

ПРО ВНЕСОК Ю. О. МИТРОПОЛЬСЬКОГО У РОЗВИТОК АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ

We give a survey of fundamental scientific results of Yu. A. Mitropol'skii in the fields of nonlinear differential equations, mathematical physics, and the theory of nonlinear oscillations.

Наведено огляд фундаментальних наукових досліджень академіка Ю. О. Митропольського в області нелінійних диференціальних рівнянь, математичної фізики і теорії нелінійних коливань.

У світі сучасної науки і техніки одне з центральних місць займають галузі, в яких досліджуються і використовуються коливання і хвилі різної природи. Сюди відносяться електро- і радіотехніка, радіофізика, оптика, механіка, аеро- і гідромеханіка та ін., де враховуються пружні коливання конструкцій, коливання і хвилі в рідинах, газах, твердих середовищах, теорія автоматичного керування тощо. Ще в кінці 20-х і на початку 30-х років виникла необхідність у створенні математично обгрунтованої теорії нелінійних коливань. Асимптотичну теорію було створено М. М. Криловим і М. М. Боголобовим у багатьох їхніх роботах, серед яких особливе місце займає фундаментальна монографія „Введение в нелинейную механику”. Вони розробили новий метод дослідження нелінійних коливань у вигляді побудови асимптотичних розкладів.

Свою наукову діяльність Ю. О. Митропольський почав у 1946 р. під керівництвом М. М. Боголобова. Асимптотичні методи нелінійної механіки, дослідження нелінійних диференціальних рівнянь займають центральне місце в працях ученого. Їм були присвячені його кандидатська і докторська дисертації. На основі асимптотичних методів Крилова – Боголобова він розробив метод дослідження нестационарних коливних процесів. Як відомо, однією з найважливіших задач дослідження нестационарних коливань є задача про проходження через резонанс. За короткий час Ю. О. Митропольський створив і математично обгрунтував алгоритми побудови асимптотичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, які описують нестационарні коливні процеси. За допомогою розвинутих ним методів дав строге пояснення ряду раніше мало вивчених явищ в нелінійних коливних системах.

Починаючи з 1932 р., в Києві М. М. Крилов і М. М. Боголобов почали розвивати новий підхід до вивчення нелінійних коливань, який базується на побудові асимптотичних розкладів. Вони розповсюдили методи теорії збурень на загальні неконсервативні системи і створили нові асимптотичні методи для дослідження нелінійних коливних систем. При розробці асимптотичних методів їх авторам вдалося створити формальний метод побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь з малим параметром. Розроблений формалізм побудови асимптотичних розкладів дозволяє одержати розв'язок не тільки в першому наближенні, а й вищі наближення, наближено дослідити коливні процеси як періодичні, так і квазіперіодичні.

При розробці цих методів особлива увага зверталася на побудову простих і ефективних наближених формул. Асимптотичні методи Крилова – Боголобова Ю. О. Митропольському вдалося розповсюдити для дослідження нестационарних явищ, що виникають при зміні частот і інших параметрів нелінійних коливних систем. При цьому розроблено і математично строго обгрунтовано ефективний метод дослідження широкого класу коливних процесів і розв'язано низку нових задач, а також пояснено цікаві фізичні явища. Так він детально проаналізував коливання маятника в нелінійній постановці при наявності змінної довжини, вивчив коливання нелінійного осцилятора, що знаходиться під дією зовнішньої періодичної сили зі змінною частотою, відкрив і пояснив специфічні особливості зміни амплітуди і фази при різних режимах проходження

через резонанс, цікаві явища затягування амплітуди в резонансній зоні при дії зовнішньої періодичної сили з віброуючою частотою та ін. М. М. Крилов, М. М. Боголюбов і Ю. О. Митропольський створили цілу область математичної фізики — нелінійну механіку, основна увага в якій зосереджена на методах аналізу коливних систем. Ці дослідження ввійшли до монографії „Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний”. Ця монографія стала настільною книгою з нелінійної механіки, витримала чотири видання, перевидана в США, Франції, Німеччині, Японії та КНР.

Про значення нелінійної механіки для розвитку сучасної науки і техніки свідчать проведені в Києві під керівництвом Ю. О. Митропольського три міжнародні конференції з нелінійних коливань. Про їх популярність досить сказати, що в IX конференції взяли участь біля 600 вчених із 30 країн світу. Тепер ці конференції перетворились у європейські. Результати Ю. О. Митропольського з дослідження систем з повільно змінними параметрами ввійшли до його фундаментальної монографії „Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний”. Ці розробки та результати Крилова – Боголюбова з асимптотичних методів одержали світове визнання як асимптотичні методи Крилова – Боголюбова – Митропольського (метод КБМ). Проведено розробку різних варіантів асимптотичних методів і їх математичне обґрунтування та застосування для різних типів нелінійних диференціальних рівнянь. Ю. О. Митропольський разом з А. М. Самойленком на основі аналізу основних варіантів асимптотичних методів встановили основні закономірності асимптотичних методів і запропонували загальну схему побудови асимптотичних розкладів. Ю. О. Митропольський провів якісний аналіз складних явищ і провів розрахункові схеми, які знайшли застосування в багатьох прикладних задачах. Так, було детально вивчено явище проходження через резонанс. До появи робіт Ю. О. Митропольського розрахунок коливань при проходженні через резонанс можна було довести до числа і графіка тільки у випадку лінійної системи з одним ступенем вільності. Виконання цих розрахунків у випадку коливних систем з одним і багатьма ступенями вільності з урахуванням нелінійностей стало можливим завдяки методу, розробленому Ю. О. Митропольським. За допомогою методу Ю. О. Митропольського було розраховано резонансну і шумову розкачки синхронних коливань при проектуванні спорудження синхрофазотрона на 10 Бев, запущеного в 1957 р. в Об'єднаному інституті ядерних досліджень, а також виконано розрахунки коливань при проходженні через резонанс у роторах турбомашин, центрифугах, гіроскопічних системах тощо. Важко собі уявити важливу проблему нелінійної механіки, в яку б не вніс Ю. О. Митропольський вагомий внесок. Вони стосуються розвитку асимптотичних методів нелінійної механіки для дослідження систем з повільно змінними параметрами, розвитку одночастотного методу, методу усереднення, методу інтегральних многовидів, методу прискореної збіжності, теоретико-групового методу, багаточастотного методу, градієнтно-голономного методу тощо.

До найбільш значних результатів слід віднести розвиток математичної теорії багаточастотних коливань, розвиток теоретико-групового підходу в теорії методу усереднення, застосування методу інтегральних многовидів, подальший розвиток і застосування асимптотичних методів до функціонально-диференціальних рівнянь, стохастичних диференціальних рівнянь, рівнянь з імпульсною дією, інтегровності динамічних систем.

Важливі результати Ю. О. Митропольський одержав у розвитку асимптотичних методів нелінійної механіки дослідження коливних процесів у системах з розподіленими параметрами. Разом зі своїми учнями він створив і обґрунтував метод, який враховує специфіку розподілених систем і дозволяє будувати асимптотичні наближення при наявності нелінійностей, повільно змінних параметрів, випадкових збурень, запізень, а також нелінійностей в крайових умовах. Основні результати в цьому напрямку ввійшли до монографії „Асимптотические решения уравнений в частных производных” (спільно з Б. І. Мосеєнковим), а також „Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики” (спільно з Г. П. Хомою) та „Асимптотические методы исследования квазилинейных уравнений гиперболического типа” (спільно з Г. П. Хомою і М. І. Гром'яком).

Важливий внесок у розвиток асимптотичних методів нелінійної механіки зробив Ю. О. Митропольський у роботах, присвячених дослідженню впливу на коливання в нелінійних системах випадкових сил. Цей напрямок продовжував роботи М. М. Боголобова, який приділяв багато уваги вивченню асимптотичної поведінки динамічних систем під впливом випадкових збурень. Випадкові коливання описуються стохастичними диференціальними рівняннями, розв'язками яких є дифузійні марковські процеси. Використовуючи асимптотичні методи і методи теорії марковських процесів, Ю. О. Митропольський спільно з В. Г. Коломійцем, Нгуен Донг Анем, Нгуен Тіем Кхіємом дослідили вплив білого шуму на автономні і неавтономні квазілінійні коливні системи, що описуються різними класами диференціальних рівнянь, Ю. О. Митропольським побудовані вищі наближення розв'язків рівняння Фоккера – Планка – Колмогорова за допомогою методу усереднення. Результати цих та деяких інших досліджень ввійшли до монографії „Нелинейные колебания в системах произвольного порядка” (спільно з Нгуен Ван Дао і Нгуен Донг Анем).

Однією з актуальних задач теорії коливачів є задача дослідження коливних процесів в системах диференціальних рівнянь з відхиленням аргументом. До дослідження цієї проблеми приводять багато фізичних і прикладних задач, в яких сили залежать не тільки від положення і швидкості в фіксований момент часу, а й від моменту часу, що передує заданому.

Ю. О. Митропольський спільно з В. І. Фодчуком та Д. І. Мартинюком розвинули та обґрунтували асимптотичні методи і метод усереднення для дослідження нелінійних диференціально-функціональних рівнянь, у тому числі з малими параметрами при старшій похідній. Були детально досліджені інтегральні многовиди, періодичні і квазіперіодичні коливання та їх стійкість. Результати Ю. О. Митропольського у цьому напрямку досліджень викладені в монографіях „Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием” (спільно з Д. І. Мартинюком), „Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами” (спільно з А. М. Самойленком і Д. І. Мартинюком) та в англійському перекладі останньої.

Як відомо, при дослідженні коливних систем з багатьма ступенями вільності досить ефективно застосовується одночастотний метод, який полягає в побудові наближеної сім'ї розв'язків, залежної від двох довільних постійних.

Природним розвитком асимптотичних методів дослідження коливних систем виявився одночастотний метод, запропонований М. М. Боголобовим для автономної системи з багатьма ступенями вільності. Ю. О. Митропольський розповсюдив цей метод для дослідження нестационарних коливних систем з багатьма ступенями вільності. Запропонований ним метод базується на ідеї методу усереднення і дозволяє будувати асимптотичні розклади розв'язків системи з багатьма ступенями вільності аналогічно коливній системі з одним ступенем вільності. При дослідженні таких систем зручно розглядати одночастотний режим, тобто такі коливання, при яких всі точки системи коливаються з однією і тією ж частотою.

Одночастотний метод одержав строге математичне обґрунтування в дослідженнях Ю. О. Митропольського. Це обґрунтування зводиться до встановлення оцінки точності одержаних наближених розв'язків і дослідження стійкості двопараметричної сім'ї частинних розв'язків. Для зручності застосування цього методу Ю. О. Митропольський розробив різні схеми побудови системи рівнянь для амплітуди і фази коливачів.

Перспективним виявився запропонований Ю. О. Митропольським метод енергетичної інтерпретації, згідно з яким у першому й другому наближеннях можна побудувати рівняння для амплітуди і фази, виходячи з виразів для віртуальної роботи, а також кінетичної і потенціальної енергії, не розглядаючи точних рівнянь руху. Метод енергетичної інтерпретації дав можливість розповсюдити одночастотний метод на системи з розподіленими параметрами, що дозволило розглянути низку практично важливих задач нестационарних коливачів стержнів, пластин, балок, лопаток турбін тощо.

Ю. О. Митропольський розвинув одночастотний метод для побудови асимптотичних розкладів для систем з гірскопічними членами в нестационарному режимі, а також метод дослідження нестационарних коливачів у системах, що

описуються рівняннями в символічній формі. Цей метод виявився зручним при дослідженні механічних систем типу валів, систем передач, систем керування, вивченні електричних ланцюгів та ін.

У роботах Ю. О. Митропольського одностотний метод застосований також для дослідження коливань в нелінійних системах з запізненням та випадковими збуреннями. У 1995 р. ці результати опубліковані в монографії „Нелинейная механика. Асимптотические методы”.

Поряд з асимптотичним і одностотним методом одним з основних методів аналізу нелінійних систем у працях Ю. О. Митропольського є метод усереднення. Як відомо, строга теорія методу усереднення належить М. М. Боголюбову, який показав, що метод усереднення органічно пов'язаний з існуванням деякої заміни змінних, що дозволяє виключити час t із правих частин стандартних рівнянь з довільними степенями точності відносно малого параметра. Він також дав строге математичне обґрунтування методу усереднення і запропонував схему побудови вищих наближень.

Ю. О. Митропольський розвинув метод усереднення для дослідження багатьох класів нелінійних диференціальних рівнянь з малим і великим параметрами. Так, він самостійно і разом з багатьма своїми учнями розповсюдив і обґрунтував метод усереднення на нелінійні диференціальні рівняння з повільно змінними параметрами, на рівняння, близькі до точно інтегрованих, на рівняння в функціональних просторах, на інтегро-диференціальні і стохастичні диференціальні рівняння, на функціонально-диференціальні і диференціальні рівняння з частинними похідними тощо. Результати в цьому напрямку викладено в фундаментальних монографіях „Метод усреднения в нелинейной механике” та „Метод усреднения в исследованиях резонансных систем” (спільно з Є. О. Гребениковим). Спільно з А. М. Самойленком Ю. О. Митропольський розробив аксіоматичну теорію методу усереднення. Вони встановили оцінку близькості точного розв'язку і його n -го наближень. Розвитком методу усереднення стали результати Ю. О. Митропольського, одержані разом з О. К. Лопатіним. Вони запропонували алгоритм перетворення збуреної системи до спеціально побудованої системи порівняння. У літературі цей алгоритм названо методом асимптотичної декомпозиції. Він базується на використанні рядів Лі і теоретико-групових методів дослідження. Розглянуто широкий клас звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними.

Суть методу декомпозиції полягає в заміні розв'язання системи диференціальних рівнянь високого порядку розв'язанням систем меншої розмірності. Проведено обґрунтування методу асимптотичної декомпозиції, встановлено асимптотичний характер наближеного розв'язку. Як відомо, ці проблеми зводяться до проблеми збурення векторних полів. Найбільш важливі результати відносяться до розробки техніки нормалізації на групах Лі. Вони реалізують класичний метод теорії нормальних форм. Розроблена техніка нормалізацій тісно пов'язана з методом усереднення. Вона називається асимптотичною декомпозицією. Розглянуто питання інтерпретації та розвитку методу усереднення відносно систем у стандартній формі та систем зі швидкими змінними. Новий метод інтерпретує централізовану систему як прямий аналог усередненої за Боголюбовим. Операція усереднення інтерпретується як проектор Боголюбова для побудови проєкції будь-якого оператора на алгебру централізатора. Середні значення в цих задачах розуміємо як середні значення на групі. Таким чином, описаний підхід суттєво узагальнює метод усереднення М. М. Боголюбова. Ці результати ввійшли до монографії „Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики” та до розширеного перекладу англійською мовою „Нелинейная механика. Группы и симметрия”.

Розглянуто і обґрунтовано метод часткового усереднення. Досліджено усереднення для диференціальних рівнянь з розривними правими частинами і імпульсними впливами. Розглянуто також деякі схеми усереднення для інтегродиференціальних рівнянь. Широкий розвиток метод усереднення одержав при дослідженні стохастичних диференціальних рівнянь, диференціально-функціональних та сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Проблема вивчення інтегральних мнговидів виникла при дослідженні коливань у системах з багатьма ступенями вільності. Вона зводиться до виділен-

ня з сукупності розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь многовидів розв'язків розмірності, меншої за порядок системи. Перші результати з досліджень інтегральних многовидів одержані в 1945 р. М. М. Боголюбовим. Він встановив ознаки існування асимптотично стійкого однопараметричного інтегрального многовиду рівняння в стандартній формі, виходячи з рівняння першого наближення усередненого рівняння і дослідив структуру цього многовиду. Ці результати стали основою для створення нового напрямку в якісній теорії диференціальних рівнянь, який одержав назву методу інтегральних многовидів.

У подальшому значення методу інтегральних многовидів показано в роботах М. М. Боголюбова і Ю. О. Митропольського. Особливо потрібно відзначити їх доповідь на Міжнародному симпозіумі з нелінійних коливань, що проходив у Києві в 1961 р., в якій викладно основні їхні досягнення у цьому напрямку. Вони показали актуальність застосування методу інтегральних многовидів у дослідженні багатовимірних динамічних систем. Наявність у системи інтегрального многовиду дозволяє зводити якісне дослідження системи високого порядку на многовиді до якісного дослідження системи більш низького порядку. Ця ідея зведення особливо важлива в прикладних дослідженнях. Метод інтегральних многовидів одержав подальший розвиток у працях Ю. О. Митропольського та його учнів.

Ю. О. Митропольський розглянув інтегральні многовиди диференціальних рівнянь з повільно змінними параметрами, рівнянь зі змінними коефіцієнтами в гільбертовому просторі. Суттєво розвинули дослідження інтегральних многовидів Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, О. Б. Ликова і В. І. Фодчук. Вони встановили теореми існування інтегральних многовидів для різних класів диференціальних рівнянь, запропонували методи їх побудови, а також дослідили властивості розв'язків в околі многовидів і на самих многовидах. Було досліджено інтегральні многовиди нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь, близьких до точно інтегрованих, рівнянь зі швидкими і повільними змінними, рівнянь з запізненням, сингулярно збурених рівнянь, їх застосування до задач стійкості тощо. Дослідження Ю. О. Митропольського з теорії інтегральних многовидів викладено в сумісній з М. М. Боголюбовим монографії „Метод інтегральних многообразий в нелинейной механике” і в сумісних з О. Б. Ликовою монографіях „Лекции по методу интегральных многообразий” і „Интегральные многообразия в нелинейной механике”. Слід відзначити, що метод інтегральних многовидів знайшов подальший розвиток також у роботах математиків США.

У 1963 р. М. М. Боголюбов розробив новий варіант методу послідовних заміन змінних, який об'єднав метод прискореної збіжності з методом інтегральних многовидів. У подальших роботах Ю. О. Митропольського за допомогою цього методу розв'язано широке коло задач нелінійної механіки. Побудовано загальний розв'язок нелінійних диференціальних рівнянь на торі. У сумісних роботах з А. М. Самойленком за допомогою методу прискореної збіжності досліджено задачу про звідність лінійної системи з квазіперіодичними коефіцієнтами до системи з постійними коефіцієнтами. Вони довели, що майже кожену систему з квазіперіодичними коефіцієнтами, які досить мало відрізняються від постійних, можна звести до системи з постійними коефіцієнтами. У дослідженнях М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського і А. М. Самойленка розвинутий метод послідовних замін з прискореною збіжністю названо методом прискореної збіжності. Результати цих досліджень викладено в їхній сумісній монографії „Метод ускоренной сходимости в задачах нелинейной механики” та монографії Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, В. Г. Кулика „Исследование дихотомии нелинейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова”.

У 70–80 рр. у нелінійній механіці одержано значні результати в дослідженні багаточастотних коливань. Це викликано розробкою алгоритмів асимптотичного інтегрування і дослідження коливних систем з багатьма ступенями вільності. Ю. О. Митропольський разом з А. М. Самойленком розвинули теорію багаточастотних коливань, розробили схеми асимптотичного інтегрування систем нелінійних диференціальних рівнянь, які описують багаточастотні коливання.

Одержано нові фундаментальні теореми з обґрунтування асимптотичних методів дослідження багаточастотних коливань. Проведено аналіз коливань систем, які описуються n диференціальними рівняннями другого порядку в резонансному і нерезонансному випадках, одержано формули асимптотичних наближень.

У 1983 р. було запропоновано алгоритм дослідження повної інтегровності нелінійних динамічних систем вигляду

$$\frac{du}{dt} = K[u],$$

де векторне поле $K[u]$ є гладким за Фреше і визначено на відповідному функціональному многовиді. Він пізніше отримав назву градієнтно-голономного алгоритму. Завдяки зусиллям Ю. О. Митропольського, М. Боголюбова (мол.) та їхніх учнів В. Г. Самойленка та А. К. Прикарпатського цей алгоритм розвинуто та застосовано для дослідження широкого класу нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Проведено дослідження загальних закономірностей градієнтно-голономного алгоритму та його узагальнення для дослідження багатовимірних динамічних систем.

Підводячи підсумок основним результатам Ю. О. Митропольського та його математичної школи в області нелінійної механіки і математичної фізики, слід особливо підкреслити, що завдяки глибокому теоретичному доробку і широким практичним застосуванням методи нелінійної механіки стали широко відомими не тільки в нашій країні, а й в усьому світі. Вони збагатили науку новими досягненнями як в області математики, так і в області застосувань у механіці, фізиці і техніці. З повною впевненістю можна стверджувати, що асимптотичні методи нелінійної механіки — одні з найбільш ефективних методів дослідження різних задач природознавства, пов'язаних з коливними процесами.

Список монографій Ю. О. Митропольського за останні десять років*

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Математические проблемы нелинейной механики. — К.: Вища шк., 1987. — 72 с.
2. Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мол.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г. Интегрируемые динамические системы: Спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. — К.: Наук. думка, 1987. — 296 с.
3. Митропольский Ю. А., Лопатин А. К. Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики. — К.: Наук. думка, 1988. — 272 с.
4. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений. — К.: Наук. думка, 1990. — 290 с.
5. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк Н. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — К.: Наук. думка, 1991. — 231 с.
6. Митропольский Ю. А., Гребеников Е. О. Метод усреднения в исследованиях резонансных систем. — М.: Наука, 1992. — 221 с.
7. Митропольский Ю. А., Нгуен В. Д., Нгуен Д. А. Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. — К.: Наук. думка, 1992. — 344 с.
8. Mitropol'sky Yu. A., Samoilenko A. M., Martinyuk D. I. Evolution equations with periodic and quasiperiodic coefficients. — Kluwer Acad. Publ., 1993. — 279 p.
9. Mitropol'sky Yu. A., Nguen V. D. Methods in nonlinear oscillations. — Hanoi, 1994. — 412 p.
10. Mitropol'sky Yu. A., Lopatin A. K. Nonlinear mechanics groups and symmetry. — Kluwer Acad. Publ., 1995. — 388 p.
11. Митропольский Ю. А. Нелинейная механика. Асимптотические методы. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 396 с.

Одержано 05.06.96

* Біографічні та бібліографічні відомості про Ю. О. Митропольського див. у журналах: Дифференц. уравнения. — 1967. — 3. — № 1; 1977. — 13. — № 1; 1987. — 23. — № 1; Успехи мат. наук. — 1977. — 32. — Вып. 1; 1987. — 43. — Вып. 4; Укр. мат. журн. — 1967. — 18. — № 1; 1977. — 28. — № 1; 1987. — 38. — № 1.