УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

In the spaces $L_\psi(T)$ of periodic functions with metric $\rho(f,0)_\psi = \int_T \psi(|f(x)|)\,dx$, where ψ is a function of the modulus-of-continuity type, we investigate the inverse Jackson theorems in the case of approximation by trigonometric polynomials. It is proved that the inverse Jackson theorem is true if and only if the lower dilation exponent of the function ψ is not equal to zero.

У просторах $L_\psi(T)$ періодичних функцій з метрикою $\rho(f,0)_\psi = \int_T \psi(|f(x)|)\,dx$, де ψ — функція типу модуля неперервності, досліджуються обернені теореми Джексона у випадку апроксимації тригонометричними поліномами. Доведено, що обернена теорема Джексона має місце тоді і тільки тоді, коли нижній показник розтягнення функції ψ не дорівнює нулеві.

1. Введение. Для действительнозначных функций $f(x)$, $x \in R$, имеющих период 1, $L_0 \equiv L_0(T)$ — множество измеримых и почти всюду конечных функций на основном торе периодов $T = [0,1]$; Ω — множество функций $\psi : R_+^1 \to R_+^1$, являющихся модулем непрерывности;

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_\psi : \|f\|_\psi := \int_T \psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}$$

— метрические пространства (в случае $\psi \in \Omega$). В частности, для $0 < p < 1$ $\|f\|_p :=$ $:= \int_T |f(x)|^p\,dx$.

Через $T_n(x)$ будем обозначать тригонометрические полиномы периода 1, а через $\omega_k(f,h)_\psi$ — k-й модуль непрерывности f, т. е.

$$\omega_k(f,h)_\psi = \sup_{|s|\le h} \left\| \Delta_s^k f \right\|_\psi, \quad k \in N,$$

$$\Delta_s^k = \Delta_s\left(\Delta_s^{k-1}\right), \qquad \Delta_s^1 f(x) := \Delta_s f(x) := f(x+s) - f(x).$$

$$E_n(f)_\psi = \inf_{T_n} \| f - T_n \|_\psi$$

— наилучшее приближение f в L_ψ тригонометрическими полиномами степени не выше n.

В работах [1, 2] исследовался вопрос о наличии в пространствах L_ψ прямых неравенств Джексона, точнее, вопрос о наличии соотношений

$$\sup_{n} \sup_{f \in L_{\psi}, f \neq \text{const}} \frac{E_n(f)_{\psi}}{\omega(f, 1/n)_{\psi}} < \infty. \tag{1}$$

Выяснилось, что ответ на этот вопрос зависит от значений нижнего показателя растяжения γ_{ψ} функции ψ.

Пусть для $s \in (0, \infty)$

$$M_{\psi}(s) := \sup_{0 < t < \infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)}$$

— функция растяжения ψ [3]. Тогда γ_{ψ} — такое число из $[0,1]$, что для всех $s \in [0,1]$

$$M_{\psi}(s) \geq s^{\gamma_{\psi}},$$

и в то же время для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа C_{ε} такая, что

$$M_{\psi}(s) \leq C_{\varepsilon} s^{\gamma_{\psi} - \varepsilon}, \quad s \in [0,1].$$

В [2] доказано, что в пространстве L_{ψ} неравенства Джексона (1) имеют место тогда и только тогда, когда $\gamma_{\psi} > 0$.

В настоящей работе мы исследуем задачу о наличии в пространствах L_{ψ} обратных теорем Джексона, характеризующих дифференциально-разностные свойства функций с заданной последовательностью наилучших приближений. Будет показано, что ответ снова существенно зависит от значений γ_{ψ}.

Отметим кратко основные известные результаты по обратным неравенствам Джексона в пространствах L_p, $0 < p \leq \infty$ (при $p = \infty$ под L_{∞} подразумеваем $C(T)$).

Пусть $k, r, n \in N$.

1. Случай $1 \leq p \leq \infty$ [4 – 6]:

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{C_k}{n^k} \sum_{j=1}^{n} j^{k-1} E_{j-1}(f)_p.$$

2. Случай $1 < p < \infty$ [7]: при $\beta := \min(p, 2)$

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{C_{k,p}}{n^k} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{\beta k - 1} E_{j-1}^{\beta}(f)_p \right)^{1/\beta}.$$

3. Случай $1 \leq p \leq \infty$ [5, 8]: если при некотором r

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{r-1} E_{j-1}(f)_p < \infty,$$

то $f^{(r-1)} \in AC$, $f^{(r)} \in L_p$ и для любого k

$$\omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p \leq C_{k,r}\left(\frac{1}{n^k}\sum_{j=1}^{n} j^{r-1+k}E_{j-1}(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r-1}E_{j-1}(f)_p\right).$$

4. Случай $1 < p < \infty$ [7, 9]: если при некотором r

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{\beta r-1}E_{j-1}^{\beta}(f)_p < \infty, \quad \beta := \min(p, 2),$$

то $f^{(r-1)} \in AC$, $f^{(r)} \in L_p$ и для любого k

$$\omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_p \leq C_{k,r,p}\left(\frac{1}{n^k}\left(\sum_{j=1}^{n} j^{\beta(k+r)-1}E_{j-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta} + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{\beta r-1}E_{j-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta}\right).$$

Подробнее с этими результатами можно ознакомиться в [10, 11].

5. Случай $0 < p < 1$ [12, 13]:

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq \frac{C_{k,p}}{n^k}\sum_{j=1}^{n} j^{k-1}E_{j-1}(f)_p .$$

6. Случай $0 < p < 1$ [13]: если $\|f - T_n\|_p = O(E_n(f)_p)$ и при некотором r

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{rp-1}E_{j-1}(f)_p < \infty,$$

то f имеет r-ю производную $f^{(r)}$ в смысле L_p и

$$\left\|f^{(r)} - T_n^{(r)}\right\|_p \leq C_{r,p}\left(n^{rp}E_n(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{rp-1}E_{j-1}(f)_p\right).$$

При исследовании обратных неравенств Джексона в L_ψ мы придерживаемся классической схемы доказательств, основанной на неравенствах типа С. Н. Бернштейна для приращений и производных тригонометрических полиномов. Полиномиальные неравенства в L_ψ изучались в [14]. Приведем те неравенства из [14], которые будут здесь использоваться.

Пусть $k, r = 0, 1, \ldots$, $h \in (0, 1/2]$ и $\gamma_\psi > 0$. Тогда при всех $n \in N$

$$\left\|\Delta_h^k T_n^{(r)}\right\|_\psi \leq C_{r,k}M_\psi(n^r \min((nh)^k, 1))\|T_n\|_\psi, \tag{2}$$

$$\left\|\left(\frac{\Delta_h}{h} - D\right)T_n^{(r)}\right\|_\psi \leq C_r M_\psi\left(\max_{|k|\leq n}\left(|k|^r\left|\frac{\sin(\pi kh)}{h} - \pi k\right|\right)\right)\|T_n\|_\psi . \tag{3}$$

2. Обратная теорема Джексона в случае $\gamma_\psi > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$. *Тогда для любого* $k \in N$ *найдется константа* $C = C(k, \psi)$ *такая, что для всех* $f \in L_\psi$ *и всех* $h \in (0, 1/2]$ *имеют место неравенства*

$$\omega_k(f, h)_\psi \le C \sum_{j=1}^{[1/h]} \frac{M_\psi((jh)^k)}{j} E_{j-1}(f)_\psi . \tag{4}$$

Доказательство. Для функции растяжения M_ψ будем использовать мультипликативное неравенство $M_\psi(u \cdot v) \le M_\psi(u) \cdot M_\psi(v)$, вытекающее из определения.

Обозначим $e_j := E_j(f)_\psi$, и пусть T_n — полином наилучшего приближения f в L_ψ степени n (существование таких полиномов см. в [15]). Для доказательства (4) без ограничения общности можно считать, что $T_0 = 0$.

Пусть сначала $h = 2^{-n}$. Тогда

$$\begin{gathered} f = \left(f - T_{2^n-1}\right) + T_{2^n-1} = f - T_{2^n-1} + \sum_{j=1}^{n} \left(T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1}\right), \\ \left\| \Delta_{1/2^n}^k f \right\|_\psi \le 2^k e_{2^n-1} + \sum_{j=1}^{n} \left\| \Delta_{1/2^n}^k \left(T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1}\right) \right\|_\psi . \end{gathered} \tag{5}$$

Из (2) при $r = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_{1/2^n}^k (T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1}) \right\|_\psi &\le C_1 M_\psi(2^{(j-n)k}) \left\| T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1} \right\|_\psi \le \\ &\le 2C_1 M_\psi(2^{(j-n)k}) e_{2^{j-1}-1} . \end{aligned} \tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_\psi \le C_2 \sum_{j=1}^{n+1} M_\psi(2^{(j-n)k}) e_{2^{j-1}-1} . \tag{7}$$

Из монотонного убывания e_n следует, что

$$e_{2^j-1} \le 2 \sum_{s=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{e_{s-1}}{s} \tag{8}$$

при $j \ge 1$, а из монотонного возрастания $M_\psi(x)$ — что

$$M_\psi(2^{(j-n)k}) \le M_\psi(2^k) M_\psi\left(\frac{1}{2^{nk}} 2^{k(j-1)}\right) \le M_\psi(2^k) M_\psi\left(\left(\frac{s}{2^n}\right)^k\right) \tag{9}$$

при $s > 2^{j-1}$.

Используя (8), (9), из (7) в случае $h = \frac{1}{2^n}$ получаем (4):

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_\psi \le C_2 \sum_{j=2}^{n+1} M_\psi(2^{(j-n)k})\, 2 \sum_{s=2^{j-2}+1}^{2^j-1} \frac{e_{s-1}}{s} + C_2 M_\psi(2^{-nk}) e_0 \le$$

$$\le C_2 \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{s=2^{j-2}+1}^{2^j-1} 2 M_\psi(2^k) \frac{M_\psi\left((s/2^n)^k\right)}{s} e_{s-1} + C_2 M_\psi(2^{-nk})\, e_0 \le$$

$$\le C_3 \sum_{s=1}^{2^n} \frac{M_\psi\left((s/2^n)^k\right)}{s} e_{s-1}. \tag{10}$$

Для произвольного $h \in (0, 1/2]$ найдем $n \in N$ такое, что $h \in \left(2^{-(n+1)}, 2^{-n}\right]$, и с помощью (10) получим

$$\omega_k(f, h)_\psi \le \omega_k\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_\psi \le C_3 \sum_{s=1}^{2^n} \frac{M_\psi\left((1/2^n)^k\right)}{s} e_{s-1} \le$$

$$\le C_3 \sum_{s=1}^{2^n} \frac{M_\psi\left(s^k (2h)^k\right)}{s} e_{s-1} \le C_3 M_\psi(2^k) \sum_{s=1}^{[1/h]} \frac{M_\psi\left((sh)^k\right)}{s} e_{s-1}.$$

Теорема 1 доказана.

Утверждение теоремы 1 является неулучшаемым в следующем смысле.

Теорема 2. *Какова бы ни была неотрицательная функция* $\lambda(h)$, $h \in (0, 1/2]$, *такая, что* $\lambda(h) \to 0$ *при* $h \to 0$, *неравенство*

$$\omega_k(f, h)_\psi \le \lambda(h)\, C \sum_{j=1}^{[1/h]} \frac{M_\psi\left((jh)^k\right)}{j} E_{j-1}(f)_\psi$$

для $h \in (0, 1/2]$ *на всем пространстве* L_ψ *невозможно ни при какой константе* C (*не зависящей от* f *и* h).

Доказательство. Рассмотрим семейство функций

$$f_A(x) = A \sin(2\pi x), \quad A > 0.$$

Очевидно, что при $j > 1$ $E_{j-1}(f_A)_\psi = 0$, $E_0(f_A)_\psi \le \| f_A \|_\psi \le \psi(A)$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{[1/h]} \frac{M_\psi\left((jh)^k\right)}{j} E_{j-1}(f_A)_\psi \le M_\psi(h^k)\, \psi(A). \tag{11}$$

Теперь оценим $\omega(f_A, h)_\psi$ снизу:

$$\left\| \Delta_h^k f_A \right\|_\psi = \left\| A(2\sin\pi h)^k \sin 2\pi x \right\|_\psi >$$

$$> \int\limits_{\left\{x\in \mathrm{T}:|\sin 2\pi x|\geq \sqrt{2}/2\right\}} \psi\Big(A(2\sin\pi h)^k |\sin 2\pi x|\Big)\,dx > \psi\left(A(2\sin\pi h)^k \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{2} \geq$$

$$\geq \psi\left(A(4h)^k \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{2}, \tag{12}$$

так как при $h \in (0, 1/2]$ $\sin\pi h \geq 2h$.

Из (11) и (12) получаем

$$\sup_{\{f_A\}} \frac{\omega_k(f_A, h)_\psi}{\lambda(h)\sum_{j=1}^{[1/h]} \frac{M_\psi((jh)^k)}{j} E_{j-1}(f_A)_\psi} > \sup_{A>0} \frac{2^{-1}\psi(2^{2k-1/2}h^k A)}{\lambda(h) M_\psi(h^k)\psi(A)} =$$

$$= \frac{2^{-1}}{\lambda(h)M_\psi(h^k)} \sup_{A>0} \frac{\psi(2^{2k-1/2}h^k A)}{\psi(A)} = \frac{2^{-1}}{\lambda(h)M_\psi(h^k)} M_\psi(2^{2k-1/2}h^k) \geq$$

$$\geq \frac{2^{-1}}{M_\psi(2^{-(2k-1/2)})} \frac{1}{\lambda(h)} \to \infty, \quad h \to 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема 1 позволяет дать конструктивную характеристику некоторых функциональных классов в L_ψ.

Для $\alpha \in (0, 1]$ определим стандартным образом классы Липшица

$$\mathrm{Lip}\,(\alpha, \psi) := \left\{ f \in L_\psi : \omega(f, h)_\psi \leq C_f h^\alpha,\ h \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right] \right\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0, \gamma_\psi)$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) $f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, \psi)$,

2) $\exists K_f\ \forall n \in N:\ E_{n-1}(f)_\psi \leq K_f n^{-\alpha}$.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из прямой теоремы Джексона в L_ψ [2], и справедлива для всех $\alpha \in (0, 1]$.

Пусть теперь справедливо утверждение 2. Из свойств γ_ψ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon)$ такая, что для всех $y \in (0, 1]$ выполняется $M_\psi(y) \leq C(\varepsilon) y^{\gamma_\psi - \varepsilon}$. Для заданного $\alpha \in (0, \gamma_\psi)$ выберем $\varepsilon > 0$ из условия $\alpha < \gamma_\psi - \varepsilon$ и воспользуемся теоремой 1:

$$\omega(f,h)_\psi \le C\sum_{j=1}^{[1/h]}\frac{M_\psi(jh)}{j}K_f j^{-\alpha} \le C_1(\varepsilon)\sum_{j=1}^{[1/h]}\frac{(jh)^{\gamma_\psi-\varepsilon}}{j}K_f j^{-\alpha} =$$

$$= C_2(f,\varepsilon)h^{\gamma_\psi-\varepsilon}\sum_{j=1}^{[1/h]}j^{\gamma_\psi-\varepsilon-\alpha-1} \le C_3(f,\varepsilon)h^{\gamma_\psi-\varepsilon}\left[\frac{1}{h}\right]^{\gamma_\psi-\varepsilon-\alpha} \le C_4(f,\varepsilon)h^{\alpha}.$$

Итак, импликация 2) $\Rightarrow$ 1), а следовательно, и теорема доказаны.

Заметим, что для пространств L_p, $0<p<1$, $\gamma_\psi = p$, и в случае $\alpha \ge \gamma_\psi$ импликация 2) $\Rightarrow$ 1) становится неверной [12]. По-видимому, так будет в каждом пространстве L_ψ при $\gamma_\psi > 0$.

Теорему 3 можно переформулировать следующим образом: если $\gamma_\psi > 0$, то для любого $\beta \in (0,1)$

$$\left(f\in \mathrm{Lip}\,(\gamma_\psi\cdot\beta,\,\psi)\right) \Leftrightarrow \left(E_{n-1}(f)_\psi \le K_f\left(\frac{1}{n^{\gamma_\psi}}\right)^{\beta},\ n=1,2,\ldots\right). \tag{13}$$

Поскольку функция x^{γ_ψ} при $x\in(0,1)$ „близка” к функции $M_\psi(x)$, соотношения (13) наводят на мысль о возможности конструктивной характеристики классов

$$H^{M_\psi^\beta} := \left\{f\in L_\psi : \omega(f;h)_\psi \le C_f(M_\psi(h))^{\beta},\ h\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\right\},$$

где $\beta\in(0,1]$. Заметим, что при $\gamma_\psi>0$ функция $M_\psi(h)$ является функцией типа модуля непрерывности, поэтому классы $H^{M_\psi^\beta}$ наряду с липшицевыми принадлежат шкале классических классов H_ψ^ω. В пространствах L_p, очевидно, $H^{M_\psi^\beta} = \mathrm{Lip}\,(\gamma_\psi\cdot\beta,\,\psi)$, однако легко видеть, что для произвольных $\psi\in\Omega$ это будут, вообще говоря, различные классы.

Для формулировки результата нам понадобится определение верхнего показателя растяжения δ_ψ функции ψ (см. [3, с. 76]): в случае $\psi\in\Omega$ δ_ψ — такое число из отрезка $[\gamma_\psi,1]$, что при $s>1$ $M_\psi(s)\ge s^{\delta_\psi}$, но для любого $\varepsilon>0$ $M_\psi(s)\le C_\varepsilon s^{\delta_\psi+\varepsilon}$.

Теорема 4. *Пусть* $\gamma_\psi>0$. *Тогда для любого* $\beta\in(0,\gamma_\psi/\delta_\psi)$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) $f\in H^{M_\psi^\beta}$;

2) $\exists K_f\ \forall n\in N:\ \ E_{n-1}(f)_\psi \le K_f(M_\psi(1/n))^{\beta}$.

Доказательство. Из прямой теоремы Джексона следует импликация 1) $\Rightarrow$ 2) для любого $\beta\in(0,1)$.

Пусть выполняется утверждение 2. Поскольку

$$M_\psi\left(\frac{1}{j}\right) = M_\psi\left(\frac{1}{jh}h\right) \le M_\psi\left(\frac{1}{jh}\right)M_\psi(h),$$

из теоремы 1 следует

$$\omega(f,h)_\psi \le C\sum_{j=1}^{[1/h]}\frac{M_\psi(jh)}{j}K_f M_\psi^\beta\left(\frac{1}{j}\right) \le M_\psi^\beta(h)\cdot C_1\sum_{j=1}^{[1/h]}\frac{M_\psi(jh)}{j}M_\psi^\beta\left(\frac{1}{jh}\right).$$

Все будет доказано, если мы покажем, что при $h\to 0$

$$U_h := \sum_{j=1}^{[1/h]}\frac{M_\psi(jh)}{j}M_\psi^\beta\left(\frac{1}{jh}\right) = O(1).$$

По условию $\gamma_\psi > \beta\delta_\psi$. Выберем $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы $\gamma_\psi-\varepsilon>\beta(\delta_\psi+\varepsilon)$. Из свойств показателей растяжения следует, что

$$M_\psi(jh) \le C(\varepsilon)(jh)^{\gamma_\psi-\varepsilon}, \qquad M_\psi\left(\frac{1}{jh}\right) \le C(\varepsilon)\left(\frac{1}{jh}\right)^{\delta_\psi+\varepsilon}.$$

Тогда

$$U_h \le C'(\varepsilon)\sum_{j=1}^{[1/h]}\frac{(jh)^{\gamma_\psi-\varepsilon}}{j}\left(\frac{1}{jh}\right)^{\beta(\delta_\psi+\varepsilon)} =$$

$$= C'(\varepsilon)h^{\gamma_\psi-\varepsilon-\beta(\delta_\psi+\varepsilon)}\sum_{j=1}^{[1/h]}j^{-1+(\gamma_\psi-\varepsilon)-\beta(\delta_\psi+\varepsilon)} \le$$

$$\le C''(\varepsilon)h^{\gamma_\psi-\varepsilon-\beta(\delta_\psi+\varepsilon)}\left(\frac{1}{h}\right)^{\gamma_\psi-\varepsilon-\beta(\delta_\psi+\varepsilon)} = O(1).$$

Теорема 4 доказана.

3. О существовании обратной теоремы в L_ψ.

Определение 1. *Скажем, что в пространстве L_ψ для данного $k\in N$ имеет место обратная теорема Джексона (для модуля непрерывности k-го порядка) в форме*

$$\omega_k(f,h)_\psi \le C\sum_{j=1}^{\nu([1/h])}\alpha_j(h)E_{j-1}(f)_\psi, \tag{14}$$

если найдутся функции

$$\alpha_j(h), \quad j\in N, \qquad \alpha_j:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to R^+,$$

целочисленная функция $\nu: N\to N$ и константа C такие, что для всех $f\in L_\psi$, $h\in(0,1/2]$ выполнены неравенства (14) *и при этом для любого $f\in L_\psi$*

$$\lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^{\nu([1/h])} \alpha_j(h) E_{j-1}(f)_\psi = 0 . \tag{15}$$

Поскольку $\lim_{h\to 0} \omega_k(f,h)_\psi = 0$, условие (15) нам представляется естественным для того, чтобы правая часть (14) была «хорошей» мажорантой для модулей непрерывности.

Отметим, что из (15) следует, что $\lim_{h\to 0} \alpha_j(h) = 0 \quad \forall j \in N$.

Теорема 5. *Каким бы ни было* $k \in N$, *в пространстве* L_ψ *имеет место обратная теорема Джексона в форме* (14) *для* k*-го модуля непрерывности тогда и только тогда, когда* $\gamma_\psi > 0$.

Доказательство. При $\gamma_\psi > 0$ см. теорему 1.

Пусть $\gamma_\psi = 0$. Допустим противное: для некоторых k, $\alpha_j(h)$, ν, C выполняются неравенства (14) для всех $f \in L_\psi$, $h \in (0, 1/2]$. Применим (14) к семейству функций

$$f_A(x) = A\sin(2\pi x), \qquad A > 0 .$$

Так как (см. (12))

$$\omega_k(f_A,h)_\psi \geq 2^{-1}\psi(2^{2k-1/2}h^k A),$$

$$\sum_{j=1}^{\nu([1/h])} \alpha_j(h) E_{j-1}(f_A)_\psi \leq \alpha_1(h)\psi(A),$$

для любого $h \in (0,1/2]$

$$C \geq \sup_{\{f_A\}} \frac{\omega_k(f_A,h)_\psi}{\sum_{j=1}^{\nu[1/h]} \alpha_j(h) E_{j-1}(f_A)_\psi} \geq \sup_A \frac{2^{-1}\psi(2^{2k-1/2}h^k A)}{\alpha_1(h)\psi(A)} = \frac{2^{-1}}{\alpha_1(h)} M_\psi(2^{2k-1/2}h^k).$$

Поскольку в случае $\gamma_\psi = 0$ $M_\psi(s) = 1$ $\forall s \in (0,1]$, при всех достаточно малых h

$$C \geq \frac{2^{-1}}{\alpha_1(h)},$$

что невозможно, так как при $h \to 0$ $\alpha_1(h) \to 0$.

Теорема 5 доказана.

4. Дифференциально-разностные свойства функции и ее наилучшие приближения. В зависимости от скорости убывания наилучших приближений f в L_ψ будем исследовать вопрос о существовании производных функции f в этом же пространстве L_ψ. При этом используем следующее известное понятие глобальной производной, но сформулированное для случая пространств L_ψ.

Определение 2. *Скажем, что функция* $g \in L_\psi$ *является (глобальной)* L_ψ*-производной для* $f \in L_\psi$ *(и будем обозначать* $g = f'$*), если*

$$\lim_{h\to 0}\left\| \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) - g(x)\right\|_\psi = 0 .$$

Далее, если у этой функции g *существует* L_ψ*-производная, то обозначим ее* f'' *и назовем* L_ψ*-производной для* $f \in L_\psi$ *второго порядка (и т. д.).*

Теорема 6. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$ *и для заданного* $r \in N$ *функция* f *из* L_ψ *такова, что сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{M_\psi(j^r)}{j} E_{j-1}(f)_\psi < \infty . \tag{16}$$

Тогда:

1. *Существуют* L_ψ*-производные* $f', \ldots , f^{(r)}$ *функции* f *до порядка* r *включительно.*

2. *Для любого* $k \in N$ *существует константа* $C = C(k,r,\psi)$ *такая, что для всех* $h \in (0,1/2]$ *выполняется неравенство*

$$\omega_k(f^{(r)},h)_\psi \le C\left(\sum_{j<1/h} \frac{M(j^r(jh)^k)}{j} E_{j-1}(f)_\psi + \sum_{j\ge 1/h} \frac{M(j^r)}{j} E_{j-1}(f)_\psi \right). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть T_n — полином наилучшего приближения f, $T_0 = 0$ (без ограничения общности),

$$S^{(\nu)}(f) := \sum_{j=1}^{\infty} (T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1})^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots , r . \tag{18}$$

Условие (16) гарантирует L_ψ-сходимость рядов (18). Действительно, поскольку $\gamma_\psi > 0$, по неравенству Бернштейна (2)

$$\left\|(T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1})^{(\nu)}\right\|_\psi \le C_1 M_\psi(2^{j\nu})\left\|T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1}\right\|_\psi \le 2C_1 M_\psi(2^{j\nu}) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi ,$$

поэтому, действуя аналогично (8) – (10), получаем

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}(T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1})^{(\nu)}\right\|_\psi \le 2C_1 \sum_{j=1}^{\infty} M_\psi(2^{j\nu}) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi \le C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M_\psi(j^\nu)}{j} E_{j-1}(f)_\psi$$

(на последнем этапе использовали монотонное возрастание функции $M_\psi(s)$).

Таким образом, корректно определены функции $S^{(\nu)}(f)$ как элементы пространства L_ψ.

Докажем первое утверждение теоремы. Для этого достаточно показать, что для всех $\nu \le r$

$$f^{(\nu)} = S^{(\nu)}(f). \tag{19}$$

Очевидно, что $f^{(0)} := f = S(f) := S^{(0)}(f)$. Поэтому допустим, что (19) справедливо для $\nu \le r-1$, и докажем, что $f^{(r)} = S^{(r)}(f)$.

Для любого $h \ne 0$ и $N \in \mathrm{N}$ имеем

$$\left\| \frac{\Delta_h}{h} f^{(r-1)} - S^{(r)}(f) \right\|_\psi = \left\| \frac{\Delta_h}{h} S^{(r-1)}(f) - S^{(r)}(f) \right\|_\psi \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{\Delta_h}{h} D^{r-1} - D^r \right)(T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1}) \right\|_\psi = \sum_{j=1}^{N} + \sum_{j>N} := \sum\nolimits_1(h) + \sum\nolimits_2(h).$$

Для оценки $\sum_2(h)$ используем (3) и неравенство $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \le 1$:

$$\sum\nolimits_2(h) \le C_3 \sum_{j>N} M_\psi(2^{jr}) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi. \tag{20}$$

Из условия (16) следует, что правая часть неравенства (20) является остатком сходящегося ряда, поэтому с ростом N стремится к нулю. Тем самым $\sum_2(h)$ можно сделать как угодно малым при всех h, если N достаточно велико.

Оценим $\sum_1(h)$ при любом фиксированном N с помощью (3):

$$\sum\nolimits_1(h) \le C_4 \sum_{j=1}^{N} M_\psi \left(\max_{|k| \le 2^j} \left(|k|^{r-1} \left| \frac{\sin(\pi k h)}{h} - \pi k \right| \right) \right) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi \le$$

$$\le C_4 M_\psi \left(2^{N(r-1)} \max_{|k| \le 2^N} \left| \frac{\sin(\pi k h)}{h} - \pi k \right| \right) \sum_{j=1}^{N} E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi.$$

Отсюда следует, что $\sum_1(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Таким образом,

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{\Delta_h}{h} f^{(r-1)} - S^{(r)}(f) \right\|_\psi = 0,$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Докажем (17). Используя (2), имеем

$$\left\| \Delta_h^k f^{(r)} \right\|_\psi = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (T_{2^j-1} - T_{2^{j-1}-1})^{(\nu)} \right\|_\psi \le$$

$$\le 2C_5 \sum_{j=1}^{\infty} M_\psi \left(2^{jr} \min\left((2^j h)^k, 1 \right) \right) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi =$$

$$= 2C_5 \left(\sum_{2^j < 1/h} M_\psi (2^{j(r+k)} h^k) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi + \sum_{2^j \ge 1/h} M_\psi (2^{jr}) E_{2^{j-1}-1}(f)_\psi \right).$$

Дальнейшие преобразования стандартные (см. доказательство теоремы 1).

Теорема 6 доказана.

1. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 122 – 133.
2. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1524 – 1533.
3. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
4. *Salem R.* Essais sur les Series trigonometriques. – Paris, 1940.
5. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучшего приближения непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**. – С. 219 – 242.
6. *Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. – 1964. – **3**. – С. 683 – 693.
7. *Тиман М.Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p // Мат. сб. –1958. – **46**, № 1. – С. 125 – 132.
8. *Тиман А. Ф.* Исследования по теории приближения: Автореф. … д-ра физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1951.
9. *Бесов О. В.* О некоторых условиях принадлежности к L_p производных периодических функций // Науч. докл. высш. школы. Физ.-мат. науки. –1959. – **1**. – С. 13 – 17.
10. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наук. думка, 2009. – 375 с.
11. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
12. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
13. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 5. – С. 641 – 658.
14. *Пичугов С. А.* Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1657 – 1671.
15. *Гаркави А. Л.* Теоремы о существовании элемента наилучшего приближения в пространствах типа (F) с интегральной метрикой // Мат. заметки. – 1970. – **8**, № 4. – С. 583 – 594.

Получено 10.10.11,
после доработки — 09.02.12