УДК 517.927.4

Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук,
А. Н. Ронто, студ. (Киев. ун-т)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

A new scheme of successive approximations is suggested. It allows, for nonlinear ordinary differential equations considered together with multipoint linear boundary conditions, to study existence of solutions and to approximately construct the solutions. This method permits to study problems with both singular and nonsingular matrices in the boundary conditions.

Запропоновано нову схему послідовних наближень, яка дозволяє досліджувати існування та наближено будувати розв'язки нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що розглядаються разом із лінійними багатоточковими обмеженнями. Викладений метод робить можливим вивчення задач як з невиродженими, так і з виродженими матрицями за крайових умов.

1. Введение. Как показывают последние исследования в теории краевых задач, весьма плодотворной является идея численно-аналитического метода последовательных приближений, первоначально разработанного А. М. Самойленко для нахождения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Разнообразные его модификации предложены в работах [1–9] и др., где объектами исследований являются периодические и более общие двухточечные задачи для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, систем с импульсным воздействием, счетных систем и т. д.

Как известно [1, 2, 6], применение численно-аналитического метода в каждом случае требует построения определенной итерационной схемы для нахождения неподвижной точки специальным образом подобранного оператора. Строение такого оператора существенным образом зависит от заданного дифференциального уравнения и от типа краевых условий.

Например, для краевой задачи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T],$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d, \quad x\colon [0, T] \to R^n, \quad f\colon [0, T] \times D \to R^n,$$

итерационный процесс, построенный в работе [1] в предположении, что $\det C \neq 0$, в [2] модифицирован для случая, когда $\det C = 0$, но $\det(k_1 A + k_2 C) \neq 0$, где $k_1, k_2 \in R$. Аналогично, итерационная схема, построенная в [9] для трехточечной задачи с ограничением вида

$$Ax(0) + A_1 x(t_1) + Cx(T) = d,$$

при условии, что $\det(t_1 A + TC) \neq 0$, уже требует подходящего изменения, если эта матрица является особенной [10].

Отметим, что реализация численно-аналитической техники сталкивается с определенными трудностями в случае многоточечных краевых условий, заданных с помощью вырожденных матриц. Это относится как к выбору подходящего вида последовательных приближений и доказательства их сходимости, так и к получению достаточных условий разрешимости определяющих уравнений.

В настоящей работе предлагается способ построения численно-аналитического алгоритма для исследования краевой задачи

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{N} A_i x(t_i) - d = 0, \tag{2}$$

где

$$x\colon [0,T] \to D \subset R^n, \quad f\colon [0,T]\times D \to R^n, \quad t_0 = 0, \quad t_N = T,$$

$$\{t_i\}_{i=1}^{N-1} \subset (0,T), \quad d \in R^n,$$

и $\{A_i\}_{i=0}^{N}$ — некоторые постоянные $(n\times n)$-мерные матрицы такие, что некоторая их линейная комбинация не вырождена.

2. Построение последовательных приближений и анализ сходимости. Будем рассматривать векторы $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T$ как элементы n-мерного эвклидова пространства R^n с нормой

$$|x|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1,2,\ldots,n} |x^i| \quad \forall\, x \in R^n.$$

Потребуем, чтобы для краевой задачи (1), (2) выполнялись следующие условия:

A. Правая часть f непрерывна в своей области определения: $f \in C([0,T]\times \times D, R^n)$, где D — некоторое замкнутое подмножество R^n, и

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times D} |f(t,x)|_\infty \neq +\infty.$$

B. Функция f глобально липшицева по x, т. е. найдется положительная постоянная L такая, что

$$|f(t,x) - f(t,y)|_\infty \le L|x-y|_\infty$$

при всех $\{x,y\}\subset D$, $t\in[0,T]$.

C. Существует такой набор чисел $\{k_i\}_{i=0}^{N} \subset R$, что

$$\det H \neq 0, \quad H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{N} k_i A_i.$$

Обозначив через $l(\cdot)$ интерполяционный полином, принимающий значения k_i в узлах t_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, дополнительно потребуем, чтобы:

D. Множество D' было не пустым: $D' \neq \varnothing$, где D' — совокупность точек $\xi \in D$, содержащихся в D вместе со своими $r(\xi)$-окрестностями,

$$r(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{TM}{2} + \max_{t\in[0,T]} |l(t)| \left\{ \left| H^{-1}\left(d - \sum_{i=0}^{N} A_i \xi\right)\right|_\infty + \right.$$

$$\left. + M \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2}\right| \left| H^{-1} A_i \right|_\infty \right\}.$$

Согласно общей идее численно-аналитического метода заменим задачу (1), (2) специальным операторным уравнением, из множества решений которого можно выделить решения исходной краевой задачи.

Для этого определим семейство отображений

$$Q_\xi x\colon C^1([0,T],R^n) \to C^1([0,T],R^n),$$

заданное формулой

$$(Q_\xi x)(t) \overset{\text{def}}{=} \xi + \int\limits_{T/2}^{t} f(s,x(s))\,ds + l(t)H^{-1}\Delta_\xi(x), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\Delta_\xi(x) \overset{\text{def}}{=} d - \sum_{i=0}^{N} A_i\left(\xi + \int\limits_{T/2}^{t_i} f(s,x(s))\,ds\right),$$

для всех $x \in C([0,T],R^n)$ ($\xi \in R^n$ — векторный параметр).

Выбор операторов такого вида обусловлен их свойствами, определенными в следующих утверждениях.

Лемма 1. *При любых $x \in C([0,T],R^n)$ и $\xi \in R^n$ образ элемента x при преобразовании Q_ξ удовлетворяет краевым условиям* (2), *т. е.*

$$\forall\ \xi \in R^n, \quad \forall\ x \in C([0,T],R^n) \quad u(Q_\xi x) \equiv 0.$$

Доказательство. Принимая во внимание, что $l(t_i) = k_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, N-1, N$, для произвольных $\xi \in R^n$ и $x \in C([0,T],R^n)$ имеем

$$u(Q_\xi x) \equiv \sum_{i=0}^{N} A_i (Q_\xi x)(t_i) - d \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{N} A_i\xi + \sum_{i=0}^{N} A_i \int\limits_{T/2}^{t_i} f(s,x(s))\,ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N} k_i A_i H^{-1}\left(d - \sum_{i=0}^{N} A_i\xi - \sum_{i=0}^{N} A_i \int\limits_{T/2}^{t_i} f(s,x(s))\,ds\right) - d \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Для каждого $\xi \in D'$ оператор Q_ξ преобразует пространство $C([0,T],D)$ в себя.*

Доказательство. Пусть $\xi \in D'$ и $x \in C([0,T],D)$ выбраны произвольным образом. Тогда из определения операторов Q_ξ в силу предположений A и D получаем

$$|(Q_\xi x)(t) - \xi|_\infty = \left| \int\limits_{T/2}^{t} f(s,x(s))\,ds + \right.$$

$$\left. + l(t)H^{-1}\left[d - \sum_{i=0}^{N} A_i\left(\xi + \int\limits_{T/2}^{t_i} f(s,x(s))\,ds\right)\right]\right|_\infty \le$$

$$\le \frac{TM}{2} + \max_{t\in[0,T]} |l(t)| \left\{ \left| H^{-1}\left(d - \sum_{i=0}^{N} A_i\xi\right)\right|_\infty + \right.$$

$$\left. + M\sum_{i=0}^{N}\left|t_i - \frac{T}{2}\right| |H^{-1}A_i|_\infty \right\} = r(\xi) \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Таким образом, как видно из определения множества D', имеем $(Q_\xi x)(t) \in D$ для всех $t \in [0, T]$, что и требовалось доказать.

Следующее утверждение устанавливает связь между операторами Q_ξ и исходной задачей.

Теорема 1. *Вектор-функция $x \in C^1([0, T], R^n)$ является решением краевой задачи* (1), (2) *с начальным условием $x(T/2) = \xi$ тогда и только тогда, когда выполняется система равенств*

$$x = Q_\xi x, \tag{4}$$

$$\Delta_\xi(x) = 0, \tag{5}$$

т. е. x — неподвижная точка оператора Q_ξ, доставляющая функционалу $\Delta_\xi(\cdot)$ значение 0.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x \in C^1([0, T], R^n)$ таково, что $x'(t) \equiv f(t, x(t))$ для всех $t \in [0, T]$ и $u(x) \equiv 0$. Тогда в силу представления Пикара

$$x(t) = \xi + \int_{T/2}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \forall\, t \in [0, T],$$

где $\xi \overset{\text{def}}{=} x(T/2)$. Условие (2) может быть записано в виде

$$\sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi + \int_{T/2}^{t_i} f(s, x(s))\, ds \right) = d,$$

и, таким образом, равносильно (5). Следовательно, принимая во внимание специальную структуру оператора Q_ξ, получаем

$$(Q_\xi x)(t) \equiv \xi + \int_{T/2}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$

что при всех $t \in [0, T]$ совпадает с $x(t)$. Таким образом, выполняются соотношения (4), (5).

Достаточность. Предположим теперь, что при некоторых $\xi \in R^n$ и $x \in C([0, T], R^n)$ выполняются равенства (4), (5). Это означает, что

$$x(t) \equiv \xi + \int_{T/2}^{t} f(s, x(s))\, ds + l(t) H^{-1} \Delta_\xi(x) \equiv$$

$$\equiv \xi + \int_{T/2}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Дифференцируя последнее тождество по t, заключаем, что $x(\cdot)$ является решением дифференциального уравнения (1). Очевидно также, что $x(T/2) = \xi$. Кроме того, согласно лемме 1 $x(\cdot)$ удовлетворяет краевым условиям (2). Этим и доказано утверждение теоремы.

Таким образом, краевая задача (1), (2) эквивалентна системе операторных уравнений (4), (5). Для нахождения решения последней построим следующую итерационную последовательность:

$$x_m(t,\xi) \overset{\text{def}}{=} (Q_\xi x_{m-1}(\cdot,\xi))(t) = \xi + \int\limits_{T/2}^{t} f(s, x_{m-1}(s,\xi))\,ds \; +$$

$$+ \; l(t)H^{-1}\left[d - \sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi + \int\limits_{T/2}^{t_i} f(s, x_{m-1}(s,\xi))\,ds\right)\right], \tag{6}$$

$$x_0(t,\xi) \overset{\text{def}}{=} \xi \quad \forall\, t \in [0,T],$$

зависящую от параметра $\xi \in D' \subset D$.

При определенных условиях можно утверждать, что для каждого $\xi \in D'$ оператор Q_ξ имеет единственную неподвижную точку.

Теорема 2. *Пусть справедливы предположения* A–D *и выполняется следующее неравенство:*

$$q \overset{\text{def}}{=} L\left(\frac{T}{2} + \max_{0 \le t \le T} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left|t_i - \frac{T}{2}\right| \left|H^{-1}A_i\right|_\infty\right) < 1. \tag{7}$$

Тогда при каждом $\xi \in D'$ оператор Q_ξ имеет единственную неподвижную точку $x^*(\cdot,\xi) \in C^1([0,T],D)$, совпадающую с равномерным пределом последовательности (6), *т. е.*

$$\| x_m(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\xi) \|_C = \max_{0 \le t \le T} | x_m(t,\xi) - x^*(t,\xi) |_\infty \underset{m \to \infty}{\to} 0.$$

Абсолютная погрешность оценивается неравенством

$$\| x_m(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\xi) \|_C \le \frac{q^m}{1-q} \| x_1(\cdot,\xi) - x_0(\cdot,\xi) \|_C. \tag{8}$$

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы Q_ξ является сжимающим отображением замкнутого подмножества $C([0,T],D)$ банахова пространства $C([0,T],R^n)$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_C$.

Действительно, для произвольных $\{x,y\} \subset C^1([0,T],D)$ и $\xi \in D'$ из (3) получаем

$$\| Q_\xi x - Q_\xi y \|_C = \max_{0 \le t \le T} \left| \int\limits_{T/2}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\,ds \; - \right.$$

$$\left. - \; l(t)H^{-1} \sum_{i=0}^{N} A_i \int\limits_{T/2}^{t_i} (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\,ds \right|_\infty \le$$

$$\le \max_{0 \le t \le T} \left| \int\limits_{T/2}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\,ds \right|_\infty +$$

$$+ \max_{0 \le t \le T} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left|H^{-1}A_i\right|_\infty \left| \int\limits_{T/2}^{t_i} (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\,ds \right|_\infty \le$$

$$\leq \frac{LT}{2} \max_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|_\infty +$$

$$+ L \max_{0 \leq t \leq T} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| \left| H^{-1} A_i \right|_\infty \max_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|_\infty .$$

Подставляя значение постоянной q в последнее выражение, имеем

$$\| Q_\xi x - Q_\xi y \|_C \leq q \| x - y \|_C ,$$

где $q \in (0, 1)$.

Поскольку в силу леммы 2 оператор Q_ξ преобразует $C([0, T], D)$ в себя и на основе последнего неравенства является сжимающим, к уравнению (4) можно применить известный принцип Банаха, обеспечивающий существование единственного решения $x^*(\cdot, \xi)$. При этом итерационная последовательность (6) сходится к функции $x^*(\cdot, \xi)$ для любого начального приближения $x_0(\cdot, \xi) \in \in C([0, T], D)$ и, в частности, для $x_0(t, \xi) \equiv \xi$. Используя стандартные выкладки, получаем указанную в условии теоремы оценку погрешности $\| x_m(\cdot, \xi) - x^*(\cdot, \xi) \|_C$.

***Замечание* 1.** Последовательные приближения $x_m(t, \xi)$ можно определить по формулам

$$x_m(t, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \xi + \int_{t_k}^{t} f(s, x_{m-1}(s, \xi))\, ds +$$

$$+ \; l(t) H^{-1} \left[d - \sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi + \int_{t_k}^{t_i} f(s, x_{m-1}(s, \xi))\, ds \right) \right], \quad m \geq 1,$$

$$x_0(\cdot, \xi) \in C([0, T], D),$$

где t_k — одна из промежуточных точек в заданном граничном условии. Как следует из (7), такая итерационная схема предпочтительнее в том случае, если элементы одной из матриц A_k по абсолютной величине значительно больше, чем в остальных матрицах A_i, $i \neq k$.

3. О зависимости последовательных приближений от параметра. Учитывая свойства операторов Q_ξ, получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Для всех* $m = 1, 2, \ldots$ *функция* $x_m(t, \xi)$ *непрерывна по* ξ. *Кроме того, если:*

E. $\forall\, t \in [0, T] \quad f(t, \cdot) \in C^1(D, R^n)$,

то характер этой зависимости гладкий.

Лемма 4. *Если начальное приближение* $x_0(\cdot, \xi)$ *непрерывно дифференцируемо по* ξ *и выполняются условия* A, E, *то и все итерации* $x_m(\cdot, \xi)$ *также непрерывно дифференцируемы по* ξ.

Доказательство. Очевидно, вследствие условий A, E для любого гладко зависящего от ξ начального приближения $x_0(\cdot, \xi)$ (и, конечно, для определенного формулой (6)) существует производная

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi}(t,\xi) \equiv I + \int_{T/2}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_0(s,\xi)) \frac{\partial x_0}{\partial \xi}(s,\xi)\, ds -$$

$$- l(t) H^{-1} \sum_{i=0}^{N} A_i \left(I + \int_{T/2}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_0(s,\xi)) \frac{\partial x_0}{\partial \xi}(s,\xi)\, ds \right)$$

для всех $t \in [0, T]$ и $\xi \in R^n$. По индукции можно показать, что и при $m = 2, 3, \ldots$

$$\frac{\partial x_m}{\partial \xi}(t,\xi) \equiv I + \int_{T/2}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_{m-1}(s,\xi)) \frac{\partial x_{m-1}}{\partial \xi}(s,\xi)\, ds -$$

$$- l(t) H^{-1} \sum_{i=0}^{N} A_i \left(I + \int_{T/2}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_{m-1}(s,\xi)) \frac{\partial x_{m-1}}{\partial \xi}(s,\xi)\, ds \right),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *При выполнении условия* A *предельная функция* x^* *последовательности* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *непрерывна по* ξ.

Следствие 2. *Если начальное приближение* $x_0(t,\xi)$ *дифференцируемо по* ξ *и выполняются условия* A, E, *то предельная функция* x^* *последовательности* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *также непрерывно дифференцируема по* ξ.

Предположим теперь, что выполняются такие дополнительные условия:

F. существует такая постоянная $\omega > 0$, что

$$\max_{t \in [0,T]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) \right|_{\infty} \le \omega |x - y|_{\infty} \quad \forall \{x, y\} \subset D;$$

G. справедливы соотношения

$$\sup_{(t,\xi) \in [0,T] \times D'} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi)) \right|_{\infty} \le L,$$

$$R \overset{\text{def}}{=} \sup_{(t,\xi) \in [0,T] \times D'} \left| \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi) \right|_{\infty} < +\infty.$$

Следующее утверждение устанавливает дальнейшие свойства предельной функции x^*.

Лемма 5. *Пусть справедливы предположение* B *и неравенство* (7). *Тогда функция* x^* *липшицева по* ξ. *Если при этом выполняются условия* E, F, G, *то производная* $\partial x^* / \partial \xi$ *также липшицева по* ξ.

Доказательство. Выбрав произвольные $\{\xi_1, \xi_2\} \subset D'$, оценим разность

$$\| x^*(\cdot, \xi_1) - x^*(\cdot, \xi_2) \|_C =$$

$$= \max_{t \in [0,T]} \left| \xi_1 - \xi_2 + \int_{T/2}^{t} (f(\tau, x^*(\tau,\xi_1)) - f(\tau, x^*(\tau,\xi_2)))\, d\tau - \right.$$

$$- \, l(t) H^{-1} \sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi_1 - \xi_2 + \int\limits_{T/2}^{t_i} (f(\tau, x^*(\tau, \xi_1)) - f(\tau, x^*(\tau, \xi_2)))\, d\tau \right) \Big|_\infty \le$$

$$\le \left(1 + \max_{t \in [0,T]} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left| H^{-1} A_i \right|_\infty \right) |\xi_1 - \xi_2|_\infty +$$

$$+ \, L \left(\frac{T}{2} + \max_{t \in [0,T]} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| \left| H^{-1} A_i \right|_\infty \right) \| x^*(\cdot, \xi_1) - x^*(\cdot, \xi_2) \|_C .$$

Разрешив последнее неравенство относительно оцениваемой разности, в силу (7) получим

$$\| x^*(\cdot, \xi_1) - x^*(\cdot, \xi_2) \|_C \le \frac{\rho}{1-q} |\xi_1 - \xi_2|_\infty, \tag{9}$$

где

$$\rho \overset{\text{def}}{=} 1 + \max_{t \in [0,T]} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left| H^{-1} A_i \right|_\infty .$$

Этим доказано первое утверждение леммы.

Чтобы доказать второе утверждение, зададим произвольные $\{\xi_1, \xi_2\} \subset D'$ и получим следующие оценки:

$$\left\| \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot, \xi_1) - \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot, \xi_2) \right\|_C =$$

$$= \max_{t \in [0,T]} \left| \int\limits_{T/2}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_1)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_2)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_2) \right] ds \, - \right.$$

$$- \, l(t) H^{-1} \sum_{i=0}^{N} A_i \int\limits_{T/2}^{t_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_1)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_1) \, - \right.$$

$$\left. \left. - \, \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_2)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_2) \right] ds \right|_\infty \le$$

$$\le \max_{t \in [0,T]} \left| \int\limits_{T/2}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_1)) \left[\frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_1) - \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_2) \right] ds \right|_\infty +$$

$$+ \max_{t \in [0,T]} \left| \int\limits_{T/2}^{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_1)) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_2)) \right] \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_2)\, ds \right|_\infty +$$

$$+ \max_{t \in [0,T]} \left| l(t) H^{-1} \sum_{i=0}^{N} A_i \int\limits_{T/2}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_1)) \left[\frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_1) - \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s, \xi_2) \right] ds \right|_\infty +$$

$$+ \max_{t \in [0,T]} \left| l(t) H^{-1} \sum_{i=0}^{N} A_i \int\limits_{T/2}^{t_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s, \xi_1)) \, - \right. \right.$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s,\xi_2)) \Big] \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(s,\xi_2)\, ds \Big|_\infty .$$

Принимая во внимание предположение G и оценку (9), после перегруппировки членов получаем

$$\left\| \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot,\xi_1) - \frac{\partial x^*}{\Delta \xi}(\cdot,\xi_2) \right\|_C \le$$

$$\le L \left(\frac{T}{2} + \max_{t\in[0,T]} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| \left| H^{-1} A_i \right|_\infty \right) \left\| \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot,\xi_1) - \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot,\xi_2) \right\|_C +$$

$$+ \left(\frac{TR\omega}{2} + \omega R \max_{t\in[0,T]} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| \left| H^{-1} A_i \right|_\infty \right) \| x^*(\cdot,\xi_1) -$$

$$- x^*(\cdot,\xi_2) \|_C \le$$

$$\le L \left(\frac{T}{2} + \max_{t\in[0,T]} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| \left| H^{-1} A_i \right|_\infty \right) \left\| \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot,\xi_1) - \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot,\xi_2) \right\|_C +$$

$$+ \omega R \left(\frac{T}{2} + \max_{t\in[0,T]} |l(t)| \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| \left| H^{-1} A_i \right|_\infty \right) \frac{\rho}{1-q} |\xi_1 - \xi_2|_\infty .$$

Преобразуя последнее неравенство, получаем

$$\left\| \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot,\xi_1) - \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(\cdot,\xi_2) \right\|_C \le \frac{\omega \rho R q}{L(1-q)^2} |\xi_1 - \xi_2|_\infty, \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

4. О решении определяющего уравнения. Как показано в п. 2, при выполнении условий A–D и (7) для каждого $\xi \in D'$ оператор Q_ξ имеет единственную неподвижную точку $x^*(\cdot,\xi)$. Остается выбрать то значение параметра ξ, при котором для $x = x^*(\cdot,\xi)$ выполняется соотношение (5). Сначала, обозначив $F\xi \overset{\text{def}}{=} \Delta_\xi(x^*(\cdot,\xi))$ для всех $\xi \in D'$, докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *При выполнении условий* A, E, F, G *оператор* F *имеет производную Фреше, удовлетворяющую условию Липшица.*

Доказательство. Учитывая, что

$$F\xi \equiv d - \sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi + \int_{T/2}^{t_i} f(t, x^*(t,\xi))\, dt \right),$$

согласно следствию 2 и лемме 5 имеем

$$F'\xi \equiv - \sum_{i=0}^{N} A_i \left(I + \int_{T/2}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi)\, dt \right).$$

Далее, для произвольных $\{\xi_1, \xi_2\} \subset D'$ справедливы соотношения

$$\| F'\xi_1 - F'\xi_2 \|_\infty \equiv$$

$$\equiv \left| \sum_{i=0}^{N} A_i \int_{T/2}^{t_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi_1)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi_2)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi_2) \right] dt \right|_\infty \le$$

$$\le \left| \sum_{i=0}^{N} A_i \int_{T/2}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi_1)) \left[\frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi_1) - \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi_2) \right] dt \right|_\infty +$$

$$+ \left| \sum_{i=0}^{N} A_i \int_{T/2}^{t_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi_1)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi_2)) \right] \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi_2)\, dt \right|_\infty .$$

Согласно (9), (10) отсюда получаем

$$\| F'\xi_1 - F'\xi_2 \|_\infty \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| |A_i|_\infty \left[\frac{\omega\rho R q}{(1-q)^2} - \frac{\omega R q}{1-q} \right] |\xi_1 - \xi_2|_\infty =$$

$$= \frac{\omega\rho R q}{(1-q)^2} \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| |A_i|_\infty |\xi_1 - \xi_2|_\infty,$$

что и требовалось доказать.

Установим теперь достаточное условие разрешимости краевой задачи (1), (2).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* A–G, (7) *и* $\xi_0 \in D'$ *таково, что*

$$h \overset{\text{def}}{=} \frac{bc\omega\rho R}{(1-q)^2} \sum_{i=0}^{N} \left| t_i - \frac{T}{2} \right| |A_i|_\infty \le \frac{1}{2},$$

где

$$|(F'\xi_0)^{-1}|_\infty = \left| \left[\sum_{i=0}^{N} A_i \left(I + \int_{T/2}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi_0)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi_0) \right) \right]^{-1} \right|_\infty \le b,$$

$$|(F'\xi_0)^{-1} F\xi_0|_\infty =$$

$$= \left| \left[\sum_{i=0}^{N} A_i \left(I + \int_{T/2}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t,\xi_0)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t,\xi_0) \right) \right]^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(d - \sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi_0 + \int_{T/2}^{t_i} f(t, x^*(t,\xi_0))\, dt \right) \right) \right|_\infty \le c.$$

Тогда в шаре $B(\xi_0, r_0)$ *радиуса* $r_0 \overset{\text{def}}{=} \left(1 - \sqrt{1-2h}\right) c/h$ *с центром в точке* ξ_0 *существует корень* $\xi = \xi^*$ *определяющего уравнения*

$$\sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi + \int_{T/2}^{t_i} f(t, x^*(t,\xi))\, dt \right) = d. \tag{11}$$

Он определяет решение $x = x^*(\cdot, \xi^*) \in C^1([0,T], D)$ *краевой задачи* (1), (2), *которое имеет начальное значение* $x^*(T/2, \xi^*) = \xi^* \in B(\xi_0, r_0)$, *совпада-*

ющее с пределом итераций

$$\xi_{m+1} = \xi_m - \left[\sum_{i=0}^{N} A_i \left(I + \int_{T/2}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t, \xi_m)) \frac{\partial x^*}{\partial \xi}(t, \xi_m) \right) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left(d - \sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi_m + \int_{T/2}^{t_i} f(t, x^*(t, \xi_m))\, dt \right) \right),$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем погрешность оценивается неравенством

$$|\xi^* - \xi_m|_\infty \leq \frac{c}{2^m h}(2h)^{2^m}$$

Доказательство состоит в применении к уравнению (11) леммы 6 и классической теоремы Ньютона–Канторовича [11, с. 680].

На практике для приближенного вычисления значения $\xi = \xi^*$ можно рассматривать приближенные определяющие уравнения

$$\sum_{i=0}^{N} A_i \left(\xi + \int_{T/2}^{t_i} f(t, x_m(t, \xi))\, dt \right) = d, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

и использовать для их решения известные численные методы, например, модифицированный метод Ньютона–Канторовича. Оценка погрешности требует отдельного исследования.

Замечание 2. Если $\det \sum_{i=0}^{N} A_i \neq 0$, то в (6) можно положить $l(t) \equiv 1$. В этом случае предельная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), а значит, в силу леммы 1 сходимости последовательных приближений (6) достаточно для разрешимости исходной краевой задачи.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – М.: Мир, 1979. – 183 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
6. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – **13** (47). – С. 31–36.
7. *Kwapisz M.* Integral operators arising in the method of successive periodic approximations // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 128–132.
8. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
9. *Ронто Н. И., Савина Т. В.* Численно-аналитический метод для трехточечных краевых задач // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 3. – С. 393–403.
10. *Ronto M., Tégen R. M.* Successive approximation method for three-point boundary value problems with singular matrices // Math. Pannonica. – 1994. – **5**/1. – P. 15–28.
11. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Получено 29.08.94