УДК 519.61, 512.5

І. В. Дудченко (Слов'ян. держ. пед. ун-т),
В. В. Кириченко, М. В. Плахотник (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

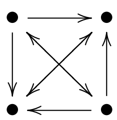
ПРОСТІ СИЛЬНО ЗВ'ЯЗНІ САГАЙДАКИ ТА ЇХ ВЛАСНІ ВЕКТОРИ

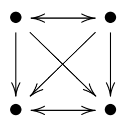
We study the relationship between the isomorphism of quivers and properties of their spectra. It is proved that two simple strongly connected quivers with at most four vertices are isomorphic to one another if and only if their characteristic polynomials coincide and their left and right normalized positive eigenvectors that correspond to the index can be obtained from one another by the permutation of their coordinates. An example showing that this statement is not true for quivers with five vertices is given.

Изучается связь между изоморфизмом колчанов и свойствами их спектров. Доказано, что простые сильно связные колчаны на не более чем четырех вершинах изоморфны тогда и только тогда, когда их характеристические многочлены совпадают, а нормированные левые и правые положительные собственные векторы, соответствующие индексу, равны с точностью до перестановки их координат. Приведен пример, показывающий, что это утверждение не выполняется для колчанов с пятью вершинами.

1. Вступ. В монографії Ф. Харарі [4] (додаток II) наведено діаграми всіх неізоморфних орієнтованих графів, що мають не більше чотирьох вершин та не мають кратних ребер і петель. Дотримуючись термінології, запропонованої Габріелем [5], називатимемо орієнтовані графи сагайдаками.

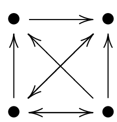
О. Г. Ганюшкін звернув увагу авторів на те, що список сагайдаків, що містяться в книзі [4], має неточності. Так, сагайдаки з номерами 18 та 22 ізоморфні. Ці сагайдаки мають вигляд





Вони ізоморфні, оскільки збігаються, якщо в одному з них ліву верхню та ліву нижню вершини поміняти місцями.

Крім того, пропущено сагайдак



Зауважимо, що наведені сагайдаки з номерами 18 та 22 з роботи [4] не є сильно зв'язними, а пропущений сагайдак сильно зв'язний.

Із сагайдаком Q природно зіставити його матрицю суміжності. Матрицею суміжності сагайдака Q називається така матриця (q_{ij}), елемент q_{ij} якої дорівнює кількості стрілок, котрі в сагайдаку Q починаються у вершині з номером i та закінчуються у вершині з номером j. При цьому $q_{ij} = 0$ в тому випадку, коли з вершини з номером i у вершину з номером j не йде жодної стрілки. Матрицю суміжності сагайдака Q позначатимемо через $[Q]$, а через

$Q(A)$ позначатимемо сагайдак, матрицею суміжності якого є матриця A з цілими невід'ємними елементами.

Сагайдаком невід'ємної матриці називається сагайдак, матриця суміжності якого утворена з вихідної матриці заміною кожного додатного її елемента на одиницю.

Відносно сагайдака використовуватимемо терміни характеристичний многочлен, власний вектор, власне число та індекс і розумітимемо під ними відповідно характеристичний многочлен, власний вектор, власне число та індекс матриці суміжності цього сагайдака.

В роботі [2] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Сильно зв'язні сагайдаки на чотирьох вершинах ізоморфні тоді і лише тоді, коли їх характеристичні многочлени збігаються, а ліві та праві додатні власні вектори однієї норми збігаються з точністю до перестановки компонент.*

Основним результатом даної роботи є доведення теореми 1 числовими методами та зведення до мінімуму відповідних розрахунків і перебору, необхідного для доведення цієї теореми.

В [2] цю теорему було доведено методом, що ґрунтується на ручному підрахунку характеристичного многочлена та знаходженні формул, які виражають власні вектори через власні значення сагайдака. Цей метод уперше було запропоновано в роботі [10]. В кінці статті ми наведемо приклад того, як згаданий метод працює.

Самі сагайдаки при підготовці препринта [2] було взято з монографії [4] та враховано згадане вище зауваження О. Г. Ганюшкіна. Числовими методами, описаними в [6], було перевірено те, що розглянутий список є повним і зайвих сагайдаків в цьому списку немає.

Крім того, доводити теорему 1 значно коротше не методами ручного знаходження формул для елементів власних векторів (тобто так, як це було зроблено в [2]), а суто числовими методами (з використанням комп'ютера).

Теорема 1 не узагальнюється на випадок сагайдаків із п'ятьма вершинами.

2. Спосіб доведення основного результату. Наслідуючи [7], введемо поняття перестановочно незвідної та перестановочно звідної матриць. Такі матриці в книзі [1] (гл. 13) називаються нерозкладними та розкладними відповідно.

Нехай $e_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ — матрична одиниця, тобто матриця, що має одиницю на перетині i-го рядка та j-го стовпчика і решта елементів якої дорівнюють нулю.

Нехай τ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Позначимо через $P_\tau \in M_n(\mathbb{R})$ матрицю $P_\tau = \sum_{i=1}^{n} e_{i\tau(i)}$. Очевидно, $P_\tau^T P_\tau = P_\tau P_\tau^T = E$. Матриця P_τ називається матрицею перестановки τ, або перестановочною матрицею. Також $P_{\tau^{-1}} = P_\tau^{-1}$.

Звернемо увагу на те, що для довільної матриці $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ та перестановочної матриці P_τ матрицю $A' = P_\tau^T A P_\tau = (\alpha'_{ij})$ отримано з матриці A перестановкою τ рядків та стовпчиків, тобто $\alpha'_{ij} = \alpha_{\tau(i)\tau(j)}$ для всіх i, j.

Означення 1. *Матриця $B \in M_n(\mathbb{R})$ називається перестановочно звідною, якщо існує така перестановочна матриця P_τ, що $P_\tau^T B P_\tau = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де B_1 та B_2 — квадратні матриці порядку меншого за n. Інакше матриця B називається перестановочно незвідною.*

Означення 2. *Сагайдак Q, в якому множина ребер не порожня, називається сильно зв'язним, якщо існує орієнтований шлях з довільної вершини сагайдака Q в довільну іншу його вершину (можливо, таку, що збігається з вихідною).*

Має місце така теорема (див. [7], § 7.7).

Теорема 2. *Матриця $B \in M_n(R)$ перестановочно незвідна тоді і лише тоді, коли її сагайдак $Q(B)$ сильно зв'язний.*

Нагадаємо, що два сагайдаки Q_1 та Q_2 називаються ізоморфними, якщо існує взаємно однозначна відповідність φ між множиною вершин сагайдака Q_1 та сагайдака Q_2, а також взаємно однозначна відповідність ψ між множиною стрілок сагайдака Q_1 та сагайдака Q_2, до того ж взаємно однозначні відповідності φ та ψ відображають вершини та стрілки узгоджено, тобто якщо стрілка a сагайдака Q_1 іде з його вершини v_i у вершину v_j, то стрілка $\psi(a)$ сагайдака Q_2 іде з вершини $\varphi(v_i)$ у вершину $\varphi(v_j)$.

Позначимо через $1, \ldots, s$ всі вершини сагайдака Q та припустимо, що існує точно t_{ij} стрілок з вершини i у вершину j. Якщо немає стрілок з i в j, то $t_{ij} = 0$. Матриця $T = (t_{ij})$ називається матрицею суміжності сагайдака Q.

Враховуючи введені поняття, попередню теорему можна переформулювати так.

***Наслідок* 1.** *Сагайдак Q сильно зв'язний тоді і лише тоді, коли його матриця суміжності $[Q]$ перестановочно незвідна.*

Всі вектори вважатимемо векторами-стовпцями. Через a^T позначатимемо транспонування вектора.

Числовий вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$ називається додатним, якщо $a_i > 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Нехай $\sigma\colon i \to \sigma(i)$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Позначимо через a_σ n-вимірний числовий вектор, який отримується з вектора a_σ перестановкою координат за правилом $a_\sigma = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})^T$. Два n-вимірні числові вектори a и b називаються еквівалентними, якщо $b = a_\sigma$ для деякої перестановки σ. Зауважимо, що $P_\sigma a = a_\sigma$. Нагадаємо, що нормою $||a||$ вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ називається число $||a|| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$. Зауважимо, що $||a_\sigma|| = ||a||$.

Твердження 1. *Нехай сагайдаки Q_1 та Q_2 ізоморфні, до того ж $[Q_2] = P_\sigma^T [Q_1] P_\sigma$. Нехай a — власний вектор матриці $[Q_2]$ з власним значенням λ. Тоді a_σ є власним вектором матриці $[Q_1]$ з тим же власним значенням. Якщо b є власним вектором матриці $[Q_1]$ з власним значенням λ, то $b_{\sigma^{-1}}$ є власним вектором матриці $[Q_2]$ з власним значенням λ.*

Доведення. Нехай λ — власне число матриці $[Q_2]$, яке відповідає її власному вектору a. Розглянемо вектор $P_\sigma\,[Q_2]\,a$. Маємо $P_\sigma\,[Q_2]\,a = \lambda P_\sigma a = \lambda a_\sigma$. Втім $P_\sigma\,[Q_2]\,a = P_\sigma(P_\sigma^T [Q_1] P_\sigma) a = [Q_1] P_\sigma a = [Q_1] a_\sigma$. Таким чином, справджується рівність $[Q_1] a_\sigma = \lambda a_\sigma$, яка доводить першу частину твердження.

Друга частина твердження випливає з рівності $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Крім цього, для невід'ємних та, зокрема, додатних матриць мають місце важливі теореми, доведені Перроном та Фробеніусом на початку 20-го століття.

Теорема 3 (теорема Перрона)**.** *Додатна матриця $A = (\alpha_{ij})$ розміру n завжди має дійсне і до того ж додатне власне число r, яке є простим коренем характеристичного многочлена, і модуль цього числа більший за модуль кожного іншого характеристичного числа матриці A.*

Цьому числу r *відповідає власний вектор* $z = (z_1, \ldots, z_n)$ *матриці* A *з додатними координатами.*

Цю теорему вперше було сформульовано та доведено в [11, 12].

Теорема 4 (теорема Фробеніуса). *Нерозкладна невід'ємна матриця* $A = (\alpha_{ij})$ *розміру* n *завжди має додатне власне число* r, *яке є простим коренем характеристичного многочлена. Модулі всіх інших власних чисел не більші за* r. *Цьому максимальному власному числу відповідає власний вектор з додатними координатами.*

Якщо при цьому матриця A *має* h *характеристичних чисел* $\lambda_0 = r, \lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1}$, *модулі яких дорівнюють* r, *то всі ці числа є різними коренями рівняння* $\lambda^h - r^h = 0$. *При* $h > 0$ *матрицю* A *перестановкою рядків і стовпців можна звести до вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ddots & A_{h-1,h} \\ A_{h,1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де на діагоналі знаходяться квадратні блоки.

Цю теорему вперше було сформульовано та доведено в [8, 9].

Має місце таке твердження [1, с. 347] (зауваження 3).

Твердження 2. *Нерозкладна невід'ємна матриця не може мати двох лінійно незалежних невід'ємних власних векторів.*

Врахувавши наведені факти та зауваження, можемо довести теорему 1 в такий спосіб. Виписуємо всі неізоморфні сагайдаки з двома, трьома та чотирма вершинами, після чого шукаємо серед них ті, які мають однакові характеристичні многочлени, а також ліві та праві власні вектори, що відповідають індексу. При цьому за теоремою Фробеніуса координати власного вектора можемо вважати невід'ємними, а за твердженням 2 побудований власний вектор єдиний з точністю до множника, який можна вибрати так, щоб норма вектора дорівнювала одиниці.

3. Списки сагайдаків та калькуляція. Звернемо увагу на те, що для сагайдаків з двома та трьома вершинами теорема 1 справджується тому, що характеристичні многочлени цих сагайдаків різні, що видно з наведеної нижче таблиці, яка містить усі неізоморфні сагайдаки відповідно до перевіреного нами списку з роботи [4] (додаток II). Для кожного з сагайдаків запишемо номер, під яким його розглянуто в роботі [2], а в дужках — подвійний номер цього самого сагайдака відповідно до нумерації, наведеної у [4] (додаток II) (номер $q.r$ означає, що сагайдак має q ребер та номер r у списку сагайдаків з q ребрами, наведеному в додатку до цитованої книги).

№ 2.1 (2.2) $\lambda^2 - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 3.1 (3.3) $\lambda^3 - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 3.2 (3.4) $\lambda^3 - 2\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 3.3 (3.4) $\lambda^3 - \lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

№ 3.4 (3.5) $\lambda^3 - 2\lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 3.5 (3.6) $\lambda^3 - 3\lambda - 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Бачимо, що характеристичні многочлени сагайдаків різні, що і доводить теорему 1 для сагайдаків з двома та трьома вершинами.

Для доведення теореми 1 для сагайдаків з чотирма вершинами, розіб'ємо сагайдаки на групи тих, що мають однакові характеристичні многочлени. Нумерувати сагайдаки будемо так само, як і сагайдаки, що мають дві та три вершини. Крім того, через v_l та v_r позначатимемо лівий та правий власні вектори сагайдака (при цьому координати вектора v_r записуватимемо в рядок), через λ_0 позначатимемо індекс сагайдака.

Група 1. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda$, $\lambda_0 = 1{,}618$.

№ 4.10 (6.11) $v_r = (0{,}447; 0{,}724;$ $0{,}447; 0{,}276)$ $v_l = (0{,}372; 0{,}602;$ $0{,}602; 0{,}372)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.12 (6.16) $v_r = (0{,}372; 0{,}602;$ $0{,}372; 0{,}602)$ $v_l = (0{,}447; 0{,}724;$ $0{,}276; 0{,}447)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.27 (7.8) $v_r = (0{,}724; 0;276;$ $0;447; 0;447)$ $v_l = (0;336; 0;544;$ $0;544; 0;544)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.28 (7.10) $v_r = (0{,}336; 0{,}544;$ $0{,}544; 0{,}544)$ $v_l = (0{,}724; 0{,}276;$ $0{,}447; 0{,}447)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 2. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda_0 = 1{,}466$.

№ 4.13 (6.22) $v_r = (0{,}284; 0{,}611;$ $0{,}611; 0{,}417)$ $v_l = (0{,}623; 0{,}370;$ $0{,}543; 0{,}425)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.17 (6.33) $v_r = (0{,}349; 0{,}511;$ $0{,}749; 0{,}238)$ $v_l = (0{,}517; 0{,}660;$ $0{,}450; 0{,}307)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.18 (6.34) $v_r = (0{,}517; 0{,}660;$ $0{,}450; 0{,}307)$ $v_l = (0{,}349; 0{,}511;$ $0{,}749; 0{,}238)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.19 (6.37) $v_r = (0{,}623; 0{,}370;$ $0{,}543; 0{,}425)$ $v_l = (0{,}284; 0{,}611;$ $0{,}611; 0{,}417)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Група 3. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda$, $\lambda_0 = 1{,}521$.

№ 4.14 (6.28) $v_r = (0{,}392; 0{,}650; 0{,}597; 0{,}258)$ $v_l = (0{,}535; 0{,}407; 0{,}619; 0{,}407)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.15 (6.30) $v_r = (0{,}744; 0{,}322; 0{,}489; 0{,}322)$ $v_l = (0{,}489; 0{,}322; 0{,}744; 0{,}322)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.16 (6.31) $v_r = (0{,}535; 0{,}407; 0{,}619; 0{,}407)$ $v_l = (0{,}392; 0{,}650; 0{,}597; 0{,}258)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		

Зауважимо, що в роботі [2] до цієї групи не віднесено сагайдак № 4.15 (6.30), який помилково віднесено до наступної групи, оскільки неправильно пораховано його характеристичний многочлен $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda$ замість потрібного $\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda$.

Група 4. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda$, $\lambda_0 = 1{,}769$.

№ 4.31 (7.15) $v_r = (0{,}381; 0{,}215; 0{,}674; 0{,}596)$ $v_l = (0{,}685; 0{,}322; 0{,}569; 0{,}322)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.32 (7.17) $v_r = (0{,}447; 0{,}395; 0{,}699; 0{,}395)$ $v_l = (0{,}333; 0{,}521; 0{,}589; 0{,}521)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.35 (7.21) $v_r = (0{,}333; 0{,}521; 0{,}589; 0{,}521)$ $v_l = (0{,}447; 0{,}395; 0{,}699; 0{,}395)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.58 (8.17) $v_r = (0{,}438; 0{,}685; 0{,}247; 0{,}527)$ $v_l = (0{,}527; 0{,}247; 0{,}685; 0{,}438)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 5. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 1$, $\lambda_0 = 1{,}618$.

№ 4.20 (6.42) $v_r = (0{,}602; 0{,}372; 0{,}602; 0{,}372)$ $v_l = (0{,}602; 0{,}372; 0{,}602; 0{,}372)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.39 (7.30) $v_r = (0{,}219; 0{,}572; 0{,}354; 0{,}707)$ $v_l = (0{,}544; 0{,}544; 0{,}544; 0{,}336)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№ 4.41(7.33) $v_r = (0{,}447; 0{,}724; 0{,}276; 0{,}447)$ $v_l = (0{,}276; 0{,}447; 0{,}447; 0{,}724)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.43 (7.38) $v_r = (0{,}544; 0{,}544; 0{,}544; 0{,}336)$ $v_l = (0{,}354; 0{,}572; 0{,}219; 0{,}707)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Група 6. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 3\lambda^2 - \lambda + 1$, $\lambda_0 = 1{,}802$,

№ 4.22 (7.1) $v_r = (0{,}264; 0{,}476; 0{,}593; 0{,}593)$ $v_l = (0{,}379; 0{,}682; 0{,}304; 0{,}547)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.24 (7.3) $v_r = (0{,}379; 0{,}682; 0{,}304; 0{,}547)$ $v_l = (0{,}264; 0{,}476; 0{,}593; 0{,}593)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 7. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 3\lambda^2 - \lambda$, $\lambda_0 = 1{,}879$.

№ 4.25 (7.6) $v_r = (0{,}356; 0{,}670; 0{,}356; 0{,}546)$ $v_l = (0{,}356; 0{,}670; 0{,}546; 0{,}356)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.47 (8.4) $v_r = (0{,}657; 0{,}228; 0{,}429; 0{,}577)$ $v_l = (0{,}263; 0{,}494; 0{,}666; 0{,}494)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.52 (8.9) $v_r = (0{,}263; 0{,}494; 0{,}666; 0{,}494)$ $v_l = (0{,}657; 0{,}228; 0{,}429; 0{,}577)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		

Група 8. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1$, $\lambda_0 = 1{,}839$.

№ 4.29 (7.12) $v_r = (0{,}565; 0{,}307; 0{,}673; 0{,}366)$ $v_l = (0{,}485; 0{,}314; 0{,}577; 0{,}577)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.33 (7.18) $v_r = (0{,}577; 0{,}314; 0{,}485; 0{,}577)$ $v_l = (0{,}673; 0{,}307; 0{,}565; 0{,}366)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№ 4.37 (7.25) $v_r = (0{,}577; 0{,}314; 0{,}485; 0{,}577)$ $v_l = (0{,}485; 0{,}314; 0{,}577; 0{,}577)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.59 (8.19) $v_r = (0{,}443; 0{,}684; 0{,}443; 0{,}372)$ $v_l = (0{,}443; 0{,}372; 0{,}443; 0{,}684)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.64 (8.26) $v_r = (0{,}438; 0{,}676; 0{,}521; 0{,}283)$ $v_l = (0{,}191; 0{,}352; 0{,}648; 0{,}648)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		

Група 9. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda_0 = 1{,}711$.

№ 4.30 (7.13) $v_r = (0{,}237; 0{,}545; 0{,}694; 0{,}406)$ $v_l = (0{,}497; 0{,}314; 0{,}537; 0{,}605)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.34 (7.20) $v_r = (0{,}497; 0{,}605; 0{,}537; 0{,}314)$ $v_l = (0{,}237; 0{,}406; 0{,}694; 0{,}545)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.38 (7.27) $v_r = (0{,}354; 0{,}207; 0{,}682; 0{,}606)$ $v_l = (0{,}682; 0{,}207; 0{,}354; 0{,}606)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		

Група 10. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$, $\lambda_0 = 2$.

№ 4.46 (8.3) $v_r = (0{,}500; 0{,}500; 0{,}500; 0{,}500)$ $v_l = (0{,}431; 0{,}323; 0{,}647; 0{,}539)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.48 (8.5) $v_r = (0{,}500; 0{,}500; 0{,}500; 0{,}500)$ $v_l = (0{,}632; 0{,}316; 0{,}632; 0{,}316)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.50 (8.7) $v_r = (0{,}632; 0{,}316; 0{,}632; 0{,}316)$ $v_l = (0{,}500; 0{,}500; 0{,}500; 0{,}500)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.51 (8.8) $v_r = (0{,}431; 0{,}323; 0{,}647; 0{,}539)$ $v_l = (0{,}500; 0{,}500; 0{,}500; 0{,}500)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№ 4.55 (8.14) $v_r = (0{,}324; 0{,}487; 0{,}649; 0{,}487)$ $v_l = (0{,}632; 0{,}316; 0{,}632; 0{,}316)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.71 (9.6) $v_r = (0{,}209; 0{,}626; 0{,}417; 0{,}626)$ $v_l = (0{,}626; 0{,}417; 0{,}626; 0{,}209)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 11. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$, $\lambda_0 = 2{,}148$.

№ 4.53 (8.11) $v_r = (0{,}611; 0{,}248; 0{,}532; 0{,}532)$ $v_l = (0{,}532; 0{,}248; 0{,}611; 0{,}532)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.70 (9.5) $v_r = (0{,}428; 0{,}627; 0{,}428; 0{,}491)$ $v_l = (0{,}611; 0{,}284; 0{,}417; 0{,}611)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.72 (9.7) $v_r = (0{,}284; 0{,}611; 0{,}611; 0{,}417)$ $v_l = (0{,}627; 0{,}428; 0{,}491; 0{,}428)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.76 (9.13) $v_r = (0{,}284; 0{,}417; 0{,}611; 0{,}611)$ $v_l = (0{,}611; 0{,}417; 0{,}611; 0{,}284)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 12. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3\lambda - 2$, $\lambda_0 = 2$.

№ 4.60 (8.23) $v_r = (0{,}550; 0{,}275; 0{,}642; 0{,}458)$ $v_l = (0{,}500; 0{,}500; 0{,}500; 0{,}500)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.62 (8.24) $v_r = (0{,}500; 0{,}500; 0{,}500; 0{,}500)$ $v_l = (0{,}458; 0{,}275; 0{,}642; 0{,}550)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 13. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3\lambda - 1$, $\lambda_0 = 1{,}950$.

№ 4.61 (8.23) $v_r = (0{,}511; 0{,}436; 0{,}659; 0{,}338)$ $v_l = (0{,}431; 0{,}285; 0{,}555; 0{,}652)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.63 (8.25) $v_r = (0{,}431; 0{,}652; 0{,}555; 0{,}285)$ $v_l = (0{,}511; 0{,}338; 0{,}659; 0{,}436)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 14. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 4\lambda^2 - 3\lambda$, $\lambda_0 = 2{,}303$.

№ 4.66 (9.1) $v_r = (0{,}461; 0{,}461;$ $0{,}601; 0{,}461)$ $v_l = (0{,}583; 0{,}253;$ $0{,}583; 0{,}506)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.67 (9.2) $v_r = (0{,}583; 0{,}253;$ $0{,}583; 0{,}506)$ $v_l = (0{,}461; 0{,}461;$ $0{,}601; 0{,}461)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 15. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 2$, $\lambda_0 = 2{,}270$.

№ 4.73 (9.9) $v_r = (0{,}227; 0{,}584;$ $0{,}515; 0{,}584)$ $v_l = (0{,}421; 0{,}477;$ $0{,}606; 0{,}477)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.74 (9.10) $v_r = (0{,}421; 0{,}606;$ $0{,}477; 0{,}477)$ $v_l = (0{,}227; 0{,}515;$ $0{,}584; 0{,}584)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 16. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких дорівнюють* $\lambda^4 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 1$, $\lambda_0 = 2{,}414$.

№ 4.79 (10.3) $v_r = (0{,}408; 0{,}577;$ $0{,}408; 0{,}577)$ $v_l = (0{,}562; 0{,}233;$ $0{,}562; 0{,}562)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.80 (10.4) $v_r = (0{,}562; 0{,}233;$ $0{,}562; 0{,}562)$ $v_l = (0{,}408; 0{,}577;$ $0{,}408; 0{,}577)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Група 17. *Сагайдаки, характеристичні многочлени яких не збігаються з характеристичними многочленами жодної з наведених груп сагайдаків і не збігаються між собою.*

№ 4.1 (4.16) $\lambda^4 - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.2 (5.7) $\lambda^4 - \lambda^2 - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.3 (5.25) $\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.4 (5.32) $\lambda^4 - \lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

№ 4.5 (5.35) $\lambda^4 - 2\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.6 (6.1) $\lambda^4 - 3\lambda^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.7 (6.3) $\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.8 (6.4) $\lambda^4 - 2\lambda^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.9 (6.7) $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.11 (6.14) $\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.21 (6.45) $\lambda^4 - 2\lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.23 (7.2) $\lambda^4 - 3\lambda^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.26 (7.7) $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.36 (7.23) $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.40 (7.32) $\lambda^4 - \lambda^2 - 3\lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.42 (7.35) $\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.44 (8.1) $\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.45 (8.2) $\lambda^4 - 4\lambda^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.49 (8.6) $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.54 (8.13) $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№ 4.56 (8.15) $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.57 (8.16) $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 4\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.65 (пропущено) $\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.68 (9.3) $\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.69 (9.4) $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.75 (9.12) $\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.77 (10.1) $\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.78 (10.2) $\lambda^4 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.81 (10.5) $\lambda^4 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	№ 4.82 (11.1) $\lambda^4 - 5\lambda^2 - 6\lambda - 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
№ 4.83 (12.1) $\lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		

Зауважимо, що для доведення теореми 1 у випадку сагайдаків із чотирма вершинами достатньо вивчити нормовані власні вектори сагайдаків в межах кожної групи окремо та зробити висновок, що теорема є правильною.

Звісно, значення елементів власних векторів, що наведені вище, є наближеними. Втім для доведення теореми 1 потрібно робити висновок про те, що деякі вектори є різними (у даному випадку — не є еквівалентними). Для такого висновку, тобто для висновку про те, що вектори відрізняються, достатньо порівнювати їхні наближені значення до третього знаку після коми в десятковому записі і констатувати факт їх відмінності. Для висновку ж про те, що вектори збігаються, необхідно проводити аналітичні, а не наближені розрахунки.

4. Про неможливість узагальнення теореми 1 на випадок сагайдаків із п'ятьма вершинами. В [3] звернуто увагу на те, що вже при розгляді сагайдаків із п'ятьма вершинами теорема 1 не справджується. Там же наведено приклад двох неізоморфних сильно зв'язних сагайдаків із п'ятьма вершинами, характеристичні многочлени яких збігаються та власні вектори, що відповідають індексу, також збігаються. Матриці суміжності цих сагайдаків мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звернемо увагу на те, що сагайдаки $Q(A)$ та $Q(B)$ не ізоморфні. Так, кожен з них має дві вершини такі, що в кожну з них входить лише одна стрілка (в обох сагайдаках — це перша та третя вершини). Втім в сагайдаку $Q(B)$ відповідні дві стрілки в першу та третю вершину виходять з однієї і тієї самої (четвертої) вершини, при тому що сагайдак $Q(A)$ такої властивості не має. Це означає, що сагайдаки $Q(A)$ та $Q(B)$ не ізоморфні.

Знайдемо характеристичні многочлени матриць A та B методом, запропонованим в [10]. Саме цим методом було знайдено власні вектори та характеристичні многочлени в роботі [2].

Те, що вектор $v = (v_1, \ldots, v_5)^t$ є правим власним вектором матриці A, рівносильно виконанню умови $Av = \lambda v$ для невідомого (ще не знайденого) числа λ. Рівність $Av = \lambda v$ доцільно записати у вигляді системи рівнянь

$$v_5 = \lambda v_1,$$

$$v_5 = \lambda v_2,$$

$$v_2 + v_4 = \lambda v_3,$$

$$v_2 + v_3 = \lambda v_4,$$

$$v_1 + v_4 = \lambda v_5.$$

Різниця перших двох рівнянь системи дає рівність $\lambda(v_2 - v_1) = 0$, з якої з урахуванням додатності індексу матриці отримуємо рівність

$$v_2 = v_1.$$

Таким чином, систему рівнянь для матриці $Av = \lambda v$, де λ — індекс матриці A, після підстановки $v_2 = v_1$ та очевидних перетворень записуємо у вигляді

$$v_2 = v_1,$$

$$v_3 = (\lambda^3 - \lambda - 1)v_1,$$

$$v_4 = (\lambda^2 - 1)v_1,$$

$$v_5 = \lambda v_1,$$

$$v_1 + v_4 = \lambda v_3.$$

Таким чином, власний вектор матриці A, який відповідає індексу (точніше — власний вектор, який відповідає кожному ненульовому власному числу матриці A), має вигляд

$$v = (1;\, 1;\, \lambda^3 - \lambda - 1;\, \lambda^2 - 1;\, \lambda)^t.$$

Безпосередній підрахунок показує, що характеристичний многочлен як матриці A, так і матриці B дорівнює

$$\lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2.$$

Проведемо аналогічні розрахунки для матриці B. Рівність $Bv = \lambda v$ запишемо у вигляді системи рівнянь

$$v_5 = \lambda v_1,$$

$$v_5 = \lambda v_2,$$

$$v_2 + v_4 = \lambda v_3,$$

$$v_1 + v_3 = \lambda v_4,$$

$$v_2 + v_4 = \lambda v_5.$$

З цієї системи за умови, що $\lambda \neq 0$, так само, як і вище, випливає система

$$v_2 = v_1,$$

$$v_3 = (\lambda^3 - \lambda - 1)v_1,$$

$$v_4 = (\lambda^2 - 1)v_1,$$

$$v_5 = \lambda v_1,$$

$$v_1 + v_4 = \lambda v_3,$$

яка збігається з аналогічною системою рівнянь, що відповідала рівності $Av = \lambda v$. Це означає, що збігаються не лише характеристичні многочлени та власні вектори, що відповідають індексу матриць A та B, а й усі праві власні вектори матриць A та B (з точністю до множення на ненульове число), які відповідають ненульовому власному числу матриці.

Перейдемо до знаходження лівих власних векторів матриць A та B.

Враховуючи властивості транспонування добутку матриць, для знаходження лівих власних векторів матриць A та B можемо знайти згаданим методом праві власні вектори матриць

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У припущенні $\lambda \neq 0$ систему рівнянь $A^t v = \lambda v$ записуємо у вигляді

$$v_5 = \lambda v_1,$$

$$v_2 = \frac{\lambda + 1}{\lambda} v_3,$$

$$v_4 = \lambda v_3,$$

$$v_1 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} v_3,$$

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} + \frac{\lambda + 1}{\lambda} = \lambda^2 \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}.$$

Систему рівнянь, що відповідає рівності $B^t v = \lambda v$, у припущенні $\lambda \neq 0$ записуємо у вигляді

$$v_1 = v_3,$$

$$v_2 = \lambda v_3,$$

$$v_4 = \lambda v_3,$$

$$v_5 = (\lambda^2 - 1) v_3.$$

Таким чином, ліві власні вектори, що відповідають матрицям A та B, мають вигляд

$$v_A = \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda};\ \frac{\lambda + 1}{\lambda};\ 1;\ \lambda;\ \lambda^2 - 1 \right),$$

$$v_B = (1;\ \lambda;\ 1;\ \lambda;\ \lambda^2 - 1).$$

Врахуємо, що характеристичний многочлен матриць A та B набирає вигляду

$$\lambda^2(\lambda^3 - 2\lambda - 1) = \lambda^2(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 1).$$

Тому для індексу кожного з сагайдаків виконується рівність

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

враховуючи яку, ліві власні вектори, що відповідають індексові, записуємо у вигляді

$$v_A = v_B = \left(1;\ \lambda;\ 1;\ \lambda;\ \lambda^2 - 1\right).$$

Зауважимо, що ліві власні вектори матриць A та B, які відповідають власному числу $\lambda = -1$ (котре, звісно, не є індексом сагайдаків), не є рівними.

5. Висновки. Серед сагайдаків із чотирма вершинами, що віднесені нами до 16-ти груп сагайдаків, котрі мають однакові характеристичні многочлени, є такі, чиї праві власні вектори еквівалентні. Це свідчить про те, що у формулюванні теореми 1 неможливо відмовитися від вимоги еквівалентності як лівих, так і правих власних векторів сильно зв'язних сагайдаків для того, щоб сагайдаки були ізоморфними.

Так, є еквівалентними праві власні вектори таких сагайдаків:

1) сагайдаків № 4.33 (7.18) та № 4.37 (7.25) з групи № 8,

2) сагайдаків № 4.48 (8.3) та № 4.48 (8.5) з групи № 10,

3) сагайдаків № 4.72 (9.7) та № 4.76 (9.13) з групи № 11,

4) сагайдаків № 4.61 (8.23) та № 4.63 (8.25) з групи № 13.

Звернемо увагу на те, що оскільки характеристичний многочлен матриці збігається з характеристичним многочленом транспонованої до неї матриці, то з правила транспонування добутку матриць маємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Якщо для двох неізоморфних сагайдаків A та B з n вершинами характеристичні многочлени збігаються і дорівнюють $f(\lambda)$, а праві власні вектори, що відповідають одному і тому ж власному числу λ_1, еквівалентні, то існують неізоморфні сагайдаки A_1 та B_1 з n вершинами, чиї характеристичні многочлени також дорівнюють $f(\lambda)$ та ліві власні вектори, що відповідають власному числу λ_1, еквівалентні.*

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. *Дудченко И. В.* Сильносвязные колчаны, их индексы и собственные векторы. – Киев, 2007. – 28 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики).
3. *Дудченко І. В., Плахотник М. В.* Сильно зв'язні сагайдаки та їх власні вектори // Тези доп. 4-ї конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача (Львів, 24 – 27 травня 2011 р.). – С. 265 – 266.
4. *Харари Ф.* Теория графов. – Пер. с англ. – М., 1973.
5. *Gabriel P.* Unserlegbare Darstellungen 1 // Manuscr. Math. – 1972. – **6**. – S. 71 – 103.
6. *Dudchenko I., Plakhotnyk M.* A linear algorithm of checking of the graph connectness // Algebra and Diskrete Math. – 2012. – № 1.
7. *Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V.* Algebras, rings and modules // Math. and Appl. – Kluwer Acad. Publ., 2004. – **575**. – 380 p.
8. *Frobenius G.* Über Matrizen aus positiven Elementen // Sitzungsber. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. – Berlin, 1908. – S. 471 – 476; 1909. – S. 514 – 518.
9. *Frobenius G.* Über Matrizen aus nicht-negativen Elementen // Sitzungsber. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. – Berlin, 1912. – S. 456 – 477.
10. *Dokuchaev M. A., Gubareni N. M., Futorny V. M., Khibina M. A., Kirichenko V. V.* Dynkin diagrams and spectra of graphs. – Brazil, 2010. – Preprint.
11. *Perron O.* Jacobischer Kettenbruchalgorithmus // Math. Ann. – 1907. – **64**. – S. 1 – 76.
12. *Perron O.* Ueber Matrizen // Math. Ann. – 1907. – **64**. – S. 248 – 263.

Одержано 12.12.11