УДК 519.21

Г. Л. Кулініч (Нац. ун-т, Київ)

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ ВПЛИВУ НА ГАРМОНІЧНИЙ ОСЦИЛЯТОР З ТЕРТЯМ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ „БІЛОГО ШУМУ" ВЗДОВЖ ВЕКТОРА ФАЗОВОЇ ШВИДКОСТІ

We consider representations in the phase plane for the harmonic oscillator with friction under random perturbations applied along the vector of phase velocity. We investigate the behavior of the amplitude, phase, and total energy of the damped oscillator.

Розглядається зображення на фазовій площині згасаючого гармонічного осцилятора з тертям при випадкових збуреннях вздовж вектора фазової швидкості. Досліджується поведінка амплітуди, фази та повної енергії згасаючого осцилятора.

Під гармонічним осцилятором з тертям розуміють систему, рух якої зображається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{u}(t) + 2h\dot{u}(t) + k^2u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \tag{1}$$

де u_0, $\dot{u}_0$ — початкові положення і швидкість осцилятора $(u_0^2 + \dot{u}_0^2 > 0)$; сталі $k > 0$, h — параметри осцилятора ($2h$ — коефіцієнт тертя); $u(t)$, $\dot{u}(t)$ — положення і швидкість осцилятора в момент часу $t > 0$.

Рівняння (1) еквівалентне системі диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{x}(t) = Bx(t), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -2h \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $x_1(t) = u(t)$, $x_2(t) = \dot{u}(t)$.

У прямокутній системі координат $X_1 0 X_2$ стан гармонічного осцилятора зображається точкою M з координатами $(x_1(t), x_2(t))$, яка рухається за фазовою траєкторією, а фазова швидкість точки M зображається вектором $(x_2, -k^2x_1 - 2hx_2)$, який направлений по дотичній у точці M до фазової траєкторії.

„Портрет" можливих рухів точки M на фазовій площині $X_1 0 X_2$ залежить від знаку величини $h^2 - k^2$. Якщо $0 < h^2 < k^2$, то це сім'я спіралей (при $0 < h < k$ — згасаючий осциляторний процес), якщо $h = 0$ — сім'я подібних еліпсів з центром у початку координат; якщо $h^2 > k^2$ — сім'я „парабол" з особливою точкою типу вузол у початку координат (при $h > k$ — згасаючий аперіодичний процес); якщо $h^2 = k^2$, — сім'я кривих параболічного типу з особливою точкою типу вузол в початку координат (при $h = k$ вузол стійкий) [1].

У даній роботі досліджується поведінка зображувальної точки M на фазовій площині $X_1 0 X_2$ у випадках

$$K_1: |h| < k; \quad K_2: |h| > k; \quad K_3: |h| = k$$

при випадкових збуреннях рівняння (2) вигляду

$$\dot{x}(t) = Bx(t)\dot{\zeta}(t), \tag{3}$$

де $\dot{\zeta}(t) = g_1(t) + g_2(t)\dot{w}(t)$, $g_i(t)$ — випадкової функції, $\dot{w}(t)$ — „похідна" від вінерівського процесу („білий шум" у формі Іто).

Дослідження поведінки зображувальної точки M системи вигляду (3) при $h = 0$ проведено в [2], де розглядається „білий шум" у формі Іто й у формі

Стратоновича. Моделі гармонічного осцилятора при випадкових збуреннях лише другої компоненти вектора фазової швидкості досліджувались у цілому ряді робіт (див., наприклад, [3–8]).

У п. 1 даної роботи одержано явний вигляд розв'язку рівняння (3). Наведено достатні умови згасаючих „коливань" (при цьому досліджується поведінка фази коливань), а також вигляд додаткового збурення вектора переносу в рівнянні (3), при якому фазові траєкторії рівняння (2) будуть інваріантними кривими рівняння вигляду (3). У п. 2 при невипадкових функціях $g_i(t)$ у збурюючого процесу $\zeta(t)$ для випадку K_1 виписані явні вирази для кореляційних функцій положення і швидкості осцилятора. Крім того, досліджується поведінка математичних сподівань положення, швидкості і повної енергії згасаючого осцилятора.

Надамо рівнянню (3) строгий математичний зміст. Нехай $(F_t,\ t>0)$ — неспадний потік σ-алгебр на фіксованому ймовірнісному просторі (Ω, F, P), $(w(t), F_t)$ — вінерівський процес, $g_i(t)$ — функції, визначені в області $[0, \infty)\times\Omega$, неперервні з імовірністю 1 і при кожному фіксованому t вимірні відносно F_t. Тоді рівняння (3) будемо розуміти як рівняння Іто

$$dx(t) = Bx(t)\,d\zeta(t), \tag{4}$$

де

$$\zeta(t) = \int_0^t g_1(s)\,ds + \int_0^t g_2(s)\,dw(s),$$

$x_1(0)=u_0,\ x_2(0)=\dot u_0$. Відомо [9], що рівняння (4) має єдиний сильний розв'язок $x(t)=(x_1(t),\ x_2(t))^*$.

Надалі будемо притримуватися наступних позначень:

$$\mu_1 = \sqrt{k^2-h^2} \quad \text{при} \quad |h|<k, \qquad \mu_2 = \sqrt{h^2-k^2} \quad \text{при} \quad |h|>k,$$

$$\lambda_1 = -h+\mu_2, \qquad \lambda_2 = -h-\mu_2,$$

$$\alpha_1(t) = \int_0^t g_1(s)\,ds, \qquad \alpha_2(t) = \int_0^t g_2^2(s)\,ds.$$

1. Аналіз поведінки амплітуди та фази згасаючого осцилятора.

Теорема 1. *Нехай* $x(t)$ — *розв'язок рівняння* (4). *Тоді з імовірністю* 1 *для всіх* $t\geq 0$ *справедливі рівності*:

1. *Для* K_1 $(u_0\neq 0)$

$$x_1(t) = A_1(t)\cos\varphi_1(t),$$

$$x_2(t) = kA_1(t)\sin(\varphi_1(t)+\gamma_1),$$

де

$$A_1(t) = \left(u_0^2+\frac{(hu_0+\dot u_0)^2}{\mu_1^2}\right)^{1/2}\exp\left\{\left(\frac{k^2}{2}-h^2\right)\alpha_2(t)-h\zeta(t)\right\},$$

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0)-h\mu_1\alpha_2(t)-\mu_1\zeta(t),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1(0) = \frac{hu_0+\dot u_0}{\mu_1 u_0}, \qquad \operatorname{tg}\gamma_1 = -\frac{h}{\mu_1};$$

2. *Для* K_2 $(-\lambda_2 u_0+\dot u_0\neq 0)$

$$x_1(t) = A_2(t)\sqrt{2}\cos\left(\varphi_2(t) + \frac{\pi}{2}\right), \quad x_2(t) = A_2(t)\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)^{1/2}\sin(\varphi_2(t) + \gamma_2),$$

де

$$A_2(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(y_1^2(t) + y_2^2(t)\right)^{1/2},$$

$$y_i(t) = y_i(0)\exp\left\{-\frac{\lambda_i^2}{2}\alpha_2(t) + \lambda_i\zeta(t)\right\},$$

$$y_1(0) = -\lambda_2 u_0 + \dot{u}_0, \quad y_2(0) = -\lambda_1 u_0 + \dot{u}_0,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2(0) = \frac{y_2(0)}{y_1(0)}\exp\{-2\mu_2[h\alpha_2(t) + \zeta(t)]\}, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

3. *Для* K_3 $(hu_0 + \dot{u}_0 \neq 0)$

$$x_1(t) = A_3(t)\sin\varphi_3(t),$$

$$x_2(t) = A_3(t)\sqrt{1 + h^2}\cos(\varphi_3(t) + \gamma_3),$$

де

$$A_3(t) = \exp\left\{-\frac{h^2}{2}\alpha_2(t) - h\zeta(t)\right\}\Big([hu_0 + \dot{u}_0]^2 +$$

$$+ [u_0 + (hu_0 + \dot{u}_0)(h\alpha_2(t) + \zeta(t))]^2\Big)^{1/2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3(t) = \frac{u_0}{hu_0 + \dot{u}_0} + h\alpha_2(t) + \zeta(t), \quad \operatorname{tg}\gamma_3 = h.$$

Доведення твердження 1 теореми. Розглянемо лінійне перетворення процесу $x(t)$, при якому матриця B в рівнянні (4) набуває жорданової форми, тобто розглянемо процес $y(t) = Tx(t)$, де

$$T = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \quad \left(TBT^{-1} = \begin{pmatrix} -h & \mu_1 \\ -\mu_1 & -h \end{pmatrix}\right).$$

Завдяки рівнянню (4) для процесу $y(t)$ маємо стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$dy(t) = TBT^{-1}y(t)\,d\zeta(t) \tag{5}$$

з коефіцієнтом переносу $a(t, y) = g_1(t)(-hy_1 + \mu_1 y_2, -\mu_1 y_1 - hy_2)$ та коефіцієнтом дифузії $b(t, y) = g_2(t)(-hy_1 + \mu_1 y_2, -\mu_1 y_1 - hy_2)$. Введемо нові процеси $r(t)$, $\varphi(t)$ через співвідношення

$$y_1(t) = r(t)\cos\varphi(t), \quad y_2(t) = r(t)\sin\varphi(t).$$

Тоді [2] при $t < \tau$, де $\tau = \inf\{t : |y(t)| = 0\}$ (якщо множина $\{t : |y(t)| = 0\} = \varnothing$, то $\tau = \infty$), справедливі рівняння

$$dr(t) = \left\{(a, \alpha) + \frac{1}{2r(t)}\left[-(b, \alpha)^2 + |b|^2\right]\right\}dt + (b, \alpha)\,dw(t),$$

$$d\varphi(t) = \left\{\frac{(a, \alpha^{\perp})}{r(t)} - \frac{1}{r^2(t)}(b, \alpha)(b, \alpha^{\perp})\right\}dt + \frac{(b, \alpha^{\perp})}{r(t)}\,dw(t),$$

де $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток,

$$\alpha = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)), \qquad \alpha^{\perp} = (-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t)),$$

$$a = a(t, y(t)), \qquad b = b(t, y(t)), \qquad |b|^2 = b_1^2(t, y(t)) + b_2^2(t, y(t)).$$

Легко переконатися, що у даному випадку

$$dr(t) = \left[-hg_1(t) + \frac{1}{2}\mu_1^2 g_2^2(t)\right] r(t)\,dt - hg_2(t) r(t)\,dw(t),$$

$$d\varphi(t) = -\mu_1\big(g_1(t) + hg_2^2(t)\big)dt - \mu_1 g_2(t)\,dw(t).$$

Тому [9] виконуються співвідношення

$$r(t) = r(0)\exp\left\{\left(\frac{k^2}{2} - h^2\right)\alpha_2(t) - h\zeta(t)\right\},$$
$$\varphi(t) = \varphi(0) - h\mu_1\alpha_2(t) - h\zeta(t), \tag{6}$$

де

$$\operatorname{tg}\varphi(0) = \frac{hu_0 + \dot u_0}{\mu_1 u_0}, \qquad r(0) = \left[\mu_1^2 u_0^2 + (hu_0 + \dot u_0)^2\right]^{1/2}.$$

З явного вигляду $r(t)$ випливає, що $\tau = \infty$ з імовірністю 1 для всіх $t \ge 0$. Оскільки $x(t) = T^{-1} y(t)$, де

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\mu_1 & 0 \\ -h/\mu_1 & 1 \end{pmatrix},$$

то, враховуючи явний вигляд процесу $y(t)$, закінчуємо доведення твердження 1 теореми.

Доведення тверджень 2, 3 теореми проводиться подібно до доведення твердження 1 з тією лише різницею, що використовуються матриці

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(T^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \ TBT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)$$

для K_2,

$$T = \begin{pmatrix} h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -h \end{pmatrix}, \ TBT^{-1} = \begin{pmatrix} -h & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix}\right)$$

для K_3 і знаходиться явний вигляд розв'язків рівняння (5).

Для K_2 розв'язок рівняння (5) записується безпосередньо:

$$y_i(t) = y_i(0)\exp\left\{-\frac{\lambda_i^2}{2}\alpha_2(t) + \lambda_i\zeta(t)\right\}, \qquad i = 1, 2,$$

$$y_1(0) = -\lambda_2 u_0 + \dot u_0, \qquad y_2(0) = -\lambda_1 u_0 + \dot u_0.$$

Для K_3 розв'язок рівняння (5) знаходиться методом, запропонованим у [10]:

$$y_1(t) = y_1(0)\exp\left\{-\frac{h^2}{2}\alpha_2(t) - h\zeta(t)\right\},$$

$$y_2(t) = \Big(y_2(0) + y_1(0)\left[h\alpha_2(t) + \zeta(t)\right]\Big)\exp\left\{-\frac{h^2}{2}\alpha_2(t) - h\zeta(t)\right\},$$

$$y_1(0) = hu_0 + \dot u_0, \qquad y_2(0) = u_0.$$

Зауваження **1.** Маючи явний вигляд розв'язку рівняння (4), можна в залежності від поведінки функцій $g_i(t)$ будувати моделі незгасаючих осциляторів з довільним порядком зростання амплітуд (див. приклади в [2]).

Надалі ми зупинимося на аналізі поведінки лише згасаючих осциляторів.

Теорема 2. *Нехай* $x(t)$ — *розв'язок рівняння* (4) *і при* $t \to \infty$ *виконуються збіжності:*

1. $$\alpha_2(t) \xrightarrow{P=1} \infty;$$
2. $$\beta_i(t) \xrightarrow{P=1} -\infty;$$
3. $$\frac{(\alpha_2(t)\ln\ln\alpha_2(t))^{1/2}}{\beta_i(t)} \xrightarrow{P=1} 0,$$

де

$$\beta_1(t) = \left(\frac{k^2}{2} - h^2\right)\alpha_2(t) - h\alpha_1(t) \quad \text{для} \quad K_1,$$

$$\beta_2(t) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_1^2}{2}\alpha_2(t) + \lambda_1\alpha_1(t) & \text{при } h > k, \\ -\dfrac{\lambda_2^2}{2}\alpha_2(t) + \lambda_2\alpha_1(t) & \text{при } h < -k \end{cases} \quad \text{для} \quad K_2,$$

$$\beta_3(t) = -\left[\frac{h^2}{2}\alpha_2(t) + h\alpha_1(t)\right] \quad \text{для} \quad K_3.$$

Тоді відповідно для K_i, $i = 1, 2, 3$, *амплітуда коливань* $A_i(t) \xrightarrow{P=1} 0$ *при* $t \to \infty$, *при цьому*:

1) $\varphi_1(t) \xrightarrow{P=1} \infty$, *якщо* $h < 0$; $\varphi_1(t) \xrightarrow{P=1} -\infty$, *якщо* $h > 0$ *для* $i = 1$;

2) $\varphi_2(t) \xrightarrow{P=1} 0$, *якщо* $h > k$; $\varphi_2(t) \xrightarrow{P=1} \pi/2$, *якщо* $h < -k$, *для* $i = 2$ *при додатковій умові, що виконуються нерівності* $-\lambda_1 u_0 + \dot{u}_0 > 0$, $-\lambda_2 u_0 + \dot{u}_0 > 0$;

3) $\varphi_3(t) \xrightarrow{P=1} \pi/2$, *якщо* $h > 0$; $\varphi_3(t) \xrightarrow{P=1} -\pi/2$, *якщо* $h < 0$, *для* $i = 3$ *при додатковій умові, що* $hu_0 + \dot{u}_0 > 0$.

Доведення теореми для K_1. З явного вигляду розв'язку $x(t)$ маємо

$$A_1(t) = A_1(0)\exp\left\{\beta_1(t) - h\int_0^t g_2(s)\,dw(s)\right\}.$$

Оскільки [9]

$$\int_0^t g_2(s)\,dw(s) = \tilde{w}(\alpha_2(t)),$$

де $\tilde{w}(t)$ — також вінерівський процес, то

$$A_1(t) = A_1(0)\exp\left\{\beta_1(t)\left[1 - h\frac{\tilde{w}(\alpha_2(t))}{\beta_1(t)}\right]\right\}.$$

Тому завдяки „закону повторного логарифма”:

$$\mathbf{P}\left\{\varlimsup_{t\to\infty}\frac{|\tilde{w}(\alpha_2(t))|}{[2\alpha_2(t)\ln\ln\alpha_2(t)]^{1/2}} = 1\right\} = 1$$

і умовам теореми при $i=1$ маємо, що $A_1(t) \xrightarrow{P=1} 0$ при $t \to \infty$. При цьому, із рівності

$$\beta_1(t) = \frac{k^2}{2}\alpha_2(t) - h[h\alpha_2(t) + \alpha_1(t)]$$

і умов теореми для $i=1$ випливають збіжності

$$\begin{gathered} h[h\alpha_2(t) + \alpha_1(t)] \xrightarrow{P=1} \infty, \\ [\alpha_2(t)\ln\ln\alpha_2(t)]^{1/2}(h[h\alpha_2(t) + \alpha_1(t)])^{-1} = \\ = [\alpha_2(t)\ln\ln\alpha_2(t)]^{1/2}\left(-\beta_1(t) + \frac{k^2}{2}\alpha_2(t)\right)^{-1} \xrightarrow{P=1} 0 \end{gathered} \tag{7}$$

при $t \to \infty$.

Тому, враховуючи рівність

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) - \mu_1[h\alpha_2(t) + \alpha_1(t)] - \mu_1\tilde{w}(\alpha_2(t)),$$

маємо збіжність

$$\varphi_1(t)[h\alpha_2(t) + \alpha_1(t)]^{-1} \xrightarrow{P=1} -\mu_1 \tag{8}$$

при $t \to \infty$. З урахуванням (7) і (8) закінчуємо доведення теореми для K_1.

Доведення теореми для K_2, K_3. Нехай виконуються умови теореми для $i = 2$. Оскільки $\lambda_2 < \lambda_1$ і $\lambda_1\lambda_2 = k^2 > 0$, то, враховуючи умову 2 теореми для $i=2$, легко показати, що при $t \to \infty$

$$-\frac{\lambda_i^2}{2}\alpha_2(t) + \lambda_i\alpha_1(t) \xrightarrow{P=1} -\infty$$

для $i=1, 2$. Далі, подібно до доведення збіжності $A_1(t) \xrightarrow{P=1} 0$ при $t \to \infty$, при $t \to \infty$ маємо збіжності

$$y_i(t) \xrightarrow{P=1} 0, \quad i = 1, 2,$$

з яких з урахуванням вигляду $A_2(t)$ випливає, що $A_2(t) \xrightarrow{P=1} 0$ при $t \to \infty$.

Нехай виконуються умови теореми для $i=3$. Зрозуміло, що для збіжності $A_3(t) \xrightarrow{P=1} 0$ при $t \to \infty$ досить показати збіжність $I(t) \xrightarrow{P=1} 0$, де

$$I(t) = [h\alpha_2(t) + \zeta(t)]^2 \exp\{-h^2\alpha_2(t) - 2h\zeta(t)\}.$$

Враховуючи вигляд $\zeta(t)$, одержуємо нерівність $I(t) \le 2[I_1(t) + I_2(t)]$, де

$$I_1(t) = \left[\beta_3(t) - h\int_0^t g_2(s)\,dw(s)\right]^2 \exp\left\{2\left(\beta_3(t) - h\int_0^t g_2(s)\,dw(s)\right)\right\},$$

$$I_2(t) = \frac{h^2}{4}\alpha_2^2(t)\exp\left\{2\left(\beta_3(t) - h\int_0^t g_2(s)\,dw(s)\right)\right\}.$$

Оскільки

$$\beta_3(t) - h\int_0^t g_2(s)\,dw(s) = \beta_3(t)\left[1 - h\frac{\tilde{w}(\alpha_2(t))}{\beta_3(t)}\right],$$

то на основі умов теореми для $i = 3$ маємо збіжність

$$\beta_3(t) - h\int_0^t g_2(s)\,dw(s) \xrightarrow{P=1} -\infty$$

при $t \to \infty$. Тому $I_1(t) \xrightarrow{P=1} 0$ при $t \to \infty$. Крім того, з рівності

$$I_2(t) = \frac{h^2}{4}\exp\left\{2\beta_3(t)\left[1 - h\frac{\tilde{w}(\alpha_2(t))}{\beta_3(t)} + 2\frac{\ln\alpha_2(t)}{\beta_3(t)}\right]\right\}$$

маємо збіжність $I_2(t) \xrightarrow{P=1} 0$ при $t \to \infty$. Отже, $A_3(t) \xrightarrow{P=1} 0$ при $t \to \infty$.

Доведення тверджень відносно поведінки фаз $\varphi_2(t)$ і $\varphi_3(t)$ проводиться аналогічно до доведення твердження теореми для $\varphi_1(t)$.

***Зауваження* 2.** З доведення теореми 2 випливає, що твердження теореми 2 про поведінку фаз $\varphi_i(t)$ має місце при більш широких умовах на функції $g_i(t)$. Тобто, справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай*: 1) $u_0 \neq 0$ *для* K_1; 2) $-\lambda_1 u_0 + \dot{u}_0 > 0$ *і* $-\lambda_2 u_0 + \dot{u}_0 > 0$ *для* K_2; 3) $hu_0 + \dot{u}_0 > 0$ *для* K_3; *і*

$$\alpha_2(t) \xrightarrow{P=1} \infty, \qquad [\alpha_2(t)\ln\ln\alpha_2(t)]^{1/2}[h\alpha_2(t) + \alpha_1(t)]^{-1} \xrightarrow{P=1} 0$$

при $t \to \infty$. *Тоді*:

1. *Якщо* $h\alpha_2(t) + \alpha_1(t) \xrightarrow{P=1} \infty$, *то*: а) $\varphi_1(t) \xrightarrow{P=1} -\infty$ *для* K_1; б) $\varphi_2(t) \xrightarrow{P=1} 0$ *для* K_2; в) $\varphi_3(t) \xrightarrow{P=1} \pi/2$ *для* K_3.

2. *Якщо* $h\alpha_2(t) + \alpha_1(t) \xrightarrow{P=1} -\infty$, *то*: а) $\varphi_1(t) \xrightarrow{P=1} \infty$ *для* K_1; б) $\varphi_2(t) \xrightarrow{P=1} \pi/2$ *для* K_2; в) $\varphi_3(t) \xrightarrow{P=1} -\pi/2$ *для* K_3.

Справді, твердження теореми 3 для K_1 випливає зі збіжності (8), яка має місце згідно з умовами теореми при $i = 1$. Подібні висновки мають місце і для K_2, K_3.

***Наслідок* 1.** *Якщо* $g_i(t) = g_i$, $i = 1, 2$ — *сталі величини*, $g_2 \neq 0$, *і виконується припущення* 1–3 *теореми* 3, *то відповідно при* $t \to \infty$:

1. $A_1(t) \xrightarrow{P=1} 0$, *якщо* $hg_1 > (k^2/2 - h^2)g_2^2$. *При цьому:* 1) $\varphi_1(t) \xrightarrow{P=1} \infty$, *якщо* $h < 0$; 2) $\varphi_1(t) \xrightarrow{P=1} -\infty$, *якщо* $h > 0$;

2. $A_2(t) \xrightarrow{P=1} 0$, *якщо*: 1) $h > k$ *і* $\lambda_1 g_1 < \lambda_1^2 g_2^2/2$. *При цьому*: $\varphi_2(t) \xrightarrow{P=1} 0$; 2) $h < -k$ *і* $\lambda_2 g_1 < \lambda_2^2 g_2^2/2$. *При цьому* $\varphi_2(t) \xrightarrow{P=1} \pi/2$.

3. $A_3(t) \xrightarrow{P=1} 0$, *якщо* $hg_1 > -h_2 g_2^2/2$. *При цьому:* 1) $\varphi_3(t) \xrightarrow{P=1} \pi/2$, *якщо* $h > 0$; 2) $\varphi_3(t) \xrightarrow{P=1} -\pi/2$, *якщо* $h < 0$.

Зрозуміло, що цей наслідок безпосередньо випливає з умов теореми 2.

***Зауваження* 3.** З наслідку можна зробити наступний висновок. Якщо $g_i(t) = g_i$ — сталі величини і $g_1 = 0$, то при довільній інтенсивності $g_2 \neq 0$ збурюючого „білого шуму" для випадків K_2, K_3 завжди маємо згасаючий осцилятор, а для випадку K_1 — лише при умові $k^2/2 < h^2 < k^2$. Крім того, для K_1 завжди можемо вибрати $g_1 \neq 0$ так, щоб осцилятор був згасаючий, тобто щоб виконувалася нерівність $hg_1 > (k^2/2 - h^2)g_2^2$.

Далі покажемо, що при певному додатковому збуренні вектора переносу рівняння (4) фазові траєкторії рівняння (3) будуть інваріантними кривими збуреного рівняння, тобто зображувальна точка збуреної системи з імовірністю 1 буде „дифундувати" за фазовою траєкторією детермінованої системи (3).

Теорема 4. *Нехай* $\hat{x}(t)$ *— розв'язок стохастичного диференціального рівняння*

$$d\hat{x}(t) = g_2^2(t)\hat{B}_i\,\hat{x}(t)\,dt + B\hat{x}(t)\,d\zeta(t), \qquad \hat{x}_1(0) = u_0, \qquad \hat{x}_2(0) = \dot{u}_0, \tag{9}$$

де матриці $\hat{B}_i$ *відповідно для випадків* K_i, $i = 1, 2, 3$, *мають вигляд*

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} -k^2/2 & 0 \\ 0 & -k^2/2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \\ -\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}_3 = \begin{pmatrix} -h^2/2 & 1-h/2 \\ -h^2(1-h/2) & -h(2-h/2) \end{pmatrix},$$

і відповідно при $i = 1, 2, 3$ *мають місце припущення* 1–3 *теореми* 3. *Тоді для довільного* $t \geq 0$

$$G_i(\hat{x}(t)) = G_i(\hat{x}(0)) \tag{10}$$

з імовірністю 1 *відповідно при* $i = 1, 2, 3$, *де*

$$G_1(x_1, x_2) = \left[(k^2-h^2)x_1^2 + (hx_1+x_2)^2\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{h}{\sqrt{k^2-h^2}}\operatorname{arctg}\frac{hx_1+x_2}{\sqrt{k^2-h^2}\,x_1}\right\},$$

$$G_2(x_1, x_2) = (-\lambda_1 x_1 + x_2)(-\lambda_2 x_1 + x_2)^{-\lambda_2/\lambda_1},$$

$$G_3(x_1, x_2) = \frac{x_2}{hx_1+x_2} + \frac{1}{h}\ln(hx_1+x_2).$$

Доведення теореми можна провести безпосереднім застосуванням формули Іто до процесів $G_i(\hat{x}(t))$ відповідно при $i = 1, 2, 3$, завдяки якій одержуємо, що для довільного $t > 0$ $d\,G_i(\hat{x}(t)) = 0$ з імовірністю 1, тобто виконується рівність (10).

Теорема 5. *Нехай* $\hat{x}(t)$ *— розв'язок рівняння* (9). *Тоді:*

1. *Для* K_1

$$\hat{x}_1(t) = \hat{A}_1(t)\cos\varphi_1(t), \qquad \hat{x}_2(t) = k\hat{A}_2(t)\sin(\varphi_1(t)+\gamma_1),$$

де

$$\hat{A}_1(t) = A_1(0)\exp\{-h^2\alpha_2(t) - h\zeta(t)\},$$

$A_1(0)$, $\varphi_1(t)$, γ_1 *— такі ж самі, що й у теоремі* 1;

2. *Для* K_2

$$\hat{x}_1(t) = \hat{A}_2(t)\sqrt{2}\cos\left(\hat{\varphi}_2(t)+\frac{\pi}{4}\right), \qquad \hat{x}_2(t) = \hat{A}_2(t)\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\sin(\hat{\varphi}_2(t)+\gamma_2),$$

де

$$\hat{A}_2(t) = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[y_1(t)+y_2(t)]^{1/2}, \qquad y_i(t) = y_i(0)\exp\{\lambda_i\zeta(t)\},$$

$$y_1(0) = -\lambda_2 u_0 + \dot{u}_0, \qquad y_2(0) = -\lambda_1 u_0 + \dot{u}_0,$$

$$\operatorname{tg}\hat{\varphi}_2(t) = \frac{y_2(0)}{y_1(0)}\exp\{-2\mu_2\zeta(t)\}, \qquad \operatorname{tg}\gamma_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

3. *Для* K_3

$$\hat{x}_1(t) = \hat{A}_3(t)\sin\hat{\varphi}_3(t), \qquad \hat{x}_2(t) = \hat{A}_3(t)\sqrt{1+h^2}\cos(\hat{\varphi}_3(t)+\gamma_3),$$

де

$$\hat{A}_3(t) = \exp\left\{-h\left(1+\frac{h}{2}\right)\alpha_2(t) - h\zeta(t)\right\} \times$$

$$\times\left(y_1^2(0) + \left[y_2(0) + y_1(0)\left(\left(1+\frac{h}{2}\right)\alpha_2(t) + \zeta(t)\right)\right]^2\right)^{1/2},$$

$$y_1(0) = hu_0 + \dot{u}_0, \quad y_2(0) = u_0,$$

$$\operatorname{tg}\hat{\varphi}_3(t) = y_2(0) + y_1(0)\left[\left(1+\frac{h}{2}\right)\alpha_2(t) + \zeta(t)\right], \quad \operatorname{tg}\gamma_3 = h.$$

Доведення теореми проводиться подібно до доведення теореми 1 з використанням при цьому відповідно для K_i рівностей

$$T\hat{B}_1T^{-1} = \begin{pmatrix} -k^2/2 & 0 \\ 0 & -k^2/2 \end{pmatrix},$$

$$T\hat{B}_2T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$T\hat{B}_3T^{-1} = \begin{pmatrix} -h & 0 \\ 1-h/2 & -h \end{pmatrix}.$$

Тепер, маючи явний вигляд розв'язку рівняння (9), зрозуміло як отримати аналог теореми 2. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 6. *Нехай* $\hat{x}(t)$ *— розв'язок рівняння* (9) *і виконуються припущення* 1–3 *теореми* 3. *Якщо:*

1. $\alpha_2(t) \xrightarrow{P=1} \infty;$
2. $\hat{\beta}_i(t) \xrightarrow{P=1} \infty;$
3. $\dfrac{(\alpha_2(t)\ln\ln\alpha_2(t))^{1/2}}{\hat{\beta}_i(t)} \xrightarrow{P=1} 0,$

де

$$\hat{\beta}_1(t) = h(h\alpha_2(t) + \alpha_1(t)) \quad \text{для} \quad K_1,$$

$$\hat{\beta}_2(t) = h\alpha_1(t) \quad \text{для} \quad K_2,$$

$$\hat{\beta}_3(t) = h\left[\left(1+\frac{h}{2}\right)\alpha_2(t) + \alpha_1(t)\right] \quad \text{для} \quad K_3,$$

то відповідно для $i = 1, 2, 3$ $\hat{A}_i \xrightarrow{P=1} 0$ *при* $t \to \infty$. *При цьому:* 1) $\varphi_1(t) \xrightarrow{P=1} -\infty$ *при* $h > 0$, $\varphi_1(t) \xrightarrow{P=1} \infty$ *при* $h < 0$; 2) $\hat{\varphi}_2(t) \xrightarrow{P=1} 0$ *при* $h > k$, $\hat{\varphi}_2(t) \xrightarrow{P=1} \pi/2$ *при* $h < -k$; 3) $\hat{\varphi}_3(t) \xrightarrow{P=1} \pi/2$ *при* $h > 0$, $\hat{\varphi}_3(t) \xrightarrow{P=1} -\pi/2$ *при* $h < 0$.

2. Про асимптотичну поведінку математичних сподівань положення, швидкості і повної енергії згасаючого осцилятора при збуренні процесом з незалежними приростами. Розглянемо збурюючий процес $\zeta(t)$ з невипадковими функціями $g_i(t)$. Такий процес $\zeta(t)$ є процесом з незалежними приростами [9]. Зробимо для згасаючого осцилятора аналіз поведінки математичних сподівань $m_i(t) = \mathbf{M}x_i(t)$, $i = 1, 2$, $\mathbf{M}E(t)$, де $(x_1(t), x_2(t))^*$ — розв'язок рівняння (4),

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[x_2^2(t) + k^2 x_1^2(t) \right]$$

— повна енергія осцилятора. Крім того, для випадку K_1 розглянемо коваріаційні функції

$$B_i(t, s) = \mathbf{M} x_i(t) x_i(s), \quad i = 1, 2,$$

$$B_{12}(t, s) = \mathbf{M} x_1(t) x_2(s).$$

Для розв'язку рівняння (9) ці середні будемо позначати відповідно через $\hat{m}_i(t)$, $\mathbf{M}\hat{E}(t)$, $\hat{B}_i(t, s)$, $\hat{B}_{12}(t, s)$.

Теорема 7. 1. *Нехай* $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^*$ *— розв'язок рівняння* (4), *у якому* $|h| < k$. *Тоді*

$$m_1(t) = A_1(0) \exp\{-h\alpha_1(t)\} \cos(\varphi_1(0) - \mu_1\alpha_1(t)),$$

$$m_2(t) = kA_1(0) \exp\{-h\alpha_1(t)\} \sin(\varphi_1(0) - \mu_1\alpha_1(t) + \gamma_1),$$

$$\mathbf{M}E(t) = \frac{k^2}{2} A_1^2(0) \exp\{-2h\alpha_1(t) + k^2\alpha_2(t)\} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{h}{k} \exp\{+2\mu_1^2\alpha_2(t)\} \sin(2\varphi_1(0) - 2\mu_1\beta_0(t) + \gamma_1) \right],$$

$$B_1(t, s) = \frac{1}{2} A_1^2(0) \Big[f_1(t, s) \cos\big(\alpha_0(t) - \alpha_0(s) + \sigma_2^2(t, s)\big) +$$

$$+ f_2(t, s) \cos\big(\alpha_0(t) + \alpha_0(s) + \sigma_1^2(t, s)\big) \Big],$$

$$B_2(t, s) = \frac{k^2}{2} A_1^2(0) \Big[f_1(t, s) \cos\big(\alpha_0(t) - \alpha_0(s) + \sigma_2^2(t, s)\big) -$$

$$- f_2(t, s) \cos\big(\alpha_0(t) + \alpha_0(s) + \sigma_1^2(t, s) + 2\gamma_1\big) \Big],$$

$$B_{12}(t, s) = \frac{k}{2} A_1^2(0) \Big[-f_1(t, s) \sin\big(\alpha_0(t) - \alpha_0(s) + \sigma_2^2(t, s)\,\mathrm{sgn}(t - s) - \gamma_1\big) +$$

$$+ f_2(t, s) \sin\big(\alpha_0(t) + \alpha_0(s) + \sigma_1^2(t, s) + \gamma_1\big) \Big],$$

де

$$\alpha_0(t) = \varphi_1(0) - \mu_1\beta_0(t), \quad \beta_0(t) = h\alpha_2^2(t) + \alpha_1(t),$$

$$f_1(t, s) = \exp\{-h(\alpha_1(t) + \alpha_1(s)) + k^2\alpha_2(t \wedge s)\},$$

$$f_2(t, s) = \exp\{-h(\alpha_1(t) + \alpha_1(s)) + (2h^2 - k^2)\alpha_2(t \wedge s)\},$$

$$\sigma_1^2(t, s) = h\mu_1 \left[4\alpha_2(t \wedge s) + \int_{t \wedge s}^{t \vee s} g_2^2(v)\, dv \right],$$

$$\sigma_2^2(t, s) = h\mu_1 \int_{t \wedge s}^{t \vee s} g_2^2(v)\, dv,$$

$$t \wedge s = \min(t, s),$$

$$t \vee s = \max(t, s).$$

2. *Нехай* $\hat{x}(t)$ — *розв'язок рівняння* (9), *у якому* $|h| < k$. *Тоді*

$$\hat{m}_i(t) = \exp\left\{-\frac{k^2}{2}\alpha_2(t)\right\}m_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$$\mathbf{M}\hat{E}(t) = \exp\left\{-k^2\alpha_2(t)\right\}\mathbf{M}E(t),$$

$$\hat{B}_i(t, s) = z(t, s)B_i(t, s),$$

$$\hat{B}_{12}(t, s) = z(t, s)B_{12}(t, s),$$

де

$$z(t, s) = \exp\left\{-\frac{k^2}{2}(\alpha_2(t) + \alpha_2(s))\right\}.$$

Доведення твердження 1 теореми. Якщо маємо явний вигляд для $x_1(t)$, то неважко встановити, що виконується рівність

$$m_1(t) = A_1(0)e^{\beta_1(t)}[I_1\cos\alpha_0(t) + I_2\sin\alpha_0(t)], \tag{11}$$

де

$$I_1 = \mathbf{M}e^{-h\xi}\cos\mu_1\xi,$$

$$I_2 = \mathbf{M}e^{-h\xi}\sin\mu_1\xi,$$

$$\xi = \int_0^t g_2(s)\,dw(s)$$

— нормально розподілена величина $N(0, \alpha_2(t))$. Після обчислення математичних сподівань маємо

$$I_1 = e^{(h^2 - \mu_1^2)\alpha_2(t)/2}\cos(h\mu_1\alpha_2(t)),$$

$$I_2 = -e^{(h^2 - \mu_1^2)\alpha_2(t)/2}\sin(h\mu_1\alpha_2(t)).$$

Тому, враховуючи рівність (11), одержуємо

$$m_1(t) = A_1(0)e^{-h\alpha_1(t)}\cos(\varphi_1(0) - \mu_1\alpha_1(t)).$$

Виходячи з явного вигляду $x_i(t)$, останні рівності твердження 1 встановлюються подібними міркуваннями.

Доведення твердження 2 теореми випливає із рівності

$$\hat{x}(t) = \exp\left\{-\frac{k^2}{2}\alpha_2(t)\right\}x(t)$$

і рівностей твердження 1.

З теореми 6 безпосередньо випливають наступні наслідки.

Наслідок 2. *Нехай* $x(t)$ — *розв'язок рівняння* (4). *Якщо при* $t \to \infty$:

1) $h\alpha_1(t) \to \infty$, *то* $m_i(t) \to 0$, $B_i(t+s, s) \to 0$, $i = 1, 2$, $B_{12}(t+s, s) \to 0$ *при* $t \to \infty$;

2) $\alpha_2(t) \to \infty$ *і* $h = 0$, *то* $B_{12}(t, t) \to 0$ *при* $t \to \infty$;

3) $2h\alpha_1(t) - k^2\alpha_2(t) \to \infty$, *то* $\mathbf{M}E(t) \to 0$, $B_i(t, t) \to 0$, $i = 1, 2$, $B_{12}(t, t) \to$ $\to 0$ *при* $t \to \infty$.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\hat{x}(t)$ — *розв'язок рівняння* (9). *Якщо при* $t \to \infty$:

1) $k^2\alpha_2(t)/2 + h\alpha_1(t) \to \infty$, *то*

$$\hat{m}_i(t) \to 0, \quad \hat{B}_i(t+s, s) \to 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\hat{B}_{12}(t+s, s) \to 0 \quad при \quad t \to \infty;$$

2) $h\alpha_1(t) \to \infty$, *то*

$$\mathbf{M}\hat{E}(t) \to 0, \quad \hat{B}_i(t, t) \to 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\hat{B}_{12}(t, t) \to 0 \quad при \quad t \to \infty.$$

Подібно до випадку K_1 неважко записати явні вирази середніх $m_i(t)$, $\mathbf{M}E(t)$, $B_i(t, s)$, $B_{12}(t, s)$ і для випадків K_2, K_3, з яких випливає наступна теорема.

Теорема 8. *Нехай* $x(t)$ — *розв'язок рівняння* (4). *Тоді при* $t \to \infty$:

1. *Якщо* $h\alpha_1(t) \to \infty$, *то* $m_i(t) \to 0$, $i = 1, 2$, *для* K_2;

2. *Якщо* $\lambda_i^2\alpha_2(t) + 2\lambda_i\alpha_1(t) \to -\infty$, $i = 1, 2$, *то* $\mathbf{M}E(t) \to 0$ *для* K_2;

3. *Якщо* $\alpha_2(t) \to \infty$, $\exp\{-h\alpha_1(t)\}\alpha_2(t) \to 0$, *то* $m_i(t) \to 0$, $i = 1, 2$ *для* K_3;

4. *Якщо* $\alpha_2(t) \to \infty$ *і*

$$\exp\left\{h^2\alpha_2(t) - 2h\alpha_1(t)\right\}\left[\alpha_2(t) + |\alpha_1(t)|\right] \to 0,$$

то $\mathbf{M}E(t) \to 0$ *для* K_3.

1. *Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
2. *Kulinich G. L.* Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator // Random Operators and Stoch. Equats. – 1995. – **3**, № 2. – P. 141–152.
3. *Kulinich G. L.* On the limiting behaviour of a harmonic oscillator with random external disturbance // J. Applied Math. and Stoch. Anal. – 1995. – **8**, № 3. – P. 265–274.
4. *Кулініч Г. Л.* Про граничну поведінку випадкового гармонічного осцилятора // Вісн. Київ. ун-ту. Серія мат., мех. – 1983. – Вип. 25. – С. 108–112.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – Т. 3. – 496 с.
6. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах // Приближенные методы исследования нелинейных систем. – Киев, 1976. – С. 102–107.
7. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961. – 558 с.
8. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
10. *Бабчук В. Г., Кулініч Г. Л.* Решение одного класса линейной системы стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка с одним винеровским процессом // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – **23**, № 2. – С. 457–458.

Одержано 03.10.96