединичные элементы конечного порядка из центра группы T. Отсюда по условиям теоремы группа T почти слойно конечна и, следовательно, является неединичной локально конечной нормальной подгруппой в группе G. Итак, в любом случае в группе G найдется нормальная неединичная локально конечная подгруппа, что противоречит лемме 1.

Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* К теории бесконечных p-групп // Докл. АН СССР. – 1945. – С. 71 – 74.
2. *Измайлов А. Н., Шунков В. П.* Два признака непростоты группы с бесконечно изолированной подгруппой // Алгебра и логика. – 1982. – **21**, № 6. – С. 647 – 669.
3. *Измайлов А. Н.* О сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппе в периодической группе // Алгебра и логика. – 1983. – **22**, № 2. – С. 128 – 137.
4. *Мазуров В. Д.* О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. мат. журн. – 1990. – **31**, № 4. – С. 102 – 104.
5. *Мазуров В. Д.* О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. – 2000. – **39**, № 1. – С. 74 – 86.
6. *Созутов А. И.* О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. – 2000. – **39**, № 5. – С. 602 – 617.
7. *Созутов А. И., Сучков Н. М.* О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой // Мат. заметки. – 2000. – **68**, вып. 2. – С. 272 – 285.
8. *Созутов А. И.* Два признака непростоты группы с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией // Мат. заметки. – 2001. – **69**, вып. 3. – С. 443 – 453.
9. *Сучков Н. М.* О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Мат. сб. – 2002. – **193**, № 2. – С. 153 – 160.
10. *Сенашов В. И.* Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 472 – 485.
11. *Сенашов В. И.* Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Дискрет. математика. – 2002. – **14**, № 4. – С. 133 – 152.
12. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 2. – С. 203 – 210.
13. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – **16**, № 3. – С. 234 – 239.
14. *Сенашов В. И., Шунков В. П.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. – 2003. – **15**, № 3. – С. 91 – 104.
15. *Сенашов В. И.* Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7–8. – С. 1002 – 1008.
16. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
17. *Сучкова Н. Г., Шунков В. П.* О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1986. – **26**, .№ 4. – С. 445 – 469.
18. *Шунков В. П.* T_0-группы. – Новосибирск: Наука, 2000. – 178 с.
19. *Шунков В. П.* M_p-группы. – М.: Наука, 1990. – 160 с.
20. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
21. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. – Новосибирск: Наука, 1992. – 133 с.
22. *Созутов А. И., Шунков В. П.* О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами. Ч. 1, 2 // Алгебра и логика. – 1977. – **16**, № 6. – С. 711 – 735; 1979. – **18**, № 2. – С. 206 – 223.
23. *Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П.* Группы с системами фробениусовых подгрупп. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. – 211 с.
24. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Получено 09.11.10,
после доработки — 13.02.12